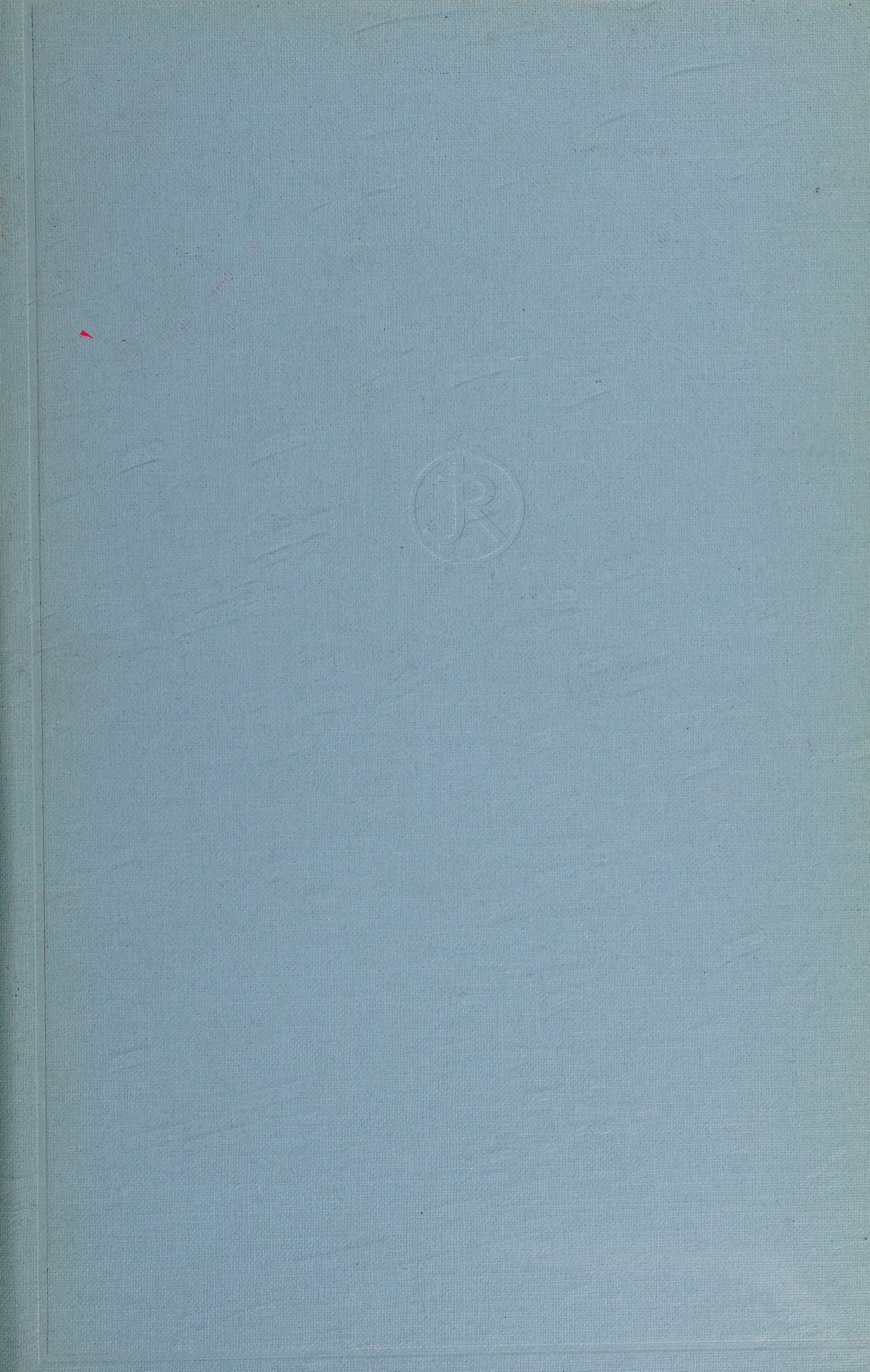




ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

SÉRIE MATHÉMATIQUE

Tome 11

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1947

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 3–32 Série mathématique

В. М. ДАРЕВСКИЙ

О МЕТОДАХ TOEPLITZ'A

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Исследуется некоторое множество последовательностей, на котором реверсивный метод Toeplitz'a совместен со всеми не более слабыми, чем он, регулярными методами. Дается эффективное достаточное условие совершенства реверсивных методов Toeplitz'a. Для двух произвольных методов Toeplitz'a устанавливаются эффективные достаточные условия их ограниченной совместности.

Мы будем говорить о методах суммирования с помощью бесконечных матриц, называя их методами Toeplitz'a, если они регулярны.

Поле метода A (т. е. множество всех последовательностей, суммируемых этим методом) будем обозначать через A' и говорить, что метод B не слабее метода A, если $B' \supseteq A'$. Если $A' = B'$, то методы A и B будем называть равносильными.

Последовательность, в которую преобразуется с помощью матрицы $A = (a_{ik})$ последовательность $x = (x_k)$, будем обозначать через $A(x) = (A_i(x))$, а результат суммирования методом A последовательности x, т. е. $\lim\limits_{i\to\infty} A_i(x)$, — через $\overline{A}(x)$.

Методы A и B будем называть совместными, если для любого $x \in A'B'$, $\overline{A}(x) = \overline{B}(x)$. Если для любого $x \in M \subseteq A'B'$, $\overline{A}(x) = \overline{B}(x)$, то будем говорить, что методы A и B совместны на множестве M.

Множество всех ограниченных последовательностей, входящих в поле A' метода A, будем обозначать через A'_0.

Методы A и B будем называть ограниченно совместными, если они совместны на множестве $A'_0 B'_0$. Равносильные ограниченно совместные методы A и B будем называть ограниченно эквивалентными.

Метод $A = (a_{ik})$ называется реверсивным, если для любой сходящейся последовательности $y = (y_i)$ уравнение $y = A(x)$ (т. е. система уравнений $y_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$, $i = 1, 2, \ldots$) имеет единственное решение $x = (x_k)$. Если $y = \delta^{(m)} = (\delta_i^{(m)})$ $(\delta_m^{(m)} = 1,\ \delta_{i\neq m}^{(m)} = 0)$, то соответствующее решение уравнения $y = A(x)$ будем обозначать через $\xi^{(m)} = (\xi_k^{(m)})$. Таким образом, каждому реверсивному методу $A = (a_{ik})$ будет соответствовать счетное множество последовательностей $\xi^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, все элементы которых однозначно определяются элементами матрицы (a_{ik}).

Последовательности $\xi^{(m)}$ будем называть **фундаментальными** по отношению к соответствующему им методу суммирования.

Реверсивный метод Toeplitz'a мы будем называть **совершенным**, если он совместен со всеми не более слабыми, чем он, регулярными методами *.

Пусть последовательность $t=(t_i)$ такова, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|t_i|$ сходится. Множество всех таких последовательностей обозначим через σ_1.

Если $\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{ik}=0$ $(k=1, 2, \ldots)$, то будем говорить, что элемент $t=(t_i)$ ортогонален ко всем столбцам матрицы (a_{ik}).

Мы будем обозначать, далее, через $tA(x)$ скалярное произведение последовательностей t и $A(x)$ (т. е. выражение $\sum_{i=1}^{\infty} t_i A_i(x)$), через tA — последовательность, k-й член которой определяется как скалярное произведение последовательности t на k-й столбец матрицы A и, наконец, через $(tA)x$ — скалярное произведение последовательностей tA и x.

Ясно, что если $t\in\sigma_1$, $x\in A'$ и все столбцы матрицы $A=(a_{ik})$ являются ограниченными последовательностями ($\sup_i |a_{ik}|<\infty$, $k=1, 2, \ldots$), то обозначения $tA(x)$ и tA имеют смысл.

Цель настоящей заметки — исследовать некоторое множество последовательностей (в дальнейшем оно обозначено через A'''), на котором реверсивный метод Toeplitz'a совместен со всеми не более слабыми, чем он, регулярными методами, дать эффективное достаточное условие совершенства реверсивных методов Toeplitz'a и указать для двух произвольных методов Toeplitz'a эффективные достаточные условия их ограниченной совместности.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $A=(a_{ik})$ — реверсивный метод Toeplitz'a. Для каждого регулярного метода B не более слабого, чем A, существует такой элемент $t\in\sigma_1$ и ортогональный ко всем столбцам матрицы (a_{ik}), что для любого $x\in A'$ имеет место равенство*

$$\overline{B}(x)=\overline{A}(x)+tA(x). \tag{1}$$

Наоборот, каков бы ни был элемент $t\in\sigma_1$ и ортогональный ко всем столбцам матрицы $A=(a_{ik})$, существует такой метод Toeplitz'a

---

* Banach называет реверсивный метод Toeplitz'a $A=(a_{ki})$ совершенным, если из условий

$$\sum_{i=1}^{\infty}|t_i|<\infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{ik}=0 \quad (k=1, 2, \ldots)$$

следует, что $t_i=0$ $(i=1, 2, \ldots)$. Наше определение совершенного метода эквивалентно определению Banach'a (см. стр. 12).

B, равносильный методу A, что для любого $x \in A'$ имеет место равенство (1) *.

Доказательство. Если матричный метод $A=(a_{ik})$ реверсивный, а матричный метод $B=(b_{ik})$ не слабее метода A (пока мы не предполагаем, что методы A и B регулярные), то с помощью равенства $y=A(x)$, можно рассматривать $\overline{B}(x)$ как функционал $F(y)$, определенный в пространстве (c) сходящихся последовательностей y (или, что все равно, как функционал $f(x)$, определенный в пространстве A', для элементов которого введена норма $|x|=\sup\limits_i |A_i(x)|$).

Как показал Banach [(1), стр. 47, теорема 10], любой член x_k последовательности (x_k), являющейся решением уравнения $y=A(x)$ $(y \in (c))$, есть линейный функционал в пространстве (c), поэтому функционал

$$F(y)=\overline{B}(x)=\lim_{i\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}x_k$$

является линейной функцией второго класса Бэра в пространстве (c) и, следовательно, $F(y)$ есть также линейный функционал в пространстве (c). Но если функционал $F(y)$ линейный, то [см. (1), стр. 66—67] для любого $y=(y_i)\in(c)$,

$$F(y)=k\lim_{t\to\infty} y_i+ty \quad (t\in\sigma_1,\ k=\text{const})$$

или, в других обозначениях,

$$\overline{B}(x)=k\overline{A}(x)+tA(x) \text{ для любого } x\in A'. \tag{2}$$

Если теперь дополнительно предположить, что методы A и B регулярные, то, подставляя в равенство (2) $\delta^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots)$ вместо x, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{ik}=0 \quad (k=1,2,\ldots),$$

т. е. что элемент $t=(t_i)$ ортогонален ко всем столбцам матрицы (a_{ik}) Положив затем в равенстве (2) $x=(1,1,\ldots)$ и замечая, что для любой последовательности $x\in A'$ и $t\in\sigma_1$

$$tA(x)=(tA)x, \tag{3}$$

получим $k=1$. Таким образом, мы пришли к равенству (1).

---

* Эта теорема имеет для дальнейшего вспомогательное значение. Если в формулировке теоремы 1 заменить слово «реверсивный» словом «нормальный», то она будет содержаться в известных результатах Mazur'a (2). Следует указать, что вторая часть теоремы 1 доказывается тем же путем, как и в случае, когда метод $A=(a_{ik})$ нормальный, т. е. когда $a_{ik}=0$ при $k>i$, а $a_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,\ldots)$.

Что касается первой части теоремы 1, то, как видно из приведенного доказательства, она почти непосредственно вытекает из некоторых результатов Banach'a.

Для того чтобы доказать вторую часть теоремы, определим элементы матрицы $B=(b_{ik})$ из равенств

$$b_{ik}=a_{1k} \quad (k=1, 2, \ldots),$$
$$b_{ik}=a_{ik}+\sum_{n=1}^{i-1} t_n a_{nk} \quad (i=2, 3, \ldots; k=1, 2, \ldots).$$

Ясно, что

$$B_1(x)=A_1(x), \quad B_i(x)=A_i(x)+\sum_{n=1}^{i-1} t_n A_n(x) \quad (i=2, 3, \ldots) \tag{4}$$

и, следовательно, если существует $\lim_{i\to\infty} A_i(x)$, то существует и $\lim_{i\to\infty} B_i(x)$, т. е. метод B во всяком случае не слабее метода A. Но, как заметил Mazur [см. ([2]) § 1, теорема 2], из равенств (4) следует равносильность методов A и B. Показывается это следующим образом. Равенства (4) могут быть записаны в виде

$$A_1(x)=B_1(x), \quad A_i(x)=(1-t_{i-1})A_{i-1}(x)-B_{i-1}(x)+B_i(x) \quad (i=2, 3, \ldots),$$

откуда по индукции следует, что

$$A_i(x)=-t_1(1-t_2)(1-t_3)\cdots(1-t_{i-1})B_1(x)-$$
$$-t_2(1-t_3)(1-t_4)\ldots(1-t_{i-1})B_2(x)-\ldots-t_{i-1}B_{i-1}(x)+$$
$$+B_i(x) \quad (i=1, 2, \ldots),$$

т. е. что $A(x)=C(B(x))$, где $C=(c_{ik})$—нормальная матрица, элементы которой

$c_{ik}=0$, если $i<k$, $\quad c_{ii}=1$, $\quad c_{i\,i-1}=-t_{i-1}$,
$c_{ik}=-t_k(1-t_{k+1})(1-t_{k+2})\cdots(1-t_{i-1})$, если $i>k+1$ $(i, k=1, 2, \ldots)$.

Так как $t\in\sigma_1$, то бесконечное произведение $\prod_{i=2}^{\infty}(1-t_i)$ сходится и легко убедиться, что матрица (c_{ik}) удовлетворяет трем необходимым и достаточным условиям консервативности, т. е. что метод C переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся и, следовательно, из существования $\lim_{i\to\infty} B_i(x)$ следует существование $\lim_{i\to\infty} A_i(x)$.

Очевидно, что для любого $x\in A'$,

$$\overline{B}(x)=\overline{A}(x)+tA(x),$$

причем метод B регулярный, так как для всякой сходящейся последовательности $x=(x_k)$ $(x_k\to\xi)$ и для всякого элемента $t\in\sigma_1$ и ортогонального ко всем столбцам матрицы A, $\overline{A}(x)=\xi$, а $tA(x)=(tA)x=0$. Таким образом, теорема доказана.

Пусть $A=(a_{ik})$ — произвольная матрица, у которой $\sup_i |a_{ik}|<\infty$ $(k=1, 2, \ldots)$. Обозначим через A'' множество всех элементов $x\in A'$, для которых $tA(x)=0$ при любом t, принадлежащем σ_1 и ортогональном ко всем столбцам матрицы (a_{ik}), а через A''' — множество всех элементов $x\in A'$, для которых выполняется равенство (3) при всех $t\in\sigma_1$. Ясно, что $A''\supseteq A'''$

Из теоремы 1 следует, что *если A — реверсивный метод Toeplitz'a, то A'' есть максимальное множество, на котором метод A совместен со всеми не более слабыми, чем он, регулярными методами.* Отсюда, в свою очередь, вытекает, что реверсивный метод Toeplitz'a A является совершенным тогда и только тогда, если $A' = A''$.

Можно показать таким же путем, как это сделано у Mazur'a для нормальных методов Toeplitz'a [см. (2), § 2, теоремы 3, 4], что множество всех сходящихся последовательностей преобразуется реверсивным методом Toeplitz'a A в множество, замыкание которого в пространстве (c) имеет в качестве прообраза множество A'' или, другими словами, множество A'' есть замыкание в пространстве A' (напомним, что для элементов x этого пространства вводится норма $|x| = \sup_i |A_i(x)|$) множества всех сходящихся последовательностей.

Возникает вопрос, как по элементам матрицы $A = (a_{ik})$ и элементам последовательности $x \in A'$ судить о том, принадлежит ли x множеству A'' или нет? Мы ограничимся тем, что ответим на этот вопрос, заменив в нем множество A'' множеством A'''.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $A = (a_{ik})$ — какая-нибудь матрица, у которой $\sup_i |a_{ik}| < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Элемент x из A' принадлежит A''' тогда и только тогда, если*

$$\sup_{i,\, n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| < \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем сперва достаточность условия (5). Пусть $x \in A'$, а $t \in \sigma_1$. Нужно показать, что для указанных x и t условие (5) приводит к равенству (3); это и будет означать, что $x \in A'''$. Оценим разность выражений

$$tA(x) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \quad \text{и} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{ik},$$

которые, очевидно, имеют смысл.

Из условия (5) следует, что

$$\sup_{i,\, n} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{ik} x_k \right| = K < \infty.$$

Пусть задана какая-нибудь величина $\varepsilon > 0$. Выберем такое M, чтобы*

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} |t_i| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

---

* Можно считать, что $K \neq 0$, ибо в противном случае $tA(x) - s_n = 0$ и выполнение равенства (3) очевидно.

Имеем

$$|tA(x)-s_n|\leqslant\sum_{i=1}^{M}|t_i|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{ik}x_k\right|+\sum_{i=M+1}^{\infty}|t_i|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{ik}x_k\right|<$$

$$<\sum_{i=1}^{M}|t_i|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{ik}x_k\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбрав теперь такое N, чтобы для всех $n>N$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{ik}x_k\right|<\frac{\varepsilon}{2L}\quad\left(L=\sum_{i=1}^{M}|t_i|\ ^*,\ i=1,2,\ldots,M\right),$$

получим

$$|tA(x)-s_n|<\varepsilon\quad(n\geqslant N),$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}s_n=(tA)x=tA(x);$$

Таким образом, мы пришли к равенству (3) и тем самым достаточность условия (5) доказана.

Докажем теперь необходимость условия (5). Пусть $x=(x_k)\in A'$. Допустим, что $\sup\limits_{i,\,n}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|=\infty$. Тогда можно выполнить следующее построение. Выберем такие n_1 и i_1, чтобы $\left|\sum\limits_{k=1}^{n_1}a_{i_1k}x_k\right|>0$. Положим

$$\sup_i\left|\sum_{k=1}^{n_1}a_{ik}x_k\right|=I_1\quad(I_1>0),\quad\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i_1k}x_k\right|=N_1.$$

Так как $\sup\limits_i|a_{ik}|<\infty$ $(k=1,2,\ldots)$, а $x=(x_k)\in A'$, то I_1, $N_1<\infty$. Считая, что $n_{\nu-1}$, $i_{\nu-1}$ $(\nu>1)$ определены, выберем n_ν и i^ν так, чтобы

$$\left|\sum_{k+1}^{n_\nu}a_{i_\nu k}x_k\right|>\left[\nu+2+N_1+\frac{1}{I_1}N_2+\min\left(\frac{1}{2I_1},\frac{1}{I_2}\right)N_3+\ldots+\right.$$

$$\left.+\min\left(\frac{1}{2^{\nu-3}I_1},\frac{1}{2^{\nu-4}I_2},\ldots,\frac{1}{I_{\nu-2}}\right)\right]N_{\nu-1}\quad\max\left(2^{\nu-2}I_1,2^{\nu-3}I_2,\ldots,I_{\nu-1}\right)$$

и положим

$$\sup_i\left|\sum_{k=1}^{n_\nu}a_{ik}x_k\right|=I_\nu,\quad\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i_\nu k}x_k\right|=N_\nu.$$

Очевидно,

$$I_\nu>0,\quad I_\nu,\ N_\nu<\infty\quad(\nu=1,2,\ldots).$$

После того как мы определили последовательности индексов (n_ν) и (i_ν), построим последовательность $t=(t_i)$ следующим образом. Положим

---

* Можно считать, что для всех достаточно больших M $L\neq0$, ибо если все $t_i=0$, то выполнение равенства (3) очевидно.

$$t_{i \neq i_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots); \quad t_{i_1} = 1,$$
$$t_{i_\nu} = \min\left(\frac{1}{2^{\nu-2} I_1}, \frac{1}{2^{\nu-3} I_2}, \ldots, \frac{1}{I_{\nu-1}}\right) \quad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

Последовательность $t \in \sigma_1$, так как все ее не равные нулю члены положительны и, начиная со второго, не превышают, соответственно, членов прогрессии $\frac{1}{I_1}, \frac{1}{2I_1}, \frac{1}{2^2 I_1}, \ldots$ Покажем, что

$$\lim_{\nu \to \infty} s_{n_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{k=1}^{n_\nu} x_k \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{ik} = \infty$$

и, следовательно, что $(tA)x$, в противоположность $tA(x)$, не имеет смысла для рассматриваемого $x \in A'$. Это будет означать, что x не принадлежит множеству A''' и тем самым необходимость условия (5) будет доказана.

Можно написать

$$s_{n_\nu} = \sum_{k=1}^{n_\nu} x_k \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{ik} = \sum_{i=1}^{i_\nu} t_i \sum_{k=1}^{n_\nu} a_{ik} x_k + \sum_{i=i_\nu+1}^{\infty} t_i \sum_{k=1}^{n_\nu} a_{ik} x_k =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{\nu} t_{i_\mu} \sum_{k=1}^{n_\nu} a_{i_\mu k} x_k + \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} t_{i_\mu} \sum_{k=1}^{n_\nu} a_{i_\mu k} x_k$$

и так как

$$\left| \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} t_{i_\mu} \sum_{k=1}^{n_\nu} a_{i_\mu k} x_k \right| \leqslant I_\nu \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} t_{i_\mu} \leqslant I_\nu \left(\frac{1}{I_\nu} + \frac{1}{2I_\nu} + \frac{1}{2^2 I_\nu} + \ldots \right) = 2,$$

то

$$|s_{n_\nu}| \geqslant t_{i_\nu} \left| \sum_{k=1}^{n_\nu} a_{i_1 k} x_k \right| - t_{i_1} \left| \sum_{k=1}^{n_\nu} a_{i_1 k} x_k \right| - t_{i_2} \left| \sum_{k=1}^{n_\nu} a_{i_2 k} x_k \right| - \ldots -$$
$$- t_{i_{\nu-1}} \left| \sum_{k-1}^{n_\nu} a_{i_{\nu-1} k} x_k \right| - \left| \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} t_{i_\mu} \sum_{k=1}^{n_\nu} a_{i_\mu k} x_k \right| > \nu + 2 + N_1 + \frac{1}{I_1} N_2 +$$
$$+ \min\left(\frac{1}{2I_1}, \frac{1}{I_2}\right) N_3 + \ldots + \min\left(\frac{1}{2^{\nu-3} I_1}, \frac{1}{2^{\nu-4} I_2}, \ldots, \frac{1}{I_{\nu-2}}\right) N_{\nu-1} - N_1 -$$
$$- \frac{1}{I_1} N_2 - \min\left(\frac{1}{2I_1}, I_2\right) N_3 - \ldots - \min\left(\frac{1}{2^{\nu-3} I_1}, \frac{1}{2^{\nu-4} I_2}, \ldots, \frac{1}{I_{\nu-2}}\right) \cdot N_{\nu-1} - 2 =$$
$$= \nu,$$

т. е. действительно $\lim\limits_{\nu \to \infty} s_{n_\nu} = \infty$.

В случае, когда A есть реверсивный метод Toeplitz'а, множество A''' является некоторым множеством (вообще говоря, более широким, чем A_0'), на котором метод A совместен со всеми не более слабыми, чем он, методами Toeplitz'а.

Можно охарактеризовать множество A''' с иной точки зрения и притом для любой матрицы A, у которой все столбцы являются схо-

дящимися последовательностями. Для этого обратимся к некоторым линейным пространствам и их непрерывным отображениям.

Будем рассматривать множества, элементами которых являются последовательности чисел. Назовем суммой последовательностей $x=(x_k)$ и $y=(y_k)$ последовательность $x+y=(x_k+y_k)$, а произведением последовательности $x=(x_k)$ на число r — последовательность $rx=xr=(rx_k)$. Пусть λ — какое-нибудь множество последовательностей, для которых установлены указанные операции сложения и умножения на число. Если λ, вместе с элементом x, содержит элемент rx, а вместе с элементами x и y — их сумму $x+y$, то λ является некоторой линейной системой. Для каждой такой линейной системы λ введем понятие сопряженной линейной системы λ^*, состоящей из всех элементов $u=(u_k)$, для которых $ux=u_1x_1+u_2x_2+\ldots$ есть сходящийся ряд при любом $x\in\lambda$.

Элемент $x\in\lambda$ назовем пределом последовательности элементов $x^{(n)}\in\lambda$ $(n=1, 2, \ldots)$, если для любого $u\in\lambda^*$

$$\lim_{n\to\infty} ux^{(n)}=ux.$$

Установив понятие предела, мы тем самым обратили линейную систему λ в линейное пространство, которое будем называть пространством типа (T). Подобные линейные пространства были рассмотрены, повидимому, впервые в работе Köthe и Toeplitz'a (3), а затем использованы Köthe (4) для исследования систем уравнений с бесконечным числом неизвестных. Следует только отметить, что в работе Köthe и в основной части работы Köthe и Toeplitz'a при определении сопряженного пространства авторы требовали абсолютной сходимости ряда ux.

Можно показать таким же образом, как это сделано в работе Köthe [см. (4), стр. 196], что с помощью некоторой системы окрестностей пространство типа (T) может быть превращено в пространство Hausdorff'a.

Обозначим через e пространство типа (T) всех сходящихся последовательностей, а через φ — пространство типа (T) всех последовательностей, у которых члены отличные от нуля могут встречаться только в конечном числе.

Нетрудно убедиться в том, что $e^*=\sigma_1$. Действительно, во-первых, очевидно, что $e^*\supseteq\sigma_1$, во вторых, если элемент u не принадлежит σ_1, то существует такая последовательность индексов (k_ν), что

$$\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu} |u_k| > \nu^2 \quad (\nu=1, 2, \ldots;\ k_0=0)$$

и, следовательно, для сходящейся к нулю последовательности (x_k), у которой член

$$x_k=\frac{1}{\nu}\operatorname{sign} u_k \quad (k_{\nu-1}+1\leqslant k\leqslant k_\nu;\ \nu=1, 2, \ldots),$$

будем иметь

$$\sum_{k=1}^{k_\nu} u_k x_k > 1+2+\ldots+\nu \quad (\nu=1, 2,\ldots),$$

т. е. получаем, что ux есть расходящийся ряд, а значит u не принадлежит e^*.

Укажем, так же как это сделано в упомянутой работе Köthe и Toeplitz'a, на следующие два обстоятельства. Если в каком-либо пространстве λ типа (T) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}=x$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}=x_k \quad (k=1, 2, \ldots),$$

так как $\delta^{(k)}\in\varphi\subseteq\lambda^*$ $(k=1, 2. \ldots)$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}\,\delta^{(k)}=\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}=\delta^{(k)}x=x_k.$$

Далее, если $\lambda\supset\varphi$, то каждый элемент $x=(x_k)\in\lambda$ есть предел своего усечения $x^{(n)}=(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, ибо, во-первых, $x^{(n)}\in\varphi\subseteq\lambda$ $(n=1, 2, \ldots)$, а, во-вторых, для любого $u\in\lambda^*$ $\lim\limits_{n\to\infty} ux^{(n)}=ux$.

Условимся писать, что матрица $A\in\mu(\lambda)$, если скалярное произведение любого элемента пространства λ на любую строчку матрицы A имеет смысл и если, кроме того, любой элемент пространства λ преобразуется с помощью матрицы A в элемент пространства μ.

Заметим, что если $A\in\mu(\lambda)$, причем $\lambda\supseteq\varphi$, то k-й столбец матрицы A, являясь последовательностью $A(\delta^{(k)})$ $(k=1, 2, \ldots)$, принадлежит μ и, следовательно, в этом случае последовательность vA $(v\in\mu^*)$ имеет смысл.

Будем говорить, что матрица $A\in\mu(\lambda)$ отображает пространство λ непрерывно в пространство μ, если из того, что $x^{(n)}\to x$ в пространстве λ, следует, что $A(x^{(n)})\to A(x)$ в пространстве μ.

ТЕОРЕМА 3. *Отображение пространства $\lambda\supseteq\varphi$ в пространство μ с помощью матрицы $A\in\mu(\lambda)$ непрерывно тогда и только тогда, если для любого $x\in\lambda$ и любого $v\in\mu^*$*

$$vA(x)=(vA)x,$$

т. е. если $(vA)x$ имеет смысл и равно $vA(x)$.

Доказательство. Пусть $x=(x_k)\in\lambda\supseteq\varphi$, $v=(v_i)\in\mu^*$. Положим

$$x^{(n)}=(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Если матрица $A=(a_{ik})\in\mu(\lambda)$ отображает пространство λ непрерывно в пространство μ, то

$$vA(x)=\lim_{n\to\infty} vA(x^{(n)})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} v_i\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k.$$

Так как $x^{(n)}\in\lambda$ при любом $n=1, 2, \ldots,$ то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$ сходится при любом n и, следовательно,

$$vA(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{\infty} v_i a_{ik} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{i=1}^{\infty} v_i a_{ik} = (vA)x,$$

откуда, между прочим, следует, что $vA \in \lambda^*$.

Наоборот, если матрица $A \in \mu(\lambda)$ и $vA(x) = (vA)x$ для любого $x \in \lambda$ и любого $v \in \mu^*$, то $vA \in \lambda^*$ и, следовательно, если $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$ ($x^{(1)}, x^{(1)}, \ldots$ — какая-то последовательность элементов пространства λ, то

$$\lim_{n\to\infty} vA(x^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} (vA)x^{(n)} = (vA)x = vA(x),$$

т. е. получаем, что A непрерывно отображает пространство λ в пространство μ.

Из теоремы 3 следует, что если $A' \supseteq \lambda \supseteq \varphi$, то пространство λ непрерывно отображается матрицей A в пространство e в том и только в том случае, когда для любого $x \in \lambda$ и любого $t \in \sigma_1$ выполняется равенство (3), т. е. когда $\lambda \subseteq A'''$. Но для того чтобы $A' \supseteq \varphi$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы все столбцы матрицы были сходящимися последовательностями, причем если это имеет место, то $\varphi \subseteq A'''$. Соединяя это замечание с предыдущим, приходим к следующему выводу.

Для всякой матрицы A, у которой все столбцы являются сходящимися последовательностями, в частности, для произвольного метода Toeplitz'а A, множество A''' можно охарактеризовать, как максимальное из пространств типа (T), содержащих φ и непрерывно отображаемых матрицей A в пространство e.

Перейдем теперь к совершенным методам суммирования. Известно, что реверсивный метод Toeplitz'а $A = (a_{ik})$ является совершенным тогда и только тогда, если из всех элементов $t \in \sigma_1$, только элемент $t = (0, 0, \ldots)$ ортогонален ко всем столбцам матрицы (a_{ik}). Достаточность этого условия была показана Banach'ом [см. ([1]), стр. 90—95], необходимость — Hill'ом [см. ([5]), стр. 380]. Заметим попутно, что после того как доказана теорема 1, достаточность указанного условия очевидна, а необходимость доказывается в двух словах. Действительно, если реверсивный метод Toeplitz'а $A = (a_{ik})$ совершенный, то, как это следует из равенства (1), для любого $x \in A'$ и любого $t \in \sigma_1$ и ортогонального ко всем столбцам матрицы (a_{ik}), $tA(x) = 0$. Полагая, в частности, $x = \xi^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, получаем $t_m = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Приведенное необходимое и достаточное условие совершенства не позволяет, однако, судить только по элементам матрицы (a_{ik}) о том, совершенен ли метод $A = (a_{ik})$ или нет, ибо вопрос сводится к некоторой проблеме теории уравнений с бесконечным числом неизвестных, которая сама требует решения.

С помощью теоремы 2 легко получить эффективное достаточное условие совершенства реверсивных методов Toeplitz'а.

ТЕОРЕМА 4. *Реверсивный метод Toeplitz'а $A = (a_{ik})$ является совершенным, если для почти всех* соответствующих ему фундаментальных последовательностей $\xi^{(m)}$ выполняется условие*

---

* Т. е. для всех, за исключением, быть может, конечного числа.

$$\sup_{i, n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_k^{(m)} \right| < \infty. \tag{6}$$

Доказательство. Если почти все фундаментальные последовательности $\xi^{(m)}$, соответствующие реверсивному методу Toeplitz'a $A = (a_{ik})$, удовлетворяют условию (6) и если элемент $t \in \sigma_1$ ортогонален ко всем столбцам матрицы (a_{ik}), то, как это следует из теоремы 2, для почти всех индексов m справедливо равенство

$$tA(\xi^{(m)}) = t_m = (tA)\,\xi^{(m)} = 0.$$

Но тогда $t_m = 0$ для всех индексов m, ибо последовательность $t = (t_i)$, у которой, кроме конечного числа членов $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_\nu}$, не равных нулю, все остальные члены равны нулю, не может быть ортогональной ко всем столбцам матрицы (a_{ik}) реверсивного метода A. Действительно, предполагая противное, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{\nu} t_{i_j} a_{i_j k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Но тогда для любого $x = (x_k) \in A'$ получаем

$$\sum_{j=1}^{\nu} t_{i_j} A_{i_j}(x) = \sum_{j=1}^{\nu} t_{i_j} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i_j k} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{j=1}^{\nu} t_{i_j} a_{i_j k} = 0,$$

что невозможно, так как для всякого реверсивного метода A всегда найдется такая последовательность $x = (x_k) \in A'$, для которой любое конечное число величин $A_i(x)$ с произвольно выбранными индексами i принимают любые наперед заданные значения.

Таким образом, если условие теоремы выполнено, то из всех элементов t, принадлежащих σ_1, только элемент $t = (0, 0, \ldots)$ ортогонален ко всем столбцам матрицы (a_{ik}), следовательно (см. стр. 12), метод $A = (a_{ik})$ — совершенный.

Как частный случай этой теоремы, получаем следующий результат: *если для реверсивного метода Toeplitz'a A почти все соответствующие ему фундаментальные последовательности $\xi^{(m)}$ ограничены, то метод A — совершенный.*

Для нормальных методов этот результат был получен Mazur'ом [(6), стр. 607].

Основываясь на теореме 4, нетрудно построить совершенный метод суммирования, у которого среди всех соответствующих ему фундаментальных последовательностей $\xi^{(m)}$ имеется *счетное множество неограниченных.*

В качестве простейшего примера одного из таких методов приведем метод, заданный матрицей

$$(a_{ik}) = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & \varepsilon_1 & & & & & \\ \varepsilon'_1 & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & \varepsilon_2 & & & \\ & & \varepsilon'_2 & 0 & 1 & & \\ & & & & \cdot\ \cdot & & \\ & & & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ & & & & & \cdot\ \cdot & \\ & & & & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & & & & & & \cdot\ \cdot \\ & & & & & & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{Vmatrix},$$

т. е. нормальной матрицей, у которой только следующие элементы отличны от нуля:

$$a_{2k-1,\,2k-1} = a_{2k,\,2k-1} = 1, \quad a_{2k+1,\,2k-1} = \varepsilon'_k, \quad a_{2k,\,2k} = \varepsilon_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots),$$

причем величины ε_n, ε'_n, кроме того, что все они $\neq 0$, подчинены условиям

$$\varepsilon_n,\ \varepsilon'_n \to 0, \quad \frac{\varepsilon'_1\varepsilon'_2\cdots\varepsilon'_{n-1}}{\varepsilon_n} \to \infty.$$

Приведенный метод есть, очевидно, метод Toeplitz'a.

Рассмотрим соответствующие ему фундаментальные последовательности $\xi^{(m)} = (\xi_k^{(m)})$. Ясно, что если m четное $(m = 2\mu)$, то все члены последовательности $\xi^{(m)}$ равны нулю, за исключением члена $\xi_m^{(m)} = \frac{1}{\varepsilon_\mu}$, так что все такие $\xi^{(m)}$ удовлетворяют условию (6). Если же m нечетное $(m = 2\mu - 1)$, то последовательность $\xi^{(m)}$ неограниченная, так как для любого $\varkappa > \mu$ имеем

$$\xi_{2\varkappa}^{(2\mu-1)} = (-1)^{\varkappa-\mu+1}\,\frac{\varepsilon'_\mu\varepsilon'_{\mu+1}\cdots\varepsilon'_{\varkappa-1}}{\varepsilon_\varkappa}.$$

Но каждая из последовательностей $\xi^{(m)} = \xi^{(2\mu-1)}$ удовлетворяет условию (6), ибо если $n \geqslant i$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_k^{(2\mu-1)} = 1 \quad \text{или} \quad 0,$$

а если $n < i$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_k^{(2\mu-1)} = (0,\ 1,\ \varepsilon'_\varkappa)\,\xi_{2\varkappa-1}^{(2\mu-1)}\ * \qquad (\varkappa \geqslant \mu),$$

т. е. в этом случае величина $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_k^{(2\mu-1)}$ может принимать только следующие значения: 0, 1, ε'_μ, $(1, \varepsilon'_\varkappa)(-1)^{\varkappa-\mu}\varepsilon'_\mu\varepsilon'_{\mu+1}\ldots\varepsilon'_{\varkappa-1}$ $(\varkappa > \mu)$, так как $\xi_{2\mu-1}^{(2\mu-1)} = 1$, а

$$\xi_{2\varkappa-1}^{(2\mu-1)} = (-1)^{\varkappa-\mu}\,\varepsilon'_\mu\varepsilon'_{\mu+1}\ldots\varepsilon'_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa > \mu).$$

* Такая запись означает, что в правой части равенства может стоять любая из величин 0, 1, $\varepsilon'_\varkappa$, умноженная на $\xi_{2\varkappa-1}^{(2\mu-1)}$.

Укажем, далее, что с помощью теоремы 2 можно легко строить совершенные методы A, для которых $A' = A'' \neq A'''$, и обнаружить существование таких совершенных методов A, для которых $A' = A'' = A'''$.

Простейшим примером совершенного метода, для которого $A' = A'' \neq A'''$, может служить метод Toeplitz'а, заданный нормальной матрицей $A = (a_{ik})$, у которой только следующие элементы отличны от нуля:

$$a_{11} = 1; \quad a_{n\, n-1} = a_{nn} = \frac{1}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Этот метод — совершенный, хотя бы потому, что все соответствующие ему последовательности $\xi^{(m)}$ ограничены. Кроме того, последовательность

$$(x_k) = 1, \ -1, \ 1 + \frac{1}{2}, \ -1 - \frac{1}{2}, \ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ldots$$

суммируется этим методом к нулю и потому принадлежит A', но эта же последовательность (x_k) не принадлежит A''', так как

$$\left| \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k \right| = \frac{1}{2} |x_{i-1}| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

и, следовательно, условие (5) не выполняется.

Что касается совершенных методов A, для которых $A' = A'' = A'''$, то таковыми являются методы Riesz'а, определяющие предел последовательности (x_k) как

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_k x_k,$$

где $\Delta_k = p_k - p_{k-1}$, $p_0 = 0$, $p_1 < p_2 < \ldots$, $p_i \to \infty$.
Действительно, если матрицу, соответствующую методу Riesz'а обозначить через $A = (a_{ik})$, то будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_k x_k = A_i(x) \quad (i \leqslant n)$$

и

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| = \left| \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{n} \Delta_k x_k \right| = \left| \frac{p_n}{p_i} A_n(x) \right| < |A_n(x)| \quad (i > n).$$

Таким образом, для любого $x \in A'$,

$$\sup_{i,n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \leqslant \sup_i |A_i(x)| < \infty,$$

т. е., как это следует из теоремы 2, $A' = A'''$.

Перейдем теперь к вопросу об ограниченной совместности методов Toeplitz'а. Докажем несколько простых лемм.

ЛЕММА 1. *Методы Toeplitz'а $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ совместны тогда и только тогда, когда система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots, \\ cy_2 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots, \\ y_3 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots, \\ cy_4 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

не имеет решения, если одновременно $c \neq 1$, а $y=(y_i)$ есть сходящаяся последовательность с пределом $\neq 0$.

Доказательство. Пусть методы $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ совместны. Если существует некоторое $c=c' \neq 1$ и некоторая последовательность $y=y'=(y'_i)$, сходящаяся к величине $\eta \neq 0$, при которых система (7) имеет решение $x=x'=(x'_k)$, то $\overline{A}(x')=\eta \neq \overline{B}(x')=c'\eta$, что противоречит совместности методов A и B и, следовательно, условие леммы является необходимым. Предположим теперь, что для методов Toeplitz'а $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ условие леммы выполнено. Если методы A и B несовместны, то существует последовательность $x'=(x'_k)$ такая, что $\overline{A}(x')= =a \neq \overline{B}(x')=b$. Можно считать, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$, ибо в противном случае можно говорить не о последовательности $x'=(x'_k)$, а о последовательности $x''=(x'_k+a+b)$, для которой $\overline{A}(x'')=2a+b \neq 0$, $B(x'')= =2b+a \neq 0$, поскольку предполагается, что одна и только одна из величин a, b равна нулю. Но если $\overline{A}(x')=a \neq 0$, $B(x')=b \neq 0$ и $a \neq b$, то последовательность x' является решением системы (7), когда $c=\frac{b}{a} \neq 1$, а $y=y'=(y'_i)$, где $y'_{2i-1}=A_i(x')$, $y'_{2i}=\frac{a}{b}B_i(x')$ $(i=1, 2, \ldots)$. Так как $y'_i \to a \neq 0$, то мы пришли к противоречию с условием леммы и тем самым достаточность этого условия доказана.

Совершенно ясно, что таким же путем, каким была доказана лемма 1, может быть доказана

ЛЕММА 2. *Методы Toeplitz'а $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ ограниченно совместны тогда и только тогда, когда система уравнений (7) не имеет ограниченного решения, если одновременно $c \neq 1$, а $y=(y_i)$ есть сходящаяся последовательность с пределом $\neq 0$.*

ЛЕММА 3. *Пусть матричный метод $A=(a_{ik})$ такой, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < \infty \quad (i=1, 2, \ldots). \qquad (8)$$

Какова бы ни была монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел (n_i) $(n_{i+1} \geqslant n_i,\ i=1, 2, \ldots)$ и какова бы ни была последовательность (ε_i), сходящаяся к нулю, всегда можно указать метод $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$, ограниченно эквивалентный методу A и удовлетворяющий условиям

$$\alpha_{in_i}=\varepsilon_i, \quad \alpha_{ik}=0, \text{ если } k > n_i \ (i=1, 2, \ldots). \qquad (9)$$

Доказательство. Если метод $A=(a_{ik})$ удовлетворяет условию (8), то можно образовать такую последовательность (k_i) $(k_1>n_1,\ k_{i+1}>k_i,\ i=1, 2, \ldots)$, чтобы

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{k=k_i}^{\infty}|a_{ik}|=0 \tag{10}$$

и чтобы каждые два соседних члена последовательности (k_i) были разделены по крайней мере одним членом последовательности (n_i). Пусть такая последовательность (k_i) образована и пусть

$$n_{\nu_i}\leqslant k_i<n_{\nu_i+1} \quad (i=2,\ 3,\ \ldots).$$

Строим группу строчек матрицы (α_{ik}) с номерами $1, 2, \ldots, \nu_1$, выбирая произвольно элементы α_{ik} $(k<n_i,\ 1\leqslant i\leqslant\nu_1)$ и полагая $\alpha_{in_i}=\varepsilon_i$ $(1\leqslant i\leqslant\nu_1)$, $\alpha_{ik}=0$ $(k>n_i,\ 1\leqslant i\leqslant\nu_1)$. Затем, строим группу строчек матрицы (α_{ik}) с номерами $\nu_1+1,\ \nu_1+2, \ldots, \nu_2$, полагая

$$\alpha_{ik}=a_{1k}(k<k_1,\ \nu_1+1\leqslant i\leqslant\nu_2),\quad \alpha_{ik}=0\ (k_1\leqslant k<n_i,\ \nu_1+1\leqslant i\leqslant\nu_2),$$
$$\alpha_{in_i}=\varepsilon_i\ (\nu_1+1\leqslant i\leqslant\nu_2),\quad \alpha_{ik}=0\ (k>n_i,\ \nu_1+1\leqslant i\leqslant\nu_2).$$

Далее, строим группу строчек матрицы (α_{ik}) с номерами $\nu_2+1,\ \nu_2+2, \ldots, \nu_3$, полагая

$$\alpha_{ik}=a_{2k}\,(k<k_2,\ \nu_2+1\leqslant i\leqslant\nu_3),\quad \alpha_{ik}=0\ (k_2\leqslant k<n_i,\ \nu_2+1\leqslant i\leqslant\nu_3),$$
$$\alpha_{in_i}=\varepsilon_i\ (\nu_2+1\leqslant i\leqslant\nu_3),\quad \alpha_{ik}=0\ (k>n_i,\ \nu_2+1\leqslant i\leqslant\nu_3).$$

Ясно, что, продолжая указанный процесс до бесконечности, мы построим тем самым метод $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$, который будет ограниченно эквивалентен методу $A=(a_{ik})$ и будет удовлетворять условиям (9).

Приступая к выводу некоторых эффективных условий ограниченной совместности методов Toeplitz'а $A=(\alpha_{ik})$, $B=(b_{ik})$, будем считать, что эти методы заменены какими-нибудь ограниченно эквивалентными им методами $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$, $\mathfrak{B}=(\beta_{ik})$, удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned}&\alpha_{i,2i-1}\neq 0,\ \alpha_{ik}=0,\ \text{если}\ k>2i-1,\\ &\beta_{i,2i}\quad\neq 0,\ \beta_{ik}=0,\ \text{если}\ k>2i.\end{aligned}\qquad (i=1,\ 2, \ldots)$$

В силу леммы 3 это всегда выполнимо.

Если для указанных методов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ составить систему уравнений, аналогичную системе (7), то матрица, образованная коэффициентами при величинах x_k, будет нормальной. Эту нормальную матрицу

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & & & \\ \beta_{11} & \beta_{12} & & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

обозначим через Δ_{AB}. Так как выбор методов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ весьма разнообразен, то можно говорить о различных матрицах Δ_{AB}.

ЛЕММА 4. *Если методы Teoplitz'a $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ ограниченно совместны, то для любой матрицы Δ_{AB} существует такая подпоследовательность (k_ν) натуральных чисел k, что*

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{i=1}^{k_\nu}|\xi^{(i)}_{k_\nu}|=\infty,\qquad \sum_{i<k_\nu}{}'|\xi^{(i)}_{k_\nu}|\neq 0,\qquad \sum_{i\leq k_\nu}{}''|\xi^{(i)}_{k_\nu}|\neq 0\quad (\nu=1,\,2,\,\ldots)\tag{11}$$

($\xi^{(i)}=(\xi^{(i)}_k)$—фундаментальные последовательности, соответствующие матрице Δ_{AB}; $\sum\limits_{i\leq k_\nu}{}'$, $\sum\limits_{i\leq k_\nu}{}''$ означают суммы, взятые, соответственно, по всем нечетным и по всем четным индексам i в интервале между 1 и k_ν).

Доказательство. Пусть методы Toeplitz'a $A=(a_{ik})$, $B=(b_{ik})$ ограниченно совместны и пусть c, y_1, y_2, ... — какие-нибудь величины. Напишем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\alpha_{11}x_1,\\ cy_2&=\beta_{11}x_1+\beta_{12}x_2,\\ y_3&=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3,\\ cy_4&=\beta_{21}x_1+\beta_{22}x_2+\beta_{23}x_3+\beta_{24}x_4,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\tag{12}$$

соответствующую какой-нибудь матрице Δ_{AB}.

Решая систему (12) относительно величин $x_1, x_2, \ldots,$ получаем *

$$x_k=\sum_{i\leq k}{}'\xi^{(i)}_k y_i+c\sum_{i\leq k}{}''\xi^{(i)}_k y_i\qquad (k=1,\,2,\,\ldots).\tag{13}$$

Так как матрица Δ_{AB} регулярная, то, взяв за последовательность (x_k) некоторую сходящуюся последовательность (x'_k) с пределом $\neq 0$, получим, в качестве соответствующего решения системы (13) при $c=1$, некоторую последовательность (y'_i), сходящуюся к величине $\neq 0$.

Обозначим через Q множество всех значений k, при которых ни одна из величин $\sum\limits_{i\leq k}{}'|\xi^{(i)}_k|$, $\sum\limits_{i\leq k}{}''|\xi^{(i)}_k|$ не равна нулю.

---

* Если преобразование $y=\Lambda(x)$ осуществляется с помощью нормальной матрицы $\Lambda=(\lambda_{ik})$, то матрица $\bar\Lambda=(\bar\lambda_{ki})$, соответствующая обратному преобразованию, будет, очевидно, также нормальной. Полагая в обратном преобразовании $x=\bar\Lambda(y)$, $y=\delta^{(m)}=(\delta^{(m)}_i)$, $x=\xi^{(m)}=(\xi^{(m)}_k)$, $(\delta^{(m)}_m=1,\ \delta^{(m)}_{i\neq m}=0,\ \xi^{(m)}$ — фундаментальные последовательности, соответствующие матрице Λ), получаем известные равенства $\bar\lambda_{km}=\xi^{(m)}_k$ и, следовательно,

$$x_k=\xi^{(1)}_k y_1+\xi^{(2)}_k y_2+\ldots+\xi^{(k)}_k y_k\qquad (k=1,\,2,\,\ldots).$$

На этом основании написаны равенства (13).

Если допустить, что множество Q пустое, или что Q не пусто, но

$$\sup_{k \in Q} \sum_{i=1}^{k} |\xi_k^{(i)}| < \infty,$$

то величины

$$x'_k(c) = \sum_{i<k}{}' \xi_k^{(i)} y'_i + c \sum_{i\leqslant k}{}'' \xi_k^{(i)} y'_i \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

образуют при любом c ограниченную последовательность, ибо для всех $k \notin Q$ по крайней мере одна из величин $\sum'_{i\leqslant k} |\xi_k^{(i)}|$, $\sum''_{i<k} |\xi_k^{(i)}|$ равна нулю и, следовательно, $x_k(c)$ равно либо x'_k, либо cx'_k. Другими словами, мы приходим к выводу, что при любом c и некоторой сходящейся последовательности (y'_i) с пределом, отличным от нуля, система (12) имеет ограниченное решение $(x'_k(c))$, что противоречит, согласно лемме 2, ограниченной совместности методов $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$ и $\mathfrak{B} = (\beta_{ik})$ (методы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ ограниченно совместны одновременно с методами A и B).

Итак, Q не пустое множество и

$$\sup_{k \in Q} \sum_{i=1}^{k} |\xi_k^{(i)}| = \infty,$$

откуда следует существование такой последовательности (k_ν), для которой выполняются условия (1').

ТЕОРЕМА 5. *Методы Toeplitz'а A и B будут ограниченно совместны, если для какой-нибудь матрицы Δ_{AB} существует такая подпоследовательность (k_ν) натуральных чисел k, что кроме условий* (11) *выполняются еще условия*

$$\begin{gathered}
\lim_{\nu\to\infty} \frac{\left|\sum'_{i<k_\nu} \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum'_{i\leqslant k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} > 0, \qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\left|\sum''_{i\leqslant k_\nu} \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum''_{i<k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} > 0, \\
\lim_{\nu\to\infty} \frac{\left|\sum_{i=1}^{k_\nu} \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} = 0, \qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\xi_{k_\nu}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).
\end{gathered} \tag{14}$$

Доказательство. Пусть условия теоремы [т. е. условия (11), (14)] выполнены. В таком случае имеем

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\left|\sum'_{i<k_\nu} \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(\nu)}|} = \gamma > 0. \tag{15}$$

Действительно, предположим противное. Тогда можно выделить из последовательности (k_ν) такую подпоследовательность (k_{ν_μ}), что

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\left|\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}' \xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_{\nu_\mu}} |\xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}|} = 0. \tag{16}$$

Так как условия (11), (14) не нарушаются при замене последовательности (k_ν) последовательностью (k_{ν_μ}), то, в частности, имеем

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\left|\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}' \xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}' |\xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}|} > 0. \tag{17}$$

Из условий (16), (17) следует, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\left|\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}' \xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}'' |\xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}|} = 0, \tag{18}$$

а из формул (17), (18) получаем

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}' |\xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}|}{\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}'' |\xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}|} = 0. \tag{19}$$

Далее, из второго условия (14) имеем

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\left|\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}'' \xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}'' |\xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}|} = \delta > 0$$

и, следовательно, для достаточно больших μ

$$\sum_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}'' |\xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}| < \frac{2}{\delta}\left|\sum_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}'' \xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}\right|. \tag{20}$$

Положим

$$\frac{\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}' \xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}}{\sum\limits_{i=1}^{k_{\nu_\mu}} |\xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}|} + \frac{\sum\limits_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}'' \xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}}{\sum\limits_{i=1}^{k_{\nu_\mu}} |\xi_{k_{\nu_\mu}}^{(i)}|} = \varepsilon_\mu \tag{21}$$

и заметим, что, в силу третьего условия (14), $\varepsilon_\mu \to 0$.

Используя формулы (19), (20), (21), получаем для достаточно больших μ

$$\frac{\left|\sum\limits''_{i\leqslant k_{\nu_\mu}} \xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right|}{\sum\limits'_{i<k_{\nu_\mu}}\left|\xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right|} < \frac{\left|\sum\limits'_{i\leqslant k_{\nu_\mu}} \xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right| + \sum\limits''_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}\left|\xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right|}{\sum\limits''_{i<k_{\nu_\mu}}\left|\xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right| + \sum\limits'_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}\left|\xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right|} <$$

$$< \left(1+\frac{2}{\delta}\right)\frac{\left|\sum\limits'_{i\leqslant k_{\nu_\mu}} \xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_{\nu_\mu}}\left|\xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right|} \leqslant \left(1+\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{\sum\limits'_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}\left|\xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_{\nu_\mu}}\left|\xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right|} + |\varepsilon_\mu|\right).$$

Принимая теперь во внимание равенство (16) и то, что $\varepsilon_\mu \to 0$, получаем

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{\left|\sum\limits''_{i\leqslant k_{\nu_\mu}} \xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right|}{\sum\limits''_{i\leqslant k_{\nu_\mu}}\left|\xi^{(i)}_{k_{\nu_\mu}}\right|} = 0,$$

что противоречит второму условию (14).

Итак, если условия теоремы выполнены, то имеет место неравенство (15).

Обратимся теперь к равенствам (13).

Пусть $y_i \to \eta \neq 0$ и пусть N — некоторое натуральное число. Положим $y_i - \eta = \varepsilon_i$, $\sup\limits_i |\varepsilon_i| = M$ и перепишем равенства (13) с номерами $k > N$ следующим образом:

$$x_k = \sum_{i\leqslant N}{}' \xi^{(i)}_k \varepsilon_i + c\sum_{i\leqslant N}{}'' \xi^{(i)}_k \varepsilon_i + \sum_{N<i\leqslant k}{}' \xi^{(i)}_k \varepsilon_i + c\sum_{N<i\leqslant k}{}'' \xi^{(i)}_k \varepsilon_i +$$

$$+ \eta c \sum_{i=1}^{k} \xi^{(i)}_k + \eta(1-c)\sum_{i\leqslant k}{}'' \xi^{(i)}_k \qquad (k = N+1,\ N+2,\ \ldots).$$

Из этих равенств получаем

$$|x_k| \geqslant |\eta|\,|1-c|\left|\sum_{i\leqslant k}{}' \xi^{(i)}_k\right| - M\max(1, |c|)\sum_{i=1}^{N}|\xi^{(i)}_k| -$$

$$-\sup_{i>N}|\varepsilon_i|\max(1,|c|)\sum_{i=1}^{k}|\xi^{(i)}_k| - |\eta c|\left|\sum_{i=1}^{k}\xi^{(i)}_k\right| \qquad (k = N+1, N+2, \ldots).$$

В частности, будем иметь

$$|x_{k_\nu}| \geqslant \left(|\eta|\,|1-c|\frac{\left|\sum\limits'_{i\leqslant k_\nu}\xi^{(i)}_{k_\nu}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu}|\xi^{(i)}_{k_\nu}|} - M\max(1,|c|)\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}|\xi^{(i)}_{k_\nu}|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu}|\xi^{(i)}_{k_\nu}|} - \right.$$

$$\left. -\sup_{i>N}|\varepsilon_i|\cdot\max(1,|c|) - |\eta c|\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{k_\nu}\xi^{(i)}_{k_\nu}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu}|\xi^{(i)}_{k_\nu}|}\right)\sum_{i=1}^{k_\nu}|\xi^{(i)}_{k_\nu}| \quad (k_\nu > N). \qquad (22)$$

Считая теперь, что для произвольных, но фиксированных (y_i) $(y_i \to \eta \neq 0)$ и $c \neq 1$, величина N выбрана так, чтобы

$$\sup_{i>N} |\varepsilon_i| \max(1, |c|) \leqslant \frac{\gamma}{12} |\eta| |1-c|,$$

выберем такое $K > N$, чтобы для всех $k_\nu > K$ выполнялись, согласно условию (15) и двум последним условиям (14), неравенства

$$\frac{\left|\sum\limits_{i \leqslant k_\nu}' \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} > \frac{\gamma}{2}, \quad |c| \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} < \frac{\gamma}{12} |1-c|,$$

$$M \max(1, |c|) \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} < \frac{\gamma}{12} |\eta| |1-c|.$$

Тогда из неравенств (22) получаем

$$|x_{k_\nu}| > \frac{\gamma}{4} \eta | |1-c| \sum_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}| \quad (k_\nu > K),$$

и так как $\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}| \to \infty$, то (x_{k_ν}), а следовательно, и (x_k) являются неограниченными последовательностями. Таким образом, мы получили следующий результат: если условия теоремы выполнены, то для любой сходящейся последовательности (y_i) с пределом $\eta \neq 0$ при любом $c \neq 1$ решение (x_k) системы (12) есть неограниченная последовательность, чем, в силу леммы 2, теорема и доказана.

Условия (11), (14), несмотря на их кажущуюся громоздкость, могут быть широко использованы для построения ограниченно совместных методов Toeplitz'a.

Ниже будут построены, с помощью указанных условий, такие два ограниченно совместные метода Toeplitz'a A и B, что $A_0' B_0' \neq A_0'$, $A_0' B_0' \neq B_0'$, $A_0' B_0'$ содержит расходящиеся последовательности. Тем самым будет показано, что для такого рода методов Toeplitz'a условия (11), (14) могут быть реализованы*.

---

* Не представляет труда убедиться в том, что условия (11), (14) могут быть реализованы для ограниченно эквивалентных методов Toeplitz'a A и B, а также для ограниченно совместных методов Toeplitz'a A и B, таких, что $A_0' \supset B_0'$. В самом деле, легко проверить, что условия (11), (14) будут удовлетворены для ограниченно эквивалентных методов Toeplitz'a A и B, которые определяются матрицами, образующимися из матрицы метода средних арифметических вычеркиванием, соответственно, ее четных и нечетных строк. Легко также убедиться в выполнении условий (11), (14) для следующих методов Toeplitz'a A и B таких, что $A_0' \supset B_0'$. Метод A определяется так же, как и в предыдущем примере. Что же касается метода $B = (b_{ik})$, то все его неравные нулю элементы таковы:

$$b_{i,2i-1} = b_{i,2i} = \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $\Delta = (\Delta_{ik})$ — некоторая нормальная матрица, а $\xi^{(i)} = (\xi_k^{(i)})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — соответствующие ей фундаментальные последовательности.

Подставляя в равенства

$$y_i = \sum_{k=1}^{i} \Delta_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{23}$$

вместо последовательностей $y = (y_i)$, $x = (x_k)$, соответственно, последовательности $\delta^{(i)}$, $\xi^{(i)}$, с каким-нибудь фиксированным индексом i и определяя, затем, элементы последовательности $\xi^{(i)}$, без труда получим

$$\xi_k^{(i)} = 0, \text{ если } k < i,$$

$$\xi_i^{(i)} = \frac{1}{\Delta_{ii}}, \ \xi_k^{(i)} = (-1)^{k-i} \frac{\begin{vmatrix} \Delta_{i+1,i} & \Delta_{i+1,i+1} & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \Delta_{i+2,i} & \Delta_{i+2,i+1} & \Delta_{i+2,i+2} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{k-1,i} & \Delta_{k-1,i+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \Delta_{k-1,k-1} \\ \Delta_{ki} & \Delta_{k,i+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \Delta_{k,k-1} \end{vmatrix}}{\Delta_{ii} \Delta_{i+1,i+1} \cdots \Delta_{kk}}, \text{ если } k > i. \tag{24}$$

Как мы уже указывали (см. сноску на стр. 18), преобразование, обратное преобразованию (23), будет

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_k^{(i)} y_i \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{25}$$

причем это преобразование, так же как и преобразование (23), будет осуществляться с помощью нормальной матрицы. Далее, по отношению к преобразованию (25) обратным будет преобразование (23). Отсюда следует, что столбцы любой нормальной матрицы являются фундаментальными последовательностями для обратной ей матрицы.

Рассматривая преобразование (25), как исходное, а преобразование (23), как обратное предыдущему, получаем вместо равенств (24) следующие:

$$\Delta_{kk} = \frac{1}{\xi_k^{(k)}}, \quad \Delta_{ik} = (-1)^{i-k} \frac{\begin{vmatrix} \xi_{k+1}^{(k)} & \xi_{k+1}^{(k+1)} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \xi_{k+2}^{(k)} & \xi_{k+2}^{(k+1)} & \xi_{k+2}^{(k+2)} & 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{i-1}^{(k)} & \xi_{i-1}^{(k+1)} & \ldots & \ldots & \xi_{i-1}^{(i-1)} \\ \xi_i^{(k)} & \xi_i^{(k+1)} & \ldots & \ldots & \xi_i^{(i-1)} \end{vmatrix}}{\xi_k^{(k)} \xi_{k+1}^{(k+1)} \ldots \xi_i^{(i)}}, \text{ если } i > k. \tag{26}$$

Итак, если задаться последовательностями $\xi^{(i)} = (\xi_k^{(i)})$ $(i = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющими условиям: $\xi_i^{(i)} \neq 0$, $\xi_{k<i}^{(i)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, а в остальном — произвольными, и построить по формулам (26) нормальную матрицу $\Delta = (\Delta_{ik})$, то для такой матрицы последовательности $\xi^{(i)}$ будут фундаментальными.

Построение вышеуказанных методов A и B будет состоять в следующем. Мы зададимся такими последовательностями $\xi^{(i)} = (\xi_k^{(i)})$, кото-

рые, во-первых, удовлетворяют условиям (11), (14), а во-вторых, являются фундаментальными последовательностями для некоторой нормальной матрицы Toeplitz'a Δ. Метод A будет определяться с помощью матрицы, в которую обратится Δ, если вычеркнуть все ее четные строки. Вычеркивая в матрице Δ все ее нечетные строки, мы получим матрицу, с помощью которой определим метод B. Для таких методов A и B матрица Δ будет являться матрицей Δ_{AB} и так как соответствующие ей фундаментальные последовательности $\xi^{(i)}$ удовлетворяют условиям (11), (14), то, в силу теоремы 5, методы A и B будут ограниченно совместны. Нам надо будет только озаботиться при выборе последовательностей $\xi^{(i)}$, чтобы методы A и B обладали остальными, указанными выше свойствами.

Приступим к выбору последовательностей $\xi^{(i)}$. Прежде всего положим

$$\left.\begin{aligned} &\xi_k^{(i)}=0, \text{ если } k<i, \quad \xi_i^{(i)}\neq 0, \quad \xi_{i+1}^{(i)}\neq 0, \\ &\xi_k^{(i)}=0, \text{ если } k>i+1 \quad (i=1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Для таких последовательностей $\xi^{(i)}=(\xi_k^{(i)})$ формулы (26) обратятся в следующие:

$$\Delta_{kk}=\frac{1}{\xi_k^{(k)}}, \quad \Delta_{ik}=\frac{(-1)^{i-k}}{\xi_k^{(k)}}\,\frac{\xi_{k+1}^{(k)}\,\xi_{k+2}^{(k+1)}\ldots\xi_i^{(i-1)}}{\xi_{k+1}^{(k+1)}\,\xi_{k+2}^{(k+2)}\ldots\xi_i^{(i)}} \quad (i>k). \tag{28}$$

Таким образом, последовательности $\xi^{(i)}$, выбранные согласно условиям (27), являются фундаментальными последовательностями для нормальной матрицы $\Delta=(\Delta_{ik})$, элементы которой определяются формулами (28).

Далее, для последовательностей $\xi^{(i)}$ указанного вида первое условие (11) и третье условие (14) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\nu\to\infty}\left(|\xi_{k_\nu}^{(k_\nu-1)}|+|\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)}|\right)=\infty, \\ &\lim_{\nu\to\infty}\frac{|\xi_{k_\nu}^{(k_\nu-1)}|+|\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)}|}{|\xi_{k_\nu}^{(k_\nu-1)}|+|\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)}|}=0. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Что касается остальных условий (11), (14), то они будут автоматически удовлетворены, какова бы ни была последовательность индексов (k_ν) $(k_\nu>1)$. В самом деле, из условий (27) получаем, что либо

$$\sum_{i\leqslant k}{}'\xi_k^{(i)}=\xi_k^{(k-1)}, \quad \sum_{i\leqslant k}{}'|\xi_k^{(i)}|=|\xi_k^{(k-1)},$$
$$\sum_{i\leqslant k}{}''\xi_k^{(i)}=\xi_k^{(k)}, \quad \sum_{i<k}{}''|\xi_k^{(i)}|=|\xi_k^{(k)}|,$$

либо, наоборот,

$$\sum_{i\leqslant k}{}'\xi_k^{(i)}=\xi_k^{(k)}, \quad \sum_{i\leqslant k}{}'|\xi_k^{(i)}|=|\xi_k^{(k)},$$
$$\sum_{i\leqslant k}{}''\xi_k^{(i)}=\xi_k^{(k-1)}, \quad \sum_{i<k}{}''|\xi_k^{(i)}|=|\xi_k^{(k-1)}|$$

и, следовательно,

$$\sum_{i<k}{}'|\xi_k^{(i)}| \neq 0, \quad \sum_{i\leq k}{}''|\xi_k^{(i)}| \neq 0 \quad (k=2, 3, \ldots), \tag{30}$$

$$\frac{\left|\sum\limits_{i<k}{}'\xi_k^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i\leq k}{}'\left|\xi_k^{(i)}\right|} = \frac{\left|\sum\limits_{i\leq k}{}''\xi_k^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i\leq k}{}''\left|\xi_k^{(i)}\right|} = 1 \quad (k=2, 3, \ldots). \tag{31}$$

Кроме того, из тех же условий (27) имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\xi_k^{(i)}}{\sum\limits_{i\leq k}^{k}\left|\xi_k^{(i)}\right|} = 0 \quad (i=1, 2, \ldots). \tag{32}$$

Формулы (30), (31) и (32) оправдывают наше утверждение, т. е. показывают, что при любой последовательности индексов (k_ν) $(k_\nu > 1)$ второе и третье условия (11) и первые два и последнее условия (14) удовлетворены.

Положим

$$\frac{\xi_i^{(i-1)}}{\xi_i^{(i)}} = -\lambda_i \quad (i=2, 3, \ldots).$$

Тогда равенства (28) обратятся в следующие:

$$\Delta_{kk} = \frac{1}{\xi_k^{(k)}}, \quad \Delta_{ik} = \Delta_{kk}\,\lambda_{k+1}\,\lambda_{k+2}\ldots\lambda_i \quad (i>k, \ k=1, 2, \ldots). \tag{33}$$

В дальнейшем мы зададимся величинами $\Delta_{kk} \neq 0$, $\lambda_{k+1} \neq 0$ $(k=1, 2, \ldots)$ и тем самым будут заданы величины $\xi_i^{(i)} \neq 0$, $\xi_{i+1}^{(i)} \neq 0$ $(i=1, 2, \ldots)$.

Условия (29) будут удовлетворены, если для какой-нибудь последовательности индексов (k_ν)

$$\lim_{\nu\to\infty}|\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)}| = \infty, \qquad \lim_{\nu\to\infty}\frac{\xi_{k_\nu}^{(k_\nu-1)}}{\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)}} = -1$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\nu\to\infty}\Delta_{k_\nu k_\nu} = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty}\lambda_{k_\nu} = 1. \tag{34}$$

Мы примем все величины Δ_{kk}, λ_{k+1} $(k=1, 2, \ldots)$ положительными. Тогда условия регулярности матрицы $\Delta = (\Delta_{ik})$ сводятся к следующим:

$$\prod_{i=2}^{\infty}\lambda_i = 0, \quad \lim_{i\to\infty}\sum_{k=1}^{i}\Delta_{ik} = 1. \tag{35}$$

Пусть (ε_n) и (ε'_n) — две последовательности, удовлетворяющие условиям

$$0 < \varepsilon_n < 1, \quad 0 < \varepsilon'_n < 1 \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{36}$$

$$\varepsilon_n = o\ (1), \quad \varepsilon'_n = o\ (1). \tag{37}$$

Положим

$$\left.\begin{array}{lll}\Delta_{11}=1, & \Delta_{22}=1-\varepsilon_1, & \Delta_{33}=\varepsilon_1', \\ \Delta_{44}=1-\varepsilon_2, & \Delta_{55}=1-\varepsilon_3, & \Delta_{66}=\varepsilon_2', \\ \Delta_{77}=1-\varepsilon_4, & \Delta_{88}=1-\varepsilon_5, & \Delta_{99}=\varepsilon_3', \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{array}\right\} \qquad (38)$$

и определим величины λ_i из равенств

$$\lambda_i+\Delta_{ii}=1 \quad (i=2, 3, \dots), \qquad (39)$$

т. е. положим

$$\left.\begin{array}{lll} & \lambda_2=\varepsilon_1, & \lambda_3=1-\varepsilon_1', \\ \lambda_4=\varepsilon_2, & \lambda_5=\varepsilon_3, & \lambda_6=1-\varepsilon_2', \\ \lambda_7=\varepsilon_4, & \lambda_8=\varepsilon_5, & \lambda_9=1-\varepsilon_3', \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{array}\right\} \qquad (40)$$

Заметим, что хотя еще до выбора величин $\Delta_{kk}, \lambda_{k+1}$ $(k=1, 2, \dots)$ мы приняли их положительными, тем не менее это остается справедливым в силу условий (36).

Условия (34) будут теперь удовлетворены, стоит только положить $k_\nu=3\nu$ $(\nu=1, 2, \dots)$. Кроме того, так как $0<\lambda_i<1$ $(i=2, 3, \dots)$, а все величины λ_i с номерами $i\neq 3\nu$ $(\nu=1, 2, \dots)$ образуют сходящуюся к нулю последовательность, то первое условие (35) выполнено. Далее, из равенств (33) имеем

$$\sum_{k=1}^{i}\Delta_{ik}=\lambda_i\sum_{k=1}^{i-1}\Delta_{i-1,k}+\Delta_{ii}, \qquad (41)$$

и так как $\Delta_{11}=1$, а величины λ_i $(i=2, 3, \dots)$ удовлетворяют уравнениям (39), то $\sum\limits_{k=1}^{i}\Delta_{ik}=1$ $(i=1, 2, \dots)$ и, следовательно, второе из условий (35) также выполнено.

Итак, как это и было намечено выше, мы построили нормальную матрицу Toeplitz'а $\Delta=(\Delta_{ik})$, которой соответствуют фундаментальные последовательности, удовлетворяющие условиям (11), (14).

Нам остается только убедиться в том, что методы A и B, определяемые матрицами, получающимися из Δ вычеркиванием, соответственно, ее четных и нечетных строк, удовлетворяют условиям: $A_0'B_0'\neq A_0'$, $A_0'B_0'\neq B_0'$, $A_0'B_0'$ содержит расходящиеся последовательности. Для этого рассмотрим последовательности $\sigma'=(\sigma_k')$, $\sigma''=(\sigma_k'')$ и $\sigma=(\sigma_k)$, элементы которых определяются следующим образом:

$$\begin{array}{lll}\sigma_k'=1, \text{ если } k=1+6n, & \sigma_k'=0, \text{ если } k\neq 1+6n & (n=0, 1, \dots), \\ \sigma_k''=1, \text{ если } k=4+6n, & \sigma_k''=0, \text{ если } k\neq 4+6n & (n=0, 1, \dots), \\ \sigma_k=1, \text{ если } k=3n, & \sigma_k=0, \text{ если } k\neq 3n & (n=1, 2, \dots).\end{array}$$

Покажем сперва, что последовательность σ' не суммируется методом A, но суммируется методом B, откуда будет следовать, что $A'_0 B'_0 \neq B'_0$.

Так как строчка с номером i матрицы A является строчкой с номером $2i-1$ матрицы Δ и так как имеет место равенство (41), то

$$A_{1+3n}(\sigma') = \Delta_{1+6n}(\sigma') = \sum_{k=1}^{1+6n} \Delta_{1+6n,k}\, \sigma'_k =$$

$$= \lambda_{1+6n} \sum_{k=1}^{6n} \Delta_{6n,k}\, \sigma'_k + \Delta_{1+6n,\ 1+6n}. \tag{42}$$

Но из равенств (38), (39) следует, что

$$\Delta_{1+6n,\ 1+6n} = 1 - \varepsilon_{4n}, \qquad \lambda_{1+6n} = \varepsilon_{4n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{43}$$

Используя равенства (42), (43), получаем

$$|A_{1+3n}(\sigma') - 1| = \left|\varepsilon_{4n} \sum_{k=1}^{6n} \Delta_{6n,k}\, \sigma'_k - \varepsilon_{4n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_{4n}\left(\sum_{k=1}^{6n} \Delta_{6n,k} + 1\right) = 2\varepsilon_{4n},$$

откуда, в силу первого условия (37), следует, что

$$\lim_{n\to\infty} A_{1+3n}(\sigma') = 1. \tag{44}$$

Далее, обозначим через $\Delta' = (\Delta'_{mk})$ матрицу, в которую обратится матрица Δ, после того как в ней будут вычеркнуты все строки с номерами $1+6n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Положим, что строка с номером m матрицы Δ' является строкой с номером i_m матрицы Δ. Тогда

$$\Delta'_{mk} = \Delta_{i_m k} \quad (m = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots)$$

и, в частности,

$$\Delta'_{mk} = 0, \text{ если } k > i_m.$$

Так как $i_m \neq 1 + 6n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, поскольку строка с номером i_m матрицы Δ является строкой матрицы Δ', то для каждого i_m можно указать такое натуральное число j_m, что

$$1 + 6j_m < i_m < 1 + 6(j_m + 1).$$

Принимая во внимание сказанное и замечая, что из равенств (33) следует

$$\Delta_{ik} = \Delta_{jk}\lambda_{j+1}\lambda_{j+2}\cdots\lambda_i \leqslant \Delta_{jk}\lambda_{j+1} \quad (i > j \geqslant k,\ k = 1, 2, \ldots),$$

получаем

$$0 < \Delta'_m(\sigma') = \sum_{\nu=0}^{j_m} \Delta_{i_m,\, 1+6\nu} < \sum_{k=1}^{1+6j_m} \Delta_{i_m k} \leqslant \lambda_{2+6j_m} \sum_{k=1}^{1+6j_m} \Delta_{1+6j_m,\, k} = \lambda_{2+6j_m} = \varepsilon_{1+4j_m}\ ^{*}$$

и, следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \Delta'_m(\sigma') = 0. \tag{45}$$

Так как в матрицу B не входят строчки матрицы Δ с номерами $1+6n$ $(n=0, 1, \ldots)$, поскольку эти строчки нечетные, то все строчки матрицы B являются строчками матрицы Δ', и поэтому из равенства (45) вытекает, что метод B суммирует последовательность σ'.

Что касается метода A, то, принимая во внимание равенства (44), (45) и учитывая, что среди строк матрицы Δ' имеется бесконечное множество строк матрицы A, приходим к выводу, что метод A не суммирует последовательность σ'.

Мы не будем прибегать к выкладкам (они аналогичны тем, которые были только что проведены), чтобы показать, что

$$\lim_{n\to\infty} B_{2+3n}(\sigma'') = \lim_{n\to\infty} \Delta_{4+6n}(\sigma'') = 1, \tag{46}$$

а

$$\lim_{m\to\infty} \Delta''_m(\sigma'') = 0 \tag{47}$$

[$\Delta'' = (\Delta''_{mk})$ — матрица, в которую обратится матрица Δ, если в ней вычеркнуть все ее строки с номерами $4+6n$ $(n=0, 1, \ldots)$].

Ясно, что из равенств (46), (47) будет вытекать, что последовательность σ'' не суммируется методом B, а суммируется методом A, так что $A'_0 B'_0 \neq A'_0$.

Наконец, чтобы убедиться, что $A'_0 B'_0$ содержит расходящиеся последовательности, покажем, что метод Δ, а следовательно, и методы A и B суммируют последовательность σ.

Обозначим через n_i такое натуральное число, что

$$3n_i < i \leqslant 3(n_i+1) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Имеем

$$0 < \Delta_i(\sigma) = \sum_{k=1}^{3n_i} \Delta_{ik}\sigma_k + \Delta_{ii}\sigma_i < \lambda_{1+3n_i} \sum_{k=1}^{3n_i} \Delta_{3n_i k} +$$

$$+ \Delta_{3(n_i+1),\, 3(n_i+1)} = \varepsilon_{2n_i} + \varepsilon'_{n_i+1},\ ^{**}$$

откуда, в силу условий (37), следует

$$\lim_{i\to\infty} \Delta_i(\sigma) = 0.$$

Таким образом, построенные методы A и B действительно обладают всеми вышеуказанными свойствами.

---

* См. равенства (40).

** См. равенства (38), (40).

В заключение укажем, что ограниченно совместные методы Toeplitz'a не обязаны быть совместными. Легко проверить, что построенные нами ограниченно совместные методы A и B не являются совместными. Для этого достаточно взять неограниченную последовательность

$$\sigma''' = \overbrace{a,\ 0, \frac{a}{\varepsilon_1'},\ 0,\ a, -\frac{a}{\varepsilon_2'}}, \overbrace{a,\ 0, \frac{a}{\varepsilon_3'},\ 0,\ a, -\frac{a}{\varepsilon_4'}}, \ldots \quad (a \neq 0)$$

и оценить величины $\Delta_{6n}(\sigma''')$, $\Delta_{6n-1}(\sigma''')$, ..., $\Delta_{6n-5}(\sigma''')$ $(n = 1, 2, \ldots)$, откуда будет следовать, что

$$\overline{A}(\sigma''') = a \neq \overline{B}(\sigma''') = 0.$$

Поступило
26.III. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.
[2] Mazur S., Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren, Studia Mathematica, t. II, 1930.
[3] Köthe G. und Toeplitz O., Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 171, 1934.
[4] Köthe G., Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 178, 1938.
[5] Hill J. D., Some properties of summability, Duke Mathematical Journal, v. 9, N. 2, 1942.
[6] Mazur S., Über lineare Limitierungsverfahren, Mathematishe Zeitschrift, B. 28, 1928.

Y. DAREVSKY. ON TOEPLTZ'S METHODS

SUMMARY

In this paper regular methods of summation by means of infinite matrices, the so-called Toeplitz's methods, are considered.

The following notations are used throughout the paper:

A' is the field of the method determined by a matrix $A = (a_{ik})$;

A_0' is the set of all bounded sequences summable by the method A;

A'' is the set of all sequences $x = (x_k) \in A'$ such that $\sum_{i=1}^{\infty} t_i \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = 0$ for every $t = (t_i)$ satisfying the conditions: $\sum |t_i| < \infty$, $\sum t_i a_{ik} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$;

A''' is the set of all sequences $x = (x_k) \in A'$ such that $\sum t_i \sum a_{ik} x_k = \sum x_k \sum t_i a_{ik}$ for every $t = (t_i)$ satisfying the condition: $\sum |t_i| < \infty$ (it is supposed that $\sup_i |a_{ik}| < \infty$ for every k);

$\xi^{(m)} = (\xi_k^{(m)})$ is the sequence which is defined for every reversible method $A = (a_{ik})$ as the solution of the system of equations

$$\sum a_{ik} x_k = \delta_i^{(m)} \qquad (i = 1, 2, \ldots;\ \delta_{i \neq m}^{(m)} = 0,\ \delta_m^{(m)} = 1).$$

At first an axiliary theorem (Theorem 1) is proved from which follows that if A is a reversible Toeplitz's method and A'' is the maximal

set on which A is consistent with all regular methods not weaker than A itself. Hence follows that a reversible Toeplitz's method A is perfect if and only if $A' = A''$.

The problem arises to determine, proceeding from the elements of the matrix $A = (a_{ik})$ and the elements of a sequence $x = (x_k) \in A'$, whether x belongs to the set A'' or not. We restrict ourselves to an analogous problem involving the set $A''' \subset A''$, instead of A'', namely, we prove

THEOREM 2. *If* $A = (a_{ik})$ *is a matrix with the property* $\sup|a_{ik}| < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *then a sequence* $x = (x_i) \in A'$ *belongs to* A''' *if and only if*

$$\sup_{i,n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right| < \infty.$$

By using this theorem it is easy to construct perfect methods A for which $A' = A'' \neq A'''$ and to discover perfect methods A such that $A' = A'' = A'''$. The latter property is inherent, for instance, in the so-called Riesz's methods which define the limit of a sequence $x = (x_i)$ as

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{p_i}\sum_{k=1}^{i}\Delta_k x_k \quad (\Delta_k = p_k - p_{k-1},\ p_0 = 0,\ p_1 < p_2 < \cdots,\ p_i \to \infty).$$

Let λ be a linear system whose elements are sequences of numbers. The sum of sequences $x = (x_k)$ and $y = (y_k)$ is defined as $x + y = (x_k + y_k)$, the product of the sequence $x = (x_k)$ by a number r is defined as $rx = (rx_k)$. To the system λ the adjoint system λ^* is defined as the set of all sequences $u = (u_k)$ such that $ux = u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots$ forms a convergent series for any $x \in \lambda$. Let us convect λ into a linear space (which will be called space of type (T)) by defining the limit of a sequence of elements $x^{(n)} \in \lambda$ as the element $x \in \lambda$ such that $\lim\limits_{n\to\infty} ux^{(n)} = ux$ for every $u \in \lambda^*$. The space of type (T) of all convergent sequences will be denoted by e, the space of type (T) of all sequences containing but a finite number of non-zero elements will be denoted by φ. By means of a theorem (Theorem 3) it is proved that *for every matrix A whose columns are convergent sequences, in particular, for every Toeplitz's method A, the set A''' is the maximal space of type (T) which contains φ and is mapped continuously into e by the matrix A.*

With the use of the above Theorem 2 one can establish an effective sufficient condition of perfection of reversible Toeplitz's methods:

THEOREM 4. *A reversible Toeplitz's method* $A = (a_{ik})$ *is perfect if for almost all sequences* $\xi^{(m)}$ *corresponding to* A *(that is, for all such sequences except a finite number of them) the following condition is fulfilled:*

$$\sup_{i,n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k^{(m)}\right| < \infty.$$

Hence follows, in particular, that *if for a reversible Toeplitz's method A almost all sequences $\xi^{(m)}$ corresponding to A are bounded, then the method A is perfect.*

For normal Toeplitz's methods this result was obtained by Mazur.

The condition of Theorem 4 is weaker than the boundedness of almost all $\xi^{(m)}$ even in the case of normal methods. This is shown in the paper by an example of a Toeplitz's method satisfying the condition of Theorem 4 (and, consequently, perfect) for which there is an infinity of unbounded sequences among the $\xi^{(m)}$ corresponding to the method.

Besides the results just listed some effective sufficient conditions of bounded consistency of two arbitrary Toeplitz's methods are obtained. The methods A and B are called *boundedly consistent* if they are consistent on the set $A_0'B_0'$.

If the methods A and B are boundedly consistent and $A_0'=B_0'$, then A and B are called *boundedly equivalent.*

Let A and B be any Toeplitz's methods. A particular case of a simple lemma (Lemma 4) shows that some methods $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$ and $\mathfrak{B}=(\beta_{ik})$ can be chosen, in various ways, boundedly equivalent to A and B respectively with the properties:

$$\alpha_{i,2i-1}\neq 0,\quad \alpha_{ik}=0 \text{ for } k>2i-1;\qquad \beta_{i,2i}\neq 0,\quad \beta_{ik}=0 \text{ for } k>2i$$
$$(i=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots).$$

We construct by means of a pair of such methods $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$, $\mathfrak{B}=(\beta_{ik})$ a normal matrix $\Delta_{AB}=(\Delta_{ik})$ by putting

$$\Delta_{2i-1,k}=\alpha_{ik},\quad \Delta_{2i,k}=\beta_{ik}\quad (i=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots).$$

We prove

THEOREM 5. *Toeplitz's methods A and B are boundedly consistent, if a subsequence (k_ν) can be chosen in the sequence of positive integers (k) in such a way that the sequence $\xi^{(i)}=(\xi_k^{(i)})$ corresponding to a matrix Δ_{AB} satisfy the conditions*

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{i=1}^{k_\nu}|\xi_{k_\nu}^{(i)}|=\infty,\ \sum_{i\leq k_\nu}{}'|\xi_{k_\nu}^{(i)}|\neq 0,\quad \sum_{i\leq k_\nu}{}''|\xi_{k_\nu}^{(i)}|\neq 0\quad (\nu=1,2,\ldots),$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\left|\sum_{i\leq k_\nu}' \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum_{i\leq k_\nu}'|\xi_{k_\nu}^{(i)}|}>0,\quad \lim_{\nu\to\infty}\frac{\left|\sum_{i\leq k_\nu}'' \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum_{i\leq k_\nu}''|\xi_{k_\nu}^{(i)}|}>0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\left|\sum_{i=1}^{k_\nu}\xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum_{i=1}^{k_\nu}|\xi_{k_\nu}^{(i)}|}=0,\quad \lim_{\nu\to\infty}\frac{\xi_{k_\nu}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{k_\nu}|\xi_{k_\nu}^{(i)}|}=0\quad (i=1,2,\ldots),$$

where $\sum\limits_{i\leqslant k_\nu}' \sum\limits_{i\leqslant k_\nu}''$ *denote the sums extended respectively over all odd and even indices* i *from* 1 *to* k_ν.

Although apparently rather complicated, these conditions can be widely used in constructing boundedly consistent Toeplitz's methods.

In this paper we construct, by means of these conditions, two Toeplitz's methods A and B such that $A_0'B_0' \neq A_0'$, $A_0'B_0' \neq B_0'$ and $A_0'B_0'$ contains divergent sequences. It is thus proved that the conditions of Theorem 5 can be realized for such methods. Some simple examples show that the conditions of Theorem 5 can be realized for boundedly equivalent Toeplitz's methods, as well as for boundedly consistent Toeplitz's methods A, B such that $A_0' \supset B_0'$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 33–46 Série mathématique

М. И. ГРАЕВ

ИЗОМОРФИЗМЫ ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ДЕДЕКИНДОВЫХ СТРУКТУРАХ

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

Статья посвящена вопросу о существовании прямо подобных продолжений для двух прямых разложений единицы вполне дедекиндовой структуры и является продолжением построенной в этом направлении теории А. Г. Куроша [(1), (2)].

1. Будем рассматривать вполне дедекиндову структуру S, единица которой разложена двумя способами в прямую сумму

$$1 = \dot{\sum_{\alpha}} a_\alpha = \dot{\sum_{\beta}} b_\beta. \tag{1}$$

Основные свойства прямых разложений [(1), § 1] предполагаются в дальнейшем известными.

Условимся обозначать через $x\varphi_\alpha$ компоненту элемента x в прямом слагаемом a_α относительно первого из разложений (1), а через $x\overline{\varphi}_\alpha$ — его компоненту в прямом дополнении $\overline{a}_\alpha$ элемента a_α относительно первого из разложений (1). Таким образом,

$$x\varphi_\alpha = a_\alpha(x + \overline{a}_\alpha), \quad x\overline{\varphi}_\alpha = \overline{a}_\alpha(x + a_\alpha),$$

где $\overline{a}_\alpha = \dot{\sum\limits_{\alpha' \neq \alpha}} a_{\alpha'}$. Аналогично, для компонент элемента x относительно второго из разложений (1) введем обозначения $x\theta_\beta$ и $x\overline{\theta}_\beta$:

$$x\theta_\beta = b_\beta(x + \overline{b}_\beta), \quad x\overline{\theta}_\beta = \overline{b}_\beta(x + b_\beta),$$

где $\overline{b}_\beta = \sum\limits_{\beta' \neq \beta} b_{\beta'}$.

Будем называть *правильным* (относительно пары разложений (1)) любой элемент x структуры, для которого имеют место прямые разложения

$$x = \dot{\sum_{\alpha}} xa_\alpha = \dot{\sum_{\beta}} xb_\beta. \tag{2}$$

Элемент x правилен тогда и только тогда, если для любых индексов α и β $x\varphi_\alpha \leqslant x$ и $x\theta_\beta \leqslant x$. Очевидно, сумма правильных элементов есть снова правильный элемент.

Если x — правильный элемент и $x' \leqslant x$, то операции взятия компоненты элемента x' относительно разложений (2) элемента x и относительно разложений (1) единицы структуры равносильны.

В самом деле, если, например, $x'\varphi'_\alpha$ и $x'\overline{\varphi}'_\alpha$ — компоненты элемента x' соответственно в слагаемых xa_α и $x\overline{a}_\alpha = \sum_{\alpha' \neq \alpha} xa_{\alpha'}$ первого из разложений (2), то

$$x' \leqslant x'\varphi'_\alpha + x'\overline{\varphi}'_\alpha,$$

а потому

$$x'\varphi_\alpha \leqslant (x'\varphi'_\alpha + x'\overline{\varphi}'_\alpha)\,\varphi_\alpha = (x'\varphi'_\alpha)\,\varphi_\alpha + (x'\overline{\varphi}'_\alpha)\,\varphi_\alpha = x'\varphi'_\alpha;$$

неравенство в другую сторону очевидно.

Заметим также, что прямые разложения (1) единицы структуры S индуцируют прямые разложения

$$1_y = \dot{\sum_\alpha} (a_\alpha + y) = \dot{\sum_\beta} (b_\beta + y) \tag{3}$$

единицы фактор-структуры $1/y$ для любого правильного элементэ y. В самом деле, разложения (3) будут прямыми в фактор-структуре $1/y$, ибо, например,

$$(a_\alpha + y)\left[\sum_{\alpha' \neq \alpha} (a_{\alpha'} + y)\right] = (a_\alpha + y)\,(\overline{a}_\alpha + y) = a_\alpha\,(\overline{a}_\alpha + y) + y =$$
$$= a_\alpha\,(\overline{a}_\alpha + ya_\alpha + y\overline{a}_\alpha) + y = ya_\alpha + a_\alpha\,\overline{a}_\alpha + y = y.$$

2. Положив $k_0 = 0$, рассмотрим элементы вида

$$k_1 = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta = \sum_{\alpha,\beta} (a_\alpha + k_0)\,(b_\beta + k_0),$$
$$k_2 = \sum_{\alpha,\beta} (a_\alpha + k_1)\,(b_\beta + k_1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$k_s = \sum_{\alpha,\beta} (a_\alpha + k_{s-1})\,(b_\beta + k_{s-1}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Очевидно, $k_0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_s \leqslant \ldots$ Будем называть элемент k_s s-*м коммутантом* пары разложений (1), где $s = 0, 1, 2, \ldots$

ЛЕММА 1.

$$k_s = \dot{\sum_\alpha} \sum_\beta a_\alpha\,(b_\beta + k_{s-1}) = \dot{\sum_\beta} \sum_\alpha b_\beta\,(a_\alpha + k_{s-1}) \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

т. е. элементы k_s — правильные.

В самом деле, ввиду дедекиндовости структуры S

$$k_s = \sum_{\alpha,\beta} (a_\alpha + k_{s-1})\,(b_\beta + k_{s-1}) = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha\,(b_\beta + k_{s-1}) + k_{s-1}.$$

Предполагая, что формула (4) уже доказана для k_{s-1} (для k_1 она тривиальна), имеем

$$k_{s-1} = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha\,(b_\beta + k_{s-2}) \leqslant \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha\,(b_\beta + k_{s-1}).$$

Следовательно,

$$k_s = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha\,(b_\beta + k_{s-1}).$$

Вторая часть формулы (4) доказывается аналогичным образом.

Легко видеть, что элемент k_s совпадает с первым коммутантом фактор-структуры $1/k_{s-1}$ относительно пары разложений, индуцируемых в этой фактор-структуре разложениями (1).

ЛЕММА 2. *Если x и y — правильные элементы структуры, причем $x \geqslant y$ и первый центр элемента x относительно пары разложений* (2) *содержится в y, то первый центр элемента x в фактор-структуре $1/y$ равен y.*

Доказательство. Искомый элемент есть, в силу определения центра ([2]), сумма всех элементов вида

$$(y + xa_\alpha)\,\theta_\beta^y\,\varphi_{\alpha'}^y, \quad \alpha' \neq \alpha,$$

где символы θ_β^y и $\varphi_{\alpha'}^y$ обозначают взятие компоненты соответственно в слагаемом $b_\beta^{\alpha'} + y$ и в слагаемом $a_{\alpha'} + y$ прямых разложений (3) единицы фактор-структуры $1/y$.

С другой стороны, для любого элемента z структуры имеем

$$(z + y)\,\theta_\beta^y = (z + y + \bar{b}_\beta)(b_\beta + y) = (z + y + \bar{b}_\beta)\,b_\beta + y =$$
$$= (z + y)\,\theta_\beta + y = z\theta_\beta + y\theta_\beta + y = z\theta_\beta + y.$$

Аналогично

$$(z + y)\,\varphi_{\alpha'}^y = z\varphi_{\alpha'} + y.$$

Следовательно,

$$(z + y)\,\theta_\beta^y\,\varphi_{\alpha'}^y = z\theta_\beta\,\varphi_{\alpha'} + y.$$

Так как, по предположению,

$$xa_\alpha\,\theta_\beta\,\varphi_{\alpha'} \leqslant y,$$

то

$$(xa_\alpha + y)\,\theta_\beta^y\,\varphi_{\alpha'}^y = y;$$

откуда и вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 3. *k_s есть максимальный правильный элемент, s-й центр пары разложений которого, индуцируемых разложениями (1), равен нулю.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение для k_1. Прямые разложения элемента k_1, индуцируемые разложениями (1), обладают общим продолжением

$$k_1 = \dot{\sum_{\alpha,\,\beta}} a_\alpha\, b_\beta.$$

Следовательно [(1), теорема 3], центр этой пары разложений равен нулю.

С другой стороны, если центр пары разложений правильного элемента x

$$x = \dot{\sum_\alpha} xa_\alpha = \dot{\sum_\beta} xb_\beta$$

равен нулю, то эти разложения обладают общим продолжением

$$x = \dot{\sum_{\alpha,\,\beta}} xa_\alpha \cdot xb_\beta = \dot{\sum_{\alpha,\,\beta}} xa_\alpha\, b_\beta.$$

Следовательно, $x \leqslant k_1$.

Пусть утверждение леммы доказано уже для k_{s-1}. Докажем его для k_s. Первый центр элемента k_s относительно пары разложений (4) содержится,

очевидно, внутри первого центра элемента k_s в фактор-структуре k_s/k_{s-1} относительно разложений, индуцируемых в этой фактор-структуре разложениями (4). Но первый центр элемента k_s в фактор-структуре k_s/k_{s-1} равен k_{s-1}. Следовательно, первый центр z_1 элемента k_s относительно пары разложений (4) содержится внутри k_{s-1}. В силу индуктивного предположения s-й центр элемента k_s, равный $(s-1)$-му центру элемента z_1 и содержащийся поэтому в $(s-1)$-м центре элемента k_{s-1}, равен нулю.

Пусть, с другой стороны, s-й центр правильного элемента x структуры равен нулю. Тогда первый центр элемента x содержится, в силу индуктивного предположения, внутри k_{s-1} и, следовательно, первый центр элемента $x+k_{s-1}$ содержится также внутри k_{s-1}. Но тогда первый центр элемента $x+k_{s-1}$ в фактор-структуре $1/k_{s-1}$ равен k_{s-1} по лемме 2, а потому элемент $x+k_{s-1}$ должен содержаться в первом коммутанте этой фактор-структуры, т. е.

$$x+k_{s-1}\leqslant k_s, \quad x\leqslant k_s.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если для некоторого (конечного) индекса s $k_s=1$, то s-й центр пары разложений (1) $z_s=0$ и обратно*. В этом случае, обозначая через z_i i-й центр, имеем $z_i\leqslant k_{s-i}$, $i=1, 2, \ldots, s$.*

В самом деле, если $k_s=1$, то по доказанной лемме $z_s=0$; обратно, если $z_s=0$, то по той же лемме $1\leqslant k_s$, т. е. $k_s=1$. Наконец, если $z_s=0$, то $(s-i)$-й центр элемента z_i равен нулю, а потому $z_i\leqslant k_{s-i}$.

3. Мы дадим другое определение для коммутантов k_s $(s=0, 1, \ldots)$ пары разложений (1). Предварительно отметим следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Для любого элемента x из S*

$$x\bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha \theta_\beta = x\bar{\theta}_\beta \bar{\varphi}_\alpha \theta_\beta, \quad x\theta_\beta \varphi_\alpha \bar{\theta}_\beta = x\theta_\beta \bar{\varphi}_\alpha \bar{\theta}_\beta$$

и при $\beta\neq\beta'$

$$x\theta_\beta \varphi_\alpha \theta_{\beta'} = x\theta_\beta \bar{\varphi}_\alpha \theta_{\beta'}.$$

Аналогично

$$x\bar{\varphi}_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha = x\bar{\varphi}_\alpha \bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha, \quad x\varphi_\alpha \theta_\beta \bar{\varphi}_\alpha = x\varphi_\alpha \bar{\theta}_\beta \bar{\varphi}_\alpha$$

и при $\alpha\neq\alpha'$

$$x\varphi_\alpha \theta_\beta \varphi_{\alpha'} = x\varphi_\alpha \bar{\theta}_\beta \varphi_{\alpha'}.$$

Доказательство этих равенств проводится так же, как и доказательство аналогичного равенства леммы 1 Куроша ([2]).

---

* Если $k_s\neq 1$ $(s=1, 2, \ldots)$, но $\sum_{s=1}^{\infty} k_s=1$, то мы не можем уже утверждать, что пересечение центров равно нулю. Так, например, если S — структура подгрупп абелевой группы G вида

$$G=\{a_1\}\dot{+}\{a_2\}\dot{+}\ldots\dot{+}\{a_n\}\dot{+}\ldots,$$

где a_i $(i=1, 2, \ldots)$ — элементы одинаковых порядков, то можно образовать другое прямое разложение этой группы:

$$G=\{a_1\}\dot{+}\{a_1+a_2\}\dot{+}\ldots\dot{+}\{a_1+a_2+\ldots+a_n\}\dot{+}\ldots$$

Легко показать, что сумма коммутантов пары данных разложений равна G, а первый центр также совпадает с G.

Следствие. *Если* $x \leqslant a_\alpha$, *то* [см. ([2]), лемма 2]

$$x\theta_\beta \varphi_\alpha \bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha = x\bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha;$$

аналогично, если $y \leqslant b_\beta$, *то*

$$y\varphi_\alpha \theta_\beta \bar{\varphi}_\alpha \theta_\beta = y\bar{\varphi}_\alpha \theta_\beta \bar{\varphi}_\alpha \theta_\beta.$$

Рассмотрим теперь прямое слагаемое a_α первого из разложений (1). Обозначим через n_α^s сумму всех таких элементов $x \leqslant a_\alpha$, что для любых индексов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, если только $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_1 \neq \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_{s-1} \neq \alpha_s$, выполняется соотношение

$$x\theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_1} \theta_{\beta_2} \varphi_{\alpha_2} \cdots \theta_{\beta_s} \varphi_{\alpha_s} = 0.$$

Аналогично, через m_β^s обозначим сумму всех таких элементов $y \leqslant b_\beta$, что для любых индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, если только $\beta \neq \beta_1$, $\beta_1 \neq \beta_2, \ldots, \beta_{s-1} \neq \beta_s$, выполняется соотношение

$$y\varphi_{\alpha_1} \theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2} \theta_{\beta_2} \cdots \varphi_{\alpha_s} \theta_{\beta_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$n_\alpha^s \theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_1} \theta_{\beta_2} \varphi_{\alpha_2} \cdots \theta_{\beta_s} \varphi_{\alpha_s} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \alpha_1,\ \alpha_1 \neq \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1} \neq \alpha_s \tag{5}$$

и

$$m_\beta^s \varphi_{\alpha_1} \theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2} \theta_{\beta_2} \cdots \varphi_{\alpha_s} \theta_{\beta_s} = 0 \quad \text{при} \quad \beta \neq \beta_1,\ \beta_1 \neq \beta_2, \ldots, \beta_{s-1} \neq \beta_s \tag{5'}$$

$$(s = 1, 2, \ldots).$$

Положим, далее, $n_\alpha^0 = m_\beta^0 = 0$. Очевидно, $n_\alpha^s \leqslant n_\alpha^{s+1}$ и $m_\beta^s \leqslant m_\beta^{s+1}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$.

ЛЕММА 5.

$$\sum_\alpha n_\alpha^s = \sum_\beta m_\beta^s = k_s \quad (s = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что для любого x из S $x\bar{\varphi}_\alpha \leqslant \sum_{\alpha' \neq \alpha} x\varphi_{\alpha'}$ [см. ([1]), § 1, VIII]. Пусть теперь $\beta \neq \beta_1$, $\beta_1 \neq \beta_2, \ldots$ $\ldots, \beta_{s-1} \neq \beta_s$. Рассмотрим элемент

$$(n_\alpha^s \theta_\beta) \varphi_{\alpha_1} \theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2} \theta_{\beta_2} \cdots \varphi_{\alpha_s} \theta_{\beta_s}.$$

Если $\alpha_1 = \alpha$, то ввиду $\beta \neq \beta_1$, имеем на основании леммы 4 и сделанного выше замечания

$$(n_\alpha^s \theta_\beta) \varphi_\alpha \theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2} \theta_{\beta_2} \cdots \varphi_{\alpha_s} \theta_{\beta_s} = (n_\alpha^s \theta_\beta) \bar{\varphi}_\alpha \theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2} \theta_{\beta_2} \cdots \varphi_{\alpha_s} \theta_{\beta_s} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha_1' \neq \alpha} (n_\alpha^s \theta_\beta) \varphi_{\alpha_1'} \theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2} \theta_{\beta_2} \cdots \varphi_{\alpha_s} \theta_{\beta_s}.$$

Рассмотрим произвольное слагаемое полученной суммы

$$(n_\alpha^s \theta_\beta) \varphi_{\alpha_1'} \theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2} \theta_{\beta_2} \cdots \varphi_{\alpha_s} \theta_{\beta_s}.$$

Если в нем $\alpha_1' = \alpha_2$, то снова, ввиду $\beta_1 \neq \beta_2$, имеем

$$(n_\alpha^s \theta_\beta) \varphi_{\alpha_1'} \theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_1'} \theta_{\beta_2} \cdots \varphi_{\alpha_s} \theta_{\beta_s} = (n_\alpha^s \theta_\beta) \varphi_{\alpha_1'} \theta_{\beta_1} \bar{\varphi}_{\alpha_1'} \theta_{\beta_2} \cdots \varphi_{\alpha_s} \theta_{\beta_s} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha_2' \neq \alpha_1'} (n_\alpha^s \theta_\beta) \varphi_{\alpha_1'} \theta_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2'} \theta_{\beta_2} \cdots \varphi_{\alpha_s} \theta_{\beta_s}.$$

Продолжая те же рассуждения, мы убедимся, что рассматриваемый элемент $(n_\alpha^s\theta_\beta)\varphi_{\alpha_1}\theta_{\beta_1}\varphi_{\alpha_2}\theta_{\beta_2}\cdots\varphi_{\alpha_s}\theta_{\beta_s}$ содержится в сумме элементов вида

$$(n_\alpha^s\theta_\beta)\varphi_{\alpha_1'}\theta_{\beta_1}\varphi_{\alpha_2'}\theta_{\beta_2}\cdots\varphi_{\alpha_s'}\theta_{\beta_s},$$

где $\alpha \neq \alpha_1'$, $\alpha_1' \neq \alpha_2', \ldots, \alpha_{s-1}' \neq \alpha_s'$.

В силу определения n_α^s все эти элементы равны нулю. Следовательно,

$$(n_\alpha^s\theta_\beta)\varphi_{\alpha_1}\theta_{\beta_1}\varphi_{\alpha_2}\theta_{\beta_2}\cdots\varphi_{\alpha_s}\theta_{\beta_s}=0$$

при $\beta \neq \beta_1$, $\beta_1 \neq \beta_2, \ldots, \beta_{s-1} \neq \beta_s$, а потому $n_\alpha^s\theta_\beta \leqslant m_\beta^s$. Таким образом,

$$n_\alpha^s \leqslant \dot{\sum_\beta} n_\alpha^s\theta_\beta \leqslant \dot{\sum_\beta} m_\beta^s, \quad \dot{\sum_\alpha} n_\alpha^s \leqslant \dot{\sum_\beta} m_\beta^s.$$

Меняя ролями первое и второе разложения (1), мы докажем аналогично обратное включение $\dot{\sum_\beta} m_\beta^s \leqslant \dot{\sum_\alpha} n_\alpha^s$, откуда

$$\dot{\sum_\alpha} n_\alpha^s = \dot{\sum_\beta} m_\beta^s.$$

Таким образом, элемент $\dot{\sum_\alpha} n_\alpha^s = \dot{\sum_\beta} m_\beta^s$ — правильный относительно разложений (1). Из определения центра пары разложений [(²), § 4] легко усмотреть, что s-й центр пары разложений (1) есть элемент вида

$$\sum a_\alpha\theta_{\beta_1}\varphi_{\alpha_1}\theta_{\beta_2}\varphi_{\alpha_2}\cdots\theta_{\beta_s}\varphi_{\alpha_s},$$

где суммирование производится по всем системам индексов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ и по всем таким системам индексов $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, что $\alpha \neq \alpha_1$, $\alpha_1 \neq \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1} \neq \alpha_s$. Ввиду этого рассматриваемый элемент $\dot{\sum_\alpha} n_\alpha^s = \dot{\sum_\beta} m_\beta^s$ есть максимальный правильный элемент, s-й центр пары разложений которого равен нулю. Следовательно, в силу леммы 3 он должен совпадать с k_s.

Заметим, что если S есть структура нормальных делителей некоторой группы G, то коммутант этой группы содержится в первом коммутанте любой пары прямых разложений группы G. Действительно, если

$$G = \dot{\prod_\alpha} A_\alpha = \dot{\prod_\beta} B_\beta \tag{1'}$$

— два прямых разложения этой группы, x и y — два элемента подгруппы A_α, θ_β и $\varphi_{\alpha'}$ — эндоморфизмы группы G, отображающие каждый элемент соответственно в его компоненту в B_β и в $A_{\alpha'}$, то

$$(xyx^{-1}y^{-1})\theta_\beta\varphi_{\alpha'} = (x\theta_\beta\varphi_{\alpha'})(y\theta_\beta\varphi_{\alpha'})(x\theta_\beta\varphi_{\alpha'})^{-1}(y\theta_\beta\varphi_{\alpha'})^{-1}.$$

Но так как при $\alpha' \neq \alpha$ элементы $x\theta_\beta\varphi_{\alpha'}$ и $y\theta_\beta\varphi_{\alpha'}$ принадлежат центру группы G, то

$$(xyx^{-1}y^{-1})\theta_\beta\varphi_{\alpha'} = e$$

при $\alpha \neq \alpha'$, где e — единица группы. Следовательно, элемент $xyx^{-1}y^{-1}$ принадлежит первому коммутанту k_1 пары разложений (1'). Ввиду произвольности выбора прямого множителя A_α и элементов $x, y \in A_\alpha$, заключаем, что коммутант всей группы G содержится в k_1 *.

ЛЕММА 6.

$$n_\alpha^s \theta_\beta \varphi_\alpha \bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha = n_\alpha^s \theta_\beta \bar{\varphi}_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha \leqslant n_\alpha^{s-2}$$

и при $\beta \neq \beta'$

$$n_\alpha^s \theta_\beta \varphi_\alpha \theta_{\beta'} \varphi_\alpha \leqslant n_\alpha^{s-2} \quad (s = 2, 3, \ldots).$$

Действительно, в силу сделанного в лемме 5 замечания,

$$n_\alpha^s \theta_{\beta'} \bar{\varphi}_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha = \sum_{\alpha' \neq \alpha} n_\alpha^s \theta_\beta \varphi_{\alpha'} \theta_\beta \varphi_\alpha$$

и

$$n_\alpha^s \theta_\beta \varphi_\alpha \theta_{\beta'} \varphi_\alpha = n_\alpha^s \theta_\beta \bar{\varphi}_\alpha \theta_{\beta'} \varphi_\alpha \leqslant \sum_{\alpha' \neq \alpha} n_\alpha^s \theta_\beta \varphi_{\alpha'} \theta_{\beta'} \varphi_\alpha.$$

Из определения элементов n_α^s следует непосредственно, что элементы каждой из написанных сумм содержатся в n_α^{s-2}.

4. Рассмотрим теперь элементы вида

$$n_{\alpha\beta}^s = n_{\alpha\beta}^{2s} (\theta_\beta \varphi_\alpha)^s \text{ и } m_{\beta\alpha}^s = m_\beta^{2s} (\varphi_\alpha \theta_\beta)^s \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

положив дополнительно $n_{\alpha\beta}^0 = m_{\beta\alpha}^0 = 0$.

ЛЕММА 7.

$$n_{\alpha\beta}^s \bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha \leqslant n_{\alpha\beta}^{s-1} \leqslant n_{\alpha\beta}^s, \quad n_{\alpha\beta}^s \theta_\beta \varphi_\alpha \leqslant n_{\alpha\beta}^s \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Заметим, что для любого элемента $x \leqslant a_\alpha$ и любого $s = 1, 2, \ldots$

$$x \leqslant x (\theta_\beta \varphi_\alpha)^s + x (\theta_\beta \varphi_\alpha)^{s-1} (\bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha) + \cdots + x (\bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha)^s$$

[([2]), лемма 4]. Поэтому

$$n_\alpha^{2(s-1)} \leqslant n_\alpha^{2(s-1)} (\theta_\beta \varphi_\alpha)^{s-1} + n_\alpha^{2(s-1)} (\theta_\beta \varphi_\alpha)^{s-2} (\bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha) + \cdots + n_\alpha^{2(s-1)} (\bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha)^{s-1}$$
$$(s = 2, 3, \ldots).$$

Отсюда, ввиду

$$n_\alpha^{2(s-1)} \theta_\beta \varphi_\alpha \leqslant n_\alpha^{2(s-1)}, \quad n_\alpha^{2(s-1)} \bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha \leqslant n_\alpha^{2(s-1)}$$

и перестановочности отображений $\theta_\beta \varphi_\alpha$ и $\bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha$, имеем

$$n_\alpha^{2(s-1)} \leqslant n_\alpha^{2(s-1)} (\theta_\beta \varphi_\alpha) + n_\alpha^{2(s-1)} (\bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha)^{s-1}.$$

Тогда

$$n_{\alpha\beta}^{s-1} = n_\alpha^{2(s-1)} (\theta_\beta \varphi_\alpha)^{s-1} \leqslant n_\alpha^{2(s-1)} (\theta_\beta \varphi_\alpha)^s + n_\alpha^{2(s-1)} (\theta_\beta \varphi_\alpha \bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha)^{s-1}.$$

Так как по лемме 6 $n_\alpha^{2(s-1)} (\theta_\beta \varphi_\alpha \bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha)^{s-1} = 0$, то

$$n_{\alpha\beta}^{s-1} \leqslant n_\alpha^{2(s-1)} (\theta_\beta \varphi_\alpha)^s \leqslant n_\alpha^{2s} (\theta_\beta \varphi_\alpha)^s = n_{\alpha\beta}^s \quad (s = 2, 3, \ldots).$$

Далее,

$$n_{\alpha\beta}^s \bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha = n_\alpha^{2s} (\theta_\beta \varphi_\alpha)^s (\bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha) = n_\alpha^{2s} (\theta_\beta \varphi_\alpha \bar{\theta}_\beta \varphi_\alpha) (\theta_\beta \varphi_\alpha)^{s-1} \leqslant$$
$$\leqslant n_\alpha^{2(s-1)} (\theta_\beta \varphi_\alpha)^{s-1} = n_{\alpha\beta}^{s-1} \quad (s = 2, 3, \ldots)$$

(для $s = 1$ оба неравенства тривиальны).

---

* Отсюда следует, в частности, что разложения коммутанта группы, индуцируемые двумя прямыми разложениями группы, обладают всегда общими продолжениями.

Наконец,

$$n_{\alpha\beta}^{s}\theta_\beta\varphi_\alpha = n_\alpha^{2s}(\theta_\beta\varphi_\alpha)^s(\theta_\beta\varphi_\alpha) = n_\alpha^{2s}(\theta_\beta\varphi_\alpha)(\theta_\beta\varphi_\alpha)^s \leqslant n_\alpha^{2s}(\theta_\beta\varphi_\alpha)^s = n_{\alpha\beta}^s.$$

ЛЕММА 8.

$$n_\alpha^{2s} = \sum_\beta n_{\alpha\beta}^s \quad (s = 0,\ 1,\ 2\ldots).$$

Доказательство. Имеем

$$n_\alpha^{2s} \leqslant \sum_{\beta_1} n_\alpha^{2s}\theta_{\beta_1}\varphi_\alpha \leqslant \sum_{\beta_1,\beta_2} n_\alpha^{2s}\theta_{\beta_1}\varphi_\alpha\theta_{\beta_2}\varphi_\alpha \leqslant \cdots \leqslant \sum_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s} n_\alpha^{2s}\theta_{\beta_1}\varphi_\alpha\theta_{\beta_2}\varphi_\alpha\cdots\theta_{\beta_s}\varphi_\alpha$$

или

$$n_\alpha^{2s} \leqslant \sum_\beta n_{\alpha\beta}^s + \sum n_\alpha^{2s}\theta_{\beta_1'}\varphi_\alpha\theta_{\beta_2'}\varphi_\alpha\cdots\theta_{\beta_s'}\varphi_\alpha,$$

где вторая сумма берется по всем системам индексов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, содержащим по крайней мере два различных.

По лемме 6 все элементы второй суммы принадлежат $n_\alpha^{2(s-1)}$. Предположив, что лемма уже доказана для $n_\alpha^{2(s-1)}$ (для n_α^0 она тривиальна), имеем

$$n_\alpha^{2(s-1)} = \sum_\beta n_{\alpha\beta}^{s-1} \leqslant \sum_\beta n_{\alpha\beta}^s,$$

а потому

$$n_\alpha^{2s} \leqslant \sum_\beta n_{\alpha\beta}^s.$$

Так как в другую сторону неравенство очевидно, то $n_\alpha^{2s} = \sum_\beta n_{\alpha\beta}^s$.

ЛЕММА 9.

$$x = n_{\alpha\beta}^s \sum_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta'}^s = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Имеем

$$x\bar{\theta}_\beta\varphi_\alpha \leqslant n_{\alpha\beta}^s\bar{\theta}_\beta\varphi_\alpha \leqslant n_{\alpha\beta}^{s-1},$$

$$x\theta_\beta\varphi_\alpha \leqslant \sum_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta'}^s\theta_\beta\varphi_\alpha = \sum_{\beta' \neq \beta} n_\alpha^{2s}(\theta_{\beta'}\varphi_\alpha)^s(\theta_\beta\varphi_\alpha) \leqslant \sum_{\beta' \neq \beta} n_\alpha^2(\theta_{\beta'}\varphi_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha) = n_\alpha^{2(s-1)}.$$

Следовательно,

$$x \leqslant x\,\theta_\beta\varphi_\alpha + x\bar{\theta}_\beta\varphi_\alpha \leqslant n_\alpha^{2(s-1)},$$

а потому $x \leqslant n_\alpha^{2(s-1)} \cdot n_{\alpha\beta}^s$. Покажем, что

$$n_\alpha^{2(s-1)} \cdot n_{\alpha\beta}^s = n_{\alpha\beta}^{s-1},$$

В самом деле, положив $y = n_\alpha^{2(s-1)} n_{\alpha\beta}^s$, имеем по лемме 7

$$y\bar{\theta}_\beta\varphi_\alpha \leqslant n_{\alpha\beta}^{s-1}; \quad y\theta_\beta\varphi_\alpha \leqslant n_{\alpha\beta}^s,$$

а потому

$$y \leqslant y(\theta_\beta\varphi_\alpha)^{s-1} + y(\bar{\theta}_\beta\varphi_\alpha)(\theta_\beta\varphi_\alpha)^{s-2} + y(\bar{\theta}_\beta\bar{\varphi}_\alpha)^2(\theta_\beta\varphi_\alpha)^{s-3} + \cdots + y(\theta_\beta\varphi_\alpha)^{s-1} \leqslant$$
$$\leqslant n_\alpha^{2(s-1)}(\theta_\beta\varphi_\alpha)^{s-1} + n_{\alpha\beta}^{s-1}(\theta_\beta\varphi_\alpha)^{s-2} + n_{\alpha\beta}^{s-1}(\bar{\theta}_\beta\varphi_\alpha)(\theta_\beta\varphi_\alpha)^{s-3} + \cdots$$
$$\cdots + n_{\alpha\beta}^{s-1}(\bar{\theta}_\beta\varphi_\alpha)^{s-2} = n_{\alpha\beta}^{s-1}.$$

(Мы предполагаем здесь $s \geqslant 2$, ибо для $s = 1$ равенство очевидно).

Итак,

$$n_\alpha^{2(s-1)} \cdot n_{\alpha\beta}^s \leqslant n_{\alpha\beta}^{s-1};$$

ввиду справедливости неравенства в другую сторону,

$$n_\alpha^{2(s-1)} \cdot n_{\alpha\beta}^s = n_{\alpha\beta}^{s-1}.$$

Мы доказали тем самым, что $x \leqslant n_{\alpha\beta}^{s-1}$.

Ввиду полной дедекиндовости структуры S для любых ее элементов u, v_μ справедливо неравенство

$$u\sum_\mu v_\mu \leqslant \sum_\mu v_\mu \cdot \prod_\mu \Big(u + \sum_{\mu' \neq \mu} v_{\mu'}\Big) = \sum_\mu v_\mu \Big(u + \sum_{\mu' \neq \mu} v_{\mu'}\Big).$$

В силу этого неравенства

$$x \leqslant \sum_{\beta' \neq \beta} \Big(n_{\alpha\beta'}^s \cdot \sum_{\gamma \neq \beta'} n_{\alpha\gamma}^s\Big).$$

Так как по доказанному выше

$$n_{\alpha\beta'}^s \cdot \sum_{\gamma \neq \beta'} n_{\alpha\gamma}^s \leqslant n_{\alpha\beta'}^{s-1},$$

то $x \leqslant \sum\limits_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta'}^{s-1}$, а потому

$$x \leqslant n_{\alpha\beta}^{s-1} \cdot \sum_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta'}^{s-1}.$$

Так как в другую сторону неравенство очевидно, то

$$x = n_{\alpha\beta}^s \sum_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta'}^s = n_{\alpha\beta}^{s-1} \cdot \sum_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta'}^{s-1}$$

для $s = 1, 2, \ldots$ Но

$$n_{\alpha\beta}^0 \cdot \sum_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta'}^0 = 0,$$

следовательно, $x = 0$. Лемма доказана.

В силу лемм 8 и 9, мы получаем прямые разложения

$$n_\alpha^{2s} = \dot{\sum_\beta} n_{\alpha\beta}^s. \tag{8}$$

Меняя теперь ролями разложения (1), мы получим для элементов m_β^s и $m_{\beta\alpha}^s$ аналоги лемм 6, 7, 8 и 9 и придем, таким образом, к прямым разложениям

$$m_\beta^{2s} = \dot{\sum_\alpha} m_{\beta\alpha}^s. \tag{8'}$$

На основании двух последних равенств, мы получаем продолжения прямых разложений (6) для k_{2s} $(s = 1, 2, \ldots)$:

$$k_{2s} = \sum_{\alpha}^{\cdot} \sum_{\beta}^{\cdot} n_{\alpha\beta}^{s} = \sum_{\beta}^{\cdot} \sum_{\alpha}^{\cdot} m_{\beta\alpha}^{s}. \tag{9}$$

ЛЕММА 10.

$$n_{\alpha\beta}^{s}\theta \leqslant m_{\beta\alpha}^{s}.$$

Действительно,

$$n_{\alpha\beta}^{s}\theta_{\beta} = n_{\alpha}^{2s}(\theta_{\beta}\varphi_{\alpha})^{s}\theta_{\beta} = n_{\alpha}^{2s}\theta_{\beta}(\varphi_{\alpha}\theta_{\beta})^{s} \leqslant m_{\beta}^{2s}(\varphi_{\alpha}\theta_{\beta})^{s} = m_{\beta\alpha}^{s}.$$

ЛЕММА 11.

$$z = n_{\alpha\beta}^{s} \cdot \sum_{(\beta'\alpha') \neq (\beta, \alpha)} m_{\beta'\alpha'}^{s} = 0.$$

Действительно, по лемме 10,

$$z\theta_{\beta} \leqslant m_{\beta\alpha}^{s};$$

с другой стороны,

$$z\theta_{\beta} \leqslant \sum_{(\beta', \alpha') \neq (\beta, \alpha)} m_{\beta'\alpha'}^{s}\theta_{\beta} = \sum_{\alpha' \neq \alpha} m_{\beta\alpha'}^{s},$$

откуда

$$z\theta_{\beta} \leqslant m_{\beta\alpha}^{s} \sum_{\alpha' \neq \alpha} m_{\beta\alpha'}^{s} = 0, \quad z\theta_{\beta}\varphi_{\alpha} = 0.$$

Но в силу леммы 7 $z(\bar{\theta}_{\beta}\varphi_{\alpha})^{s} = 0$, а потому

$$z \leqslant z(\bar{\theta}_{\beta}\varphi_{\alpha})^{s} + z(\theta_{\beta}\varphi_{\alpha})(\bar{\theta}_{\beta}\varphi_{\alpha})^{s-1} + \ldots + z(\theta_{\beta}\varphi_{\alpha})^{s} = 0,$$

т. е. $z = 0$.

ЛЕММА 12.

$$m_{\beta\alpha}^{s} \leqslant n_{\alpha\beta}^{s} + \sum_{\beta' \neq \beta}^{\cdot} \sum_{\alpha'}^{\cdot} m_{\beta'\alpha'}^{s}.$$

Доказательство. По лемме 7, меняя роли первого и второго разложений (1), получим

$$m_{\beta\alpha}^{s}\bar{\varphi}_{\alpha}\theta_{\beta} \leqslant m_{\beta\alpha}^{s-1}.$$

Следовательно,

$$m_{\beta\alpha}^{s}\bar{\varphi}_{\alpha} \leqslant m_{\beta\alpha}^{s}\bar{\varphi}_{\alpha}\theta_{\beta} + m_{\beta\alpha}^{s}\bar{\varphi}_{\alpha}\bar{\theta}_{\beta} \leqslant m_{\beta\alpha}^{s-1} + \sum_{\beta' \neq \beta} \sum_{\alpha'} m_{\beta'\alpha'}^{s}.$$

С другой стороны, меняя снова роли первого и второго разложений (1), по лемме 10 получим

$$m_{\beta\alpha}^{s}\varphi_{\alpha} \leqslant n_{\alpha\beta}^{s}.$$

Следовательно,

$$m_{\beta\alpha}^{s} \leqslant m_{\beta\alpha}^{s}\varphi_{\alpha} + m_{\beta\alpha}^{s}\bar{\varphi}_{\alpha} \leqslant n_{\alpha\beta}^{s} + m_{\beta\alpha}^{s-1} + \sum_{\beta' \neq \beta} \sum_{\alpha'} m_{\beta'\alpha'}^{s}.$$

Предполагая теперь, что для индексов, меньших s, лемма уже доказана (для $s = 0$ она тривиальна), имеем

$$m_{\beta\alpha}^{s-1} \leqslant n_{\alpha\beta}^{s-1} + \sum_{\beta' \neq \beta} \sum_{\alpha'} m_{\beta'\alpha'}^{s-1} \leqslant n_{\alpha\beta}^{s} + \sum_{\beta' \neq \beta} \sum_{\alpha'} m_{\beta'\alpha'}^{s},$$

откуда

$$m_{\beta\alpha}^{s}\leqslant n_{\alpha\beta}^{s}+\sum_{\beta'\neq\beta}\sum_{\alpha'}m_{\beta'\alpha'}^{s}.$$

Целью всего предыдущего исследования является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если последовательность центров пары прямых разложений (1) единицы вполне дедекиндовой структуры на конечном месте достигает нуля или, что равносильно этому, последовательность коммутантов пары прямых разложений (1) на конечном месте достигает единицы, то эти разложения обладают прямо подобными продолжениями.*

Доказательство. Если для некоторого s $k_{2s}=1$, то в разложениях (1)

$$a_\alpha=n_\alpha^{2s},\quad b_\beta=m_\beta^{2s}.$$

Продолжения (9) прямых разложений (1) прямо подобны, ибо в силу лемм 11 и 12 элемент $n_{\alpha\beta}^{s}$ замещает $m_{\beta\alpha}^{s}$ во втором из разложений (9), и по соображениям симметрии элемент $m_{\beta\alpha}^{s}$ замещает $n_{\alpha\beta}^{s}$ в первом из разложений (9).

А. Курош доказал аналогичную теорему для того частного случая, когда каждое из разложений (1) содержит *два* слагаемых [(2), теорема 1]. Как следствие из доказанной теоремы, мы получаем другую теорему Куроша [(1), теорема 4], утверждающую существование прямо подобных продолжений для двух таких прямых разложений (1), центр которых содержится в одном из прямых слагаемых. Действительно, в предположениях этой теоремы второй центр заданных разложений равен нулю.

Если условия теоремы 1 выполнены, то формулы (7) позволяют даже конкретно указать прямо подобные продолжения разложений (1). Так, например, если обращается в нуль второй центр заданных разложений, $z_2=0$ (а потому $k_2=1$), то искомые продолжения мы получим, разложив a_α и b_β по формулам

$$a_\alpha=\dot{\sum_\beta}a_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha=\dot{\sum_\beta}a_\alpha[(a_\alpha+\overline{b}_\beta)\,b_\beta+\overline{a}_\alpha],$$

$$b_\beta=\dot{\sum_\alpha}b_\beta\varphi_\alpha\theta_\beta=\dot{\sum_\alpha}b_\beta[(b_\beta+\overline{a}_\alpha)\,a_\alpha+\overline{b}_\beta].$$

В этих продолжениях прямые слагаемые

$$a_\alpha[(a_\alpha+\overline{b}_\beta)\,b_\beta+\overline{a}_\alpha]\quad\text{и}\quad b_\beta[(b_\beta+\overline{a}_\alpha)\,a_\alpha+\overline{b}_\beta]$$

взаимно замещают друг друга.

Доказанные леммы позволяют высказать также следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Если S — вполне дедекиндова структура со свойством* (*) (2) *и если сумма коммутантов пары разложений* (1) *равна единице структуры, то эти разложения обладают прямо подобными продолжениями.*

В самом деле, при наших обозначениях

$$n_\alpha^{2s} = \sum_\beta n_{\alpha\beta}^s, \quad m_\beta^{2s} = \sum_\alpha m_{\beta\alpha}^s \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Суммируя по s, получаем

$$a_\alpha = \sum_\beta n_{\alpha\beta}, \quad b_\beta = \sum_\alpha m_{\beta\alpha},$$

где

$$n_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{\infty} n_{\alpha\beta}^s, \quad m_{\beta\alpha} = \sum_{s=1}^{\infty} m_{\beta\alpha}^s.$$

Полученные разложения — прямые, ибо, в силу условия (*),

$$n_{\alpha\beta}^s \cdot \sum_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta'} = n_{\alpha\beta}^s \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta}^t = 0,$$

а потому снова, в силу условия (*),

$$n_{\alpha\beta} \cdot \sum_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta'} = \sum_{s=1}^{\infty} n_{\alpha\beta}^s \cdot \sum_{\beta' \neq \beta} n_{\alpha\beta'} = 0.$$

Аналогично

$$m_{\beta\alpha} \cdot \sum_{\alpha' \neq \alpha} m_{\beta\alpha'} = 0.$$

Подобным же образом, используя условие (*) и леммы 11 и 12, мы убедимся, что получаемые продолжения разложений (1) прямо подобны.

Предположим, что в структуре S выполнено свойство (**): если x и y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — элементы структуры, причем $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant \ldots$, то

$$x \cdot \sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x y_i.$$

Свойство (**) есть усиление свойства (*) и выполняется заведомо, если S — структура нормальных делителей некоторой группы.

Если k — сумма коммутантов k_s пары разложений (1) в структуре S со свойством (**), то коммутант пары разложений единицы фактор-структуры $1/k$, индуцируемых разложениями (1), равен k. В самом деле, в силу (**)

$$a_\alpha (b_\beta + k) = a_\alpha \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (b_\beta + k_s) = \sum_{s=1}^{\infty} a_\alpha (b_\beta + k_s) \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} k_{s+1} = k,$$

а потому

$$\sum_{\alpha,\beta} (a_\alpha + k)(b_\beta + k) = k + \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha (b_\beta + k) = k.$$

Ввиду этого рассмотрение в общем случае *трансфинитной* последовательности коммутантов не представляет особого интереса.

Поступило
3.VI.1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Курош А. Г., Изоморфизмы прямых разложений. Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 7 (1943), 185—202.

[2] Курош А. Г., Изоморфизмы прямых разложений. II, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 10 (1946), 47—72.

M. GRAYEV. ISOMORPHISMS OF DIRECT DECOMPOSITIONS IN DEDEKIND STRUCTURES

SUMMARY

The present paper continues the structure theory of direct decompositions expounded in Kurosh's papers ([1]), ([2]).

We consider a completely Dedekind structure S the unit of which has direct decompositions

$$1 = \dot{\sum_{\alpha}} a_\alpha = \dot{\sum_{\beta}} b_\beta. \tag{1}$$

Besides the *center* of the pair of decompositions (1) ([1]) we introduce the notion of *commutant*. We put $k_0 = 0$ and define the sth commutant k_s of the pair of decompositions (1) by the recurrent formula

$$k_s = \sum_{\alpha,\beta} (a_\alpha + k_{s-1})(b_\beta + k_{s-1}) \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

The term is justified by the fact that in case S is the structure of normal subgroups of a group G, the commutant of the group is contained in the first commutant of any pair of direct decompositions of the group G.

If for a certain finite index s $k_s = 1$, then the s th center of the pair of decompositions (1) *is zero and vice versa. In this case $z_i \leqslant k_{s-i}$ ($i = 1, 2, \ldots, s$), where z_i denotes the ith center.*

THEOREM 1. *If the sequence of centers of the pair of direct decompositions* (1) *of the unit in a completely Dedekind structure attains zero at a finite index or, which is an equivalent condition, the sequence of commutants of the pair of direct decompositions* (1) *attains the unit at a finite index, then these decompositions possess directly similar refinements*

Kurosh has proved an analogous theorem for the particular case where the decompositions (1) consist of two summands each. As a corollary of Theorem 1 we obtain another theorem due to Kurosh which asserts the existence of directly similar refinements of the two direct decompositions (1) the center of which is contained in one of the direct summands.

The proof of Theorem 1 enables us to obtain effectively the directly similar refinements of the decompositions (1). For instance, if the second

center of the given decompositions is zero, then the required refinements can be obtained by decomposing a_α and b_β by the formulae

$$a_\alpha = \sum_{\beta}^{\cdot} a_\alpha [(a_\alpha + \bar{b}_\beta) b_\beta + \bar{a}_\alpha], \quad b_\beta = \sum_{\alpha}^{\cdot} b_\beta [(b_\beta + \bar{a}_\alpha) a_\alpha + \bar{b}_\beta]$$

where

$$\bar{a}_\alpha = \sum_{\alpha' \neq \alpha}^{\cdot} a_{\alpha'}, \quad \bar{b}_\beta = \sum_{\beta' \neq \beta}^{\cdot} b_{\beta'}.$$

The direct summands $a_\alpha [(a_\alpha + \bar{b}_\beta) b_\beta + \bar{a}_\alpha]$ and $b_\beta [(b_\beta + \bar{a}_\alpha) a_\alpha + \bar{b}_\beta]$ in these refinements can be substituted for one another.

THEOREM 2. *If S is a completely Dedekind structure with the property* (*) (²) *and if the sum of commutants of the pair of decompositions* (1) *is the unit of the structure, then these decompositions possess directly similar refinements.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 47—58 Série mathématique

А. И. ТИХОМИРОВ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МАЛЬЦЕВА О РАСЩЕПЛЯЕМЫХ АЛГЕБРАХ *

(*Представлено академиком* О. Ю. Шмидтом)

Теорема Мальцева о единственности (с точностью до внутренних автоморфизмов) разложения ассоциативной алгебры конечного ранга в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры обобщается в настоящей работе на один более широкий класс алгебр (уже бесконечного ранга).

В работе рассматриваются ассоциативные алгебры над основным полем P, в общем случае бесконечного ранга, обладающие, однако, нильпотентным радикалом. Алгебра G называется *расщепляемой*, если она содержит такую полупростую подалгебру $\mathfrak{A}$, эквивалентную над P фактор-алгебре G/R алгебры G по радикалу R, что имеет место полупрямое разложение

$$G = R + \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Как известно (теорема Wedderburn'а), всякая сепарабельная алгебра конечного ранга (т. е. такая алгебра конечного ранга, что центры простых компонент ее фактор-алгебры по радикалу сепарабельны над P) расщепляема. Разложение (1) будет называться *расщеплением* алгебры G.

Два расщепления алгебры G

$$G = R + \mathfrak{A} = R + \mathfrak{A}'$$

будут называться *сопряженными*, если $\mathfrak{A}$ переводится в $\mathfrak{A}'$ некоторым внутренним автоморфизмом алгебры G, порожденным элементом из радикала. При этом, следуя Мальцеву ([1]), мы называем внутренним автоморфизмом алгебры G, порожденным элементом r, отображение (являющееся, как легко видеть, автоморфизмом)

$$g \to g^r = g - gr - r'g + r'gr,$$

где элемент r' связан с r соотношениями

$$rr' = r'r = r + r'. \tag{2}$$

Если алгебра G обладает единицей e, то это отображение будет внутренним автоморфизмом в обычном смысле, порожденным элементом $e - r$.

---

* Автор работы, молодой московский алгебраист Александр Иванович Тихомиров, скончался 2 апреля 1945 г. после тяжелой болезни. Результаты работы были доложены автором в алгебраическом научно-исследовательском семинаре Московского гос. университета. Работа подготовлена к печати мною при участии В. М. Курочкина. *А. Курош.*

Для элемента r из радикала элемент r', удовлетворяющий соотношениям (2), всегда существует и однозначно определен: если $r^n=0$, то $r'=-\sum_{k=1}^{n-1} r^k$.

А. И. Мальцев ([1]) доказал теорему о сопряженности любых двух расщеплений сепарабельной алгебры конечного ранга. Мы докажем следующую более общую теорему:

Если расщепляемая алгебра G обладает нильпотентным радикалом R, причем фактор-алгебра G/R имеет конечный ранг и сепарабельна, то любые два расщепления алгебры G сопряжены между собой.

Эту теорему можно было бы доказать непосредственным сведением на теорему Мальцева. Она вытекает, однако, из формулируемых и доказываемых ниже теорем 1 и 2, причем доказательство будет, в применении к алгебрам конечного ранга, отличным от доказательства Мальцева.

Введем сперва следующее определение:

Тело A (т. е. алгебра с делением над полем P) будет называться *допустимым*, если теорема о сопряженности расщеплений справедлива для всякой расщепляемой алгебры G с единицей, радикал которой имеет показатель 2, т. е. $R^2=0$ и, кроме того, $G/R \simeq A$.

ТЕОРЕМА 1. *Если расщепляемая алгебра G обладает нильпотентным радикалом R, причем*

$$G/R \simeq A'_{n_1} \dot{+} A''_{n_2} \dot{+} \ldots \dot{+} A^{(k)}_{n_k},$$

где $\dot{+}$ есть символ двусторонней прямой суммы, $A^{(i)}_{n_i}$ — полное кольцо матриц порядка n_i над телом $A^{(i)}$ и все тела A', A'', ..., $A^{(k)}$ — допустимые, то любые два расщепления алгебры G сопряжены между собой.

Доказательство теоремы распадается на три части: в первой предполагается наличие в G единицы, а показатель радикала считается равным двум, во второй рассматривается случай, когда показатель радикала равен любому n, в третьей отбрасывается предположение о существовании единицы.

1. Алгебра G обладает единицей e; $R^2=0$.

Доказательство будем вести индукцией по числу $m=\sum_{i=1}^{k} n_i^2$. При $m=1$, т. е. $G/R \simeq A'$, теорема верна ввиду допустимости тела A'. Пусть она уже доказана для случая, когда соответствующая сумма не больше числа $m-1$ и докажем ее для m.

Пусть даны расщепления

$$G = R + \mathfrak{A} = R + \mathfrak{A}^*, \tag{3}$$

где

$$\mathfrak{A} = A'_{n_1} \dot{+} A''_{n_2} \dot{+} \ldots \dot{+} A^{(k)}_{n_k},$$

$$\mathfrak{A}^* = A^{*\prime}_{n_1} \dot{+} A^{*\prime\prime}_{n_2} \dot{+} \ldots \dot{+} A^{*(k)}_{n_k},$$

$$A^{(i)} \simeq A^{*(i)}, \quad i=1, 2, \ldots, k.$$

Нетрудно видеть, что e служит единицей каждого из вторых слагаемых расщеплений (3): если $e = r + c$, где $r \subset R$, $c \subset \mathfrak{A}$, то

$$c = ec = rc + c^2,$$

откуда $rc = 0$ и $c = c^2$, а поэтому

$$0 = r^2 = (e-c)^2 = e^2 - ec - ce + c^2 = e - c,$$

т. е. $c = e$, $r = 0$.

11. Пусть $k > 1$. Так как

$$e = \sum_{i=1}^{k} e_i = \sum_{i=1}^{k} e_i^*,$$

где e_i, e_i^* — единицы алгебр $A_{n_i}^{(i)}$ и, соответственно, $A_{n_i}^{*(i)}$, то

$$R = eRe = \left(\sum_{i=1}^{k} e_i\right) R \left(\sum_{j=1}^{k} e_j\right) = \sum_{i,\, j=1}^{k} e_i R e_j,$$

причем справа стоит прямая сумма двусторонних идеалов алгебры G: ввиду $R^2 = 0$ будет

$$G(e_i R e_j) = \left(R + \sum_{i=1}^{k} A_{n_i}^{(i)}\right)(e_i R e_j) = A_{n_i}^{(i)} e_i R e_j = e_i A_{n_i}^{(i)} R e_j \subseteq e_i R e_j$$

и это же имеет место при умножении на G справа; с другой стороны, если $\sum_{i,\,j} r_{ij} = 0$, где $r_{ij} \subset e_i R e_j$, то

$$r_{\alpha\beta} = e_\alpha \left(\sum_{i,\,j} r_{ij}\right) e_\beta = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k.$$

Пусть S_1 будет сумма всех идеалов $e_i R e_j$, кроме одного, например, кроме $e_\alpha R e_\beta$. Рассмотрим алгебру $\overline{G}_1 = G/S_1$. Если при естественном гомоморфизме G на $\overline{G}_1$ образами подалгебр R, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^*$ будут, соответственно, $\overline{R}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{A}^*}$, то имеют место полупрямые разложения

$$\overline{G}_1 = \overline{R} + \overline{\mathfrak{A}} = \overline{R} + \overline{\mathfrak{A}}^*.$$

Действительно, из $g = r + a$ следует $\bar{g} = \bar{r} + \bar{a}$. Если же $\bar{r} + \bar{a} = \bar{0}$, то $r + a \subset S_1$, отсюда, ввиду $S_1 \subset R$, следует $a = 0$, т. е. $\bar{a} = \bar{0}$ и поэтому $\bar{r} = \bar{0}$. При этом мы имеем

$$\mathfrak{A} \simeq \overline{\mathfrak{A}} \simeq \mathfrak{A}^*,$$

так как если $a_1, a_2 \subset \mathfrak{A}$ и $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$, то $a_1 - a_2 \subset S_1 \subset R$, откуда $a_1 - a_2 = 0$ ввиду $R \cap \mathfrak{A} = 0$. Таким образом,

$$\overline{\mathfrak{A}} = \sum_{i=1}^{k} \overline{A_{n_i}^{(i)}}, \quad \overline{\mathfrak{A}^*} = \sum_{i=1}^{k} \overline{A_{n_i}^{*(i)}},$$

где

$$\overline{A^{(i)}} \simeq \overline{A^{*(i)}} \simeq A^{(i)} \simeq A^{*(i)}.$$

Радикалом в $\overline{G}_1$ будет

$$\overline{R} = \overline{e_\alpha R e_\beta} \simeq e_\alpha R e_\beta.$$

111. Пусть $\alpha \neq \beta$. Алгебра

$$\overline{G}_1' = \overline{R} + \overline{A}_{n_\alpha}^{(\alpha)} + \overline{A}_{n_\beta}^{(\beta)} = \overline{R} + \overline{A_{n_\alpha}^{*(\alpha)}} + \overline{A_{n_\beta}^{*(\beta)}}$$

будет, как легко видеть, алгеброй с единицей. Заметим, что соответственные элементы обоих расщеплений (3) всегда лежат в одном смежном классе по радикалу. Пусть $\bar{e}'$, $\bar{e}_\alpha$, $\bar{e}_\beta$, $\bar{e}_\alpha^*$, $\bar{e}_\beta^*$ будут соответственно единицами алгебр $\overline{G}_1'$, $\overline{A}_{n_\alpha}^{(\alpha)}$, $\overline{A}_{n_\beta}^{(\beta)}$, $\overline{A_{n_\alpha}^{*(\alpha)}}$, $\overline{A_{n_\beta}^{*(\beta)}}$. Тогда

$$\bar{e}' = \bar{e}_\alpha + \bar{e}_\beta = \bar{e}_\alpha^* + \bar{e}_\beta^*,$$

причем $\bar{e}_\alpha^* = \bar{e}_\alpha - \bar{r}_1$, где $\bar{r}_1 \subset \overline{R}$, а поэтому $\bar{e}_\beta^* = \bar{e}_\beta + \bar{r}_1$.

Покажем теперь, что

$$\overline{A_{n_\alpha}^{*(\alpha)}} + \overline{A_{n_\beta}^{*(\beta)}} = (\overline{A}_{n_\alpha}^{(\alpha)})^{\bar{r}_1} + (\overline{A}_{n_\beta}^{(\beta)})^{\bar{r}_1}.$$

Действительно, пусть

$$\overline{a_\alpha^*} = \bar{a}_\alpha + \bar{r}, \tag{4}$$

где $\overline{a_\alpha^*} \subset \overline{A_{n_\alpha}^{*(\alpha)}}$, $\bar{a}_\alpha \subset \overline{A_{n_\alpha}^{(\alpha)}}$, $\bar{r} \subset \overline{R}$. Умножая (4) *справа* на $\bar{e}_\alpha^* = \bar{e}_\alpha - \bar{r}_1$, получим

$$\overline{a_\alpha^*} = \bar{a}_\alpha - \bar{a}_\alpha \bar{r}_1, \tag{5}$$

так как $\bar{r}\bar{e}_\alpha = (\bar{e}_\alpha \bar{r} \bar{e}_\beta)\bar{e}_\alpha = \bar{0}$ и $\bar{r}\bar{r}_1 = 0$. Точно так же, умножая равенство $\overline{a_\beta^*} = \bar{a}_\beta + \bar{r}'$ *слева* на $\bar{e}_\beta^* = \bar{e}_\beta + \bar{r}_1$, получим

$$\overline{a_\beta^*} = \bar{a}_\beta + \bar{r}_1 \bar{a}_\beta.$$

Однако, ввиду (5),

$$\bar{a}_\alpha^{\bar{r}_1} = (\bar{e}' + \bar{r}_1)\bar{a}_\alpha(\bar{e}' - \bar{r}_1) = \bar{a}_\alpha - \bar{a}_\alpha \bar{r}_1 = \bar{a}_\alpha^*$$

и аналогично $\bar{a}_\beta^* = \bar{a}_\beta^{\bar{r}_1}$.

Равенство

$$\overline{A_{n_\delta}^{*(\delta)}} = (\overline{A_{n_\delta}^{(\delta)}})^{\bar{r}_1}$$

имеет место также и для всех δ, отличных от α и β. Действительно, умножая равенство $\bar{e}_\delta^* = \bar{e}_\delta + \bar{r}_\delta$ само на себя, получим $\bar{e}_\delta^* = \bar{e}_\delta$ ввиду $\bar{e}_\delta \bar{r}_\delta = \bar{r}_\delta \bar{e}_\delta = 0$, а умножая равенство $\bar{a}_\delta^* = \bar{a}_\delta + \bar{r}_\delta'$ на $\bar{e}_\delta^* = \bar{e}_\delta$, получим $\bar{a}_\delta^* = \bar{a}_\delta$. Однако,

$$\bar{a}_\delta^{\bar{r}_1} = \bar{a}_\delta - \bar{a}_\delta \bar{r}_1 + \bar{r}_1 \bar{a}_\delta = \bar{a}_\delta = \bar{a}_\delta^*.$$

Этим в рассматриваемом случае доказано равенство $\overline{\mathfrak{A}}^* = \overline{\mathfrak{A}}^{\bar{r}_1}$.

112. Пусть теперь $\alpha = \beta$, т. е.

$$\overline{G}_1 = \bar{e}_\alpha \overline{R} \bar{e}_\alpha + \overline{A}_{n_1}' + \ldots + \overline{A_{n_k}^{(k)}} = \bar{e}_\alpha \overline{R} \bar{e}_\alpha + \overline{A_{n_1}^{*\prime}} + \ldots + \overline{A_{n_k}^{*(k)}}.$$

Рассмотрим алгебру

$$\overline{G}_1' = \bar{e}_\alpha \overline{R} \bar{e}_\alpha + \overline{A_{n_\alpha}^{(\alpha)}} = \bar{e}_\alpha \overline{R} \bar{e}_\alpha + \overline{A_{n_\alpha}^{*(\alpha)}}.$$

Она обладает единицей $\bar{e}_\alpha$, тела $\overline{A}^{(\alpha)}$ и $\overline{A^{*(\alpha)}}$ по условию допустимы и $n_\alpha^2 \leqslant m-1$. Следовательно, по индуктивному предположению,

$$\overline{A_{n_\alpha}^{*(\alpha)}} = (\overline{A_{n_\alpha}^{(\alpha)}})^{\bar{r}_1}, \quad \text{где } \bar{r}_1 \subset \overline{R};$$

а так как при $\delta \neq \alpha$ будет, как и выше,

$$\overline{A_{n_\delta}^{*(\delta)}} = \overline{A_{n_\delta}^{(\delta)}} = (\overline{A_{n_\delta}^{(\delta)}})^{\bar{r}_1},$$

то и в этом случае имеет место равенство $\overline{\mathfrak{A}}^* = \overline{\mathfrak{A}}^{\bar{r}_1}$.

Таким образом, всегда в случае 11 имеет место равенство $\overline{\mathfrak{A}}^* = \overline{\mathfrak{A}}^{r_1}$, которое можно записать в виде сравнения

$$\mathfrak{A}^* \equiv \mathfrak{A}^{r_1} (\mathrm{mod}\, S_1) \quad r_1 \subset e_\alpha R e_\beta.$$

Это позволяет говорить об алгебре

$$G_1 = S_1 + \mathfrak{A}^{r_1} = S_1 + \mathfrak{A}^*,$$

обладающей единицей e, причем $e_i R e_j = e_i^{r_1} R e_j^{r_1}$ для всех слагаемых $e_i R e_j$ идеала S_1.

Обозначим теперь через S_2 идеал, состоящий из тех же слагаемых, что и S_1, за исключением одного. Повторяя проведенное выше доказательство, мы получим

$$\mathfrak{A}^* \equiv (\mathfrak{A}^{r_1})^{r_2} = \mathfrak{A}^{r_1 + r_2} (\mathrm{mod}\, S_2).$$

Строим теперь алгебру

$$G_2 = S_2 + \mathfrak{A}^{r_1 + r_2} = S_2 + \mathfrak{A}^*,$$

причем снова $e_i R e_j = e_i^{r_1 + r_2} R e_j^{r_1 + r_2}$ и G_2 обладает единицей; обозначаем через S_3 идеал, содержащий все слагаемые идеала S_2, кроме одного, и т. д. Мы дойдем до идеала S_{k^2-1}, содержащего только одно слагаемое вида $e_i R e_j$, и построим алгебру

$$G_{k^2-1} = S_{k^2-1} + \mathfrak{A}^{r_1 + r_2 + \ldots + r_{k^2-1}} = S_{k^2-1} + \mathfrak{A}^*.$$

С аналогичным положением мы встречались, однако, при рассмотрении алгебры G/S_1, когда было доказано равенство $\overline{\mathfrak{A}}^* = \overline{\mathfrak{A}}^{\bar{r}_1}$. Таким образом,

$$\mathfrak{A}^* = (\mathfrak{A}^{r_1 + r_2 + \ldots + r_{k^2-1}})^{r_{k^2}} = \mathfrak{A}^{r_1 + r_2 + \ldots + r_{k^2}}.$$

Случай $k > 1$ этим полностью исчерпан.

12. Пусть теперь $k = 1$, т. е.

$$G = R + A_n = R + A_n^*,$$

где $n^2 = m$ и, как прежде, $R^2 = 0$, G содержит единицу e и тело A допустимое. Рассмотрим алгебру

$$G_1 = R + (e_{11} A + \mathfrak{A}_1) = R + (e_{11}^* A^* + \mathfrak{A}_1^*),$$

где

$$e = e^* = \sum_{i=1}^{n} e_{ii} = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}^*, \quad \mathfrak{A}_1 = \sum_{i,\, j=2}^{n} e_{ij} A, \quad \mathfrak{A}_1^* = \sum_{i,\, j=2}^{n} e_{ij}^* A^*.$$

Для этой алгебры $k = 2$, $n_1^2 + n_2^2 = 1 + (n-1)^2 \leqslant m - 1$, а поэтому

$$e_{11}^* = e_{11}^r, \quad \mathfrak{A}_1^* = \mathfrak{A}_1^r, \quad A^* = A^r.$$

Пусть

$$e_{21}^* = e_{21}^r + h, \quad h \subset R. \tag{6}$$

Тогда

$$A_n^* = A_n^{r+s},$$

где $s = -e_{12}^r h$.

Действительно, умножим (6) слева на $e^*_{22}=e^r_{22}$ и справа на $e^*_{11}=e^r_{11}$. Мы получим, что $e^*_{21}=e^r_{21}+e^r_{22}he^r_{11}$, т. е.

$$h=e^r_{22}he^r_{11}. \tag{7}$$

Аналогично, если $e^*_{12}=e^r_{12}+h'$, $h'\subset R$, то

$$h'=e^r_{11}h'e^r_{22}. \tag{8}$$

Умножая (6) слева на $e^*_{12}=e^r_{12}+h'$, мы получим

$$e^*_{11}=e^r_{11}+h'e^r_{21}+e^r_{12}h=e^r_{11},$$

откуда $h'e^r_{21}=-e^r_{12}h$, или ввиду (8),

$$h'=e^r_{11}h'e^r_{22}=e^r_{11}he^r_{21}e^r_{12}=-e^r_{11}e^r_{12}he^r_{12}=-e^r_{12}he^r_{12}. \tag{9}$$

Умножая (6) слева на $e^*_{j2}=e^r_{j2}$, $j\geqslant 2$, мы получим

$$e^*_{j1}=e^r_{j1}+e^r_{j2}h, \quad j\geqslant 2, \tag{10}$$

а умножая равенство $e^*_{12}=e^r_{12}-e^r_{12}he^r_{12}$ справа на $e^*_{2j}=e^r_{2j}$, $j\geqslant 2$, получим

$$e^*_{1j}=e^r_{1j}-e^r_{12}he^r_{1j}, \quad j\geqslant 2. \tag{11}$$

Теперь при $\alpha>1$ имеем

$$e^{r+s}_{\alpha 1}=(e^r_{\alpha 1})^s=e^r_{\alpha 1}+se^r_{\alpha 1}-e^r_{\alpha 1}s=e^r_{\alpha 1}-e^r_{12}he^r_{\alpha 1}+e^r_{\alpha 1}e^r_{12}h=e^r_{\alpha 1}+e^r_{\alpha 2}h,$$

так как, ввиду (7), $he^r_{\alpha 1}=0$ при $\alpha>1$. Поэтому ввиду (10),

$$e^{r+s}_{\alpha 1}=e^*_{\alpha 1}, \quad \alpha>1.$$

Аналогично при $\alpha>1$ будет

$$e^{r+s}_{1\alpha}=(e^r_{1\alpha})^s=e^r_{1\alpha}+se^r_{1\alpha}-e^r_{1\alpha}s=e^r_{1\alpha}-e^r_{12}he^r_{1\alpha}+e^r_{1\alpha}e^r_{12}he=e^r_{1\alpha}-e^r_{12}he^r_{1\alpha},$$

а поэтому, по (11),

$$e^{r+s}_{1\alpha}=e^*_{1\alpha}, \quad \alpha>1.$$

Далее, ввиду (7), будет

$$e^{r+s}_{11}=(e^r_{11})^s=e^r_{11}+se^r_{11}-e^r_{11}s=e^r_{11}-e^r_{12}he^r_{11}+e^r_{11}e^r_{12}h=$$
$$=e^r_{11}-e^r_{12}he^r_{11}+e^r_{12}he^r_{11}=e^r_{12}=e^*_{11}.$$

Снова используя (7), мы получим при i, $j\geqslant 2$

$$e^{r+s}_{2j}=e^r_{2j}+se^r_{2j}-e^r_{2j}s=e^r_{2j}-e^r_{12}he^r_{2j}+e^r_{2j}e^r_{12}h=e^r_{2j}=e^*_{2j},$$
$$e^{r+s}_{i2}=e^r_{i2}+se^r_{i2}-e^r_{i2}s=e^r_{i2}-e^r_{12}he^r_{i2}+e^r_{i2}e^r_{12}h=e^r_{i2}=e^*_{i2},$$

а поэтому, ввиду равенства $e_{ij}=e_{i2}e_{2j}$,

$$e^{r+s}_{ij}=e^*_{ij}, \quad i,\ j\geqslant 2.$$

Покажем теперь, что $A^{r+s}=A^*$. Пусть $a\subset A$. Умножая (6) на $a^*=a^r$ справа, а затем слева, и вычитая один результат из другого, мы получим, что $a^rh=ha^r$. Теперь

$$a^{r+s}=a^r+sa^r-a^rs=a^r-e^r_{12}ha^r+a^re^r_{12}h=a^r=a^*,$$

так как $e^r_{12}ha^r=e^r_{12}a^rh=a^re^r_{12}h$.

Этим доказано равенство $A^*_n=A^{r+s}_n$. Таким образом, первая часть доказательства закончена.

2. Алгебра G обладает единицей e; $R^n=0$.

Эту часть доказательства мы будем вести индукцией по числу n, так как для $n=2$ теорема уже доказана выше; будем считать, иными словами, что теорема справедлива в наших предположениях, но при условии, что показатель радикала меньше n.

Рассмотрим алгебру

$$\overline{G}=G/R^2=\overline{R}+\overline{\mathfrak{A}}=\overline{R}+\overline{\mathfrak{A}}^*.$$

Она обладает единицей, ее радикал $\overline{R}=R/R^2$ имеет показатель 2 и $G/\overline{R}\simeq \simeq G/R\simeq A'_{n_1}+\ldots+A^{(k)}_{n_k}$. Следовательно, для G теорема справедлива, т. е. $\overline{\mathfrak{A}^*}=\overline{\mathfrak{A}^r}$, откуда $\mathfrak{A}^*\equiv\mathfrak{A}^r \pmod{R^2}$, т. е. $a^*-a^r\subset R^2$. Таким образом, можно рассмотреть алгебру

$$G'=R^2+\mathfrak{A}^r=R^2+\mathfrak{A}^*.$$

Она удовлетворяет нашим условиям, но показатель ее радикала R^2 есть $\left[\frac{n+1}{2}\right]\leqslant n-1$, а поэтому

$$\mathfrak{A}^*=(\mathfrak{A}^r)^{r_1}=\mathfrak{A}^{r+r_1-rr_1},$$

что и требовалось доказать.

3. Алгебра G не содержит единицы, но, как и прежде, $R^n=0$, а также $G/R\simeq A'_{n_1}+\ldots+A^{(k)}_{n_k}$, где все $A^{(i)}$ допустимы.

Рассмотрим алгебру

$$G_1=G+Pe=R+\mathfrak{A}+Pe=R+\mathfrak{A}^*+Pe,$$

где e — элемент, дополняющий базу G над P до базы G_1 над P, причем $e^2=e$, $ge=eg=g$ для любого g из G.

G_1 — ассоциативная алгебра с единицей e. Покажем, что алгебра G_1 удовлетворяет всем условиям, при которых рассматривался случай 2.

Покажем сперва, что радикал R_1 алгебры G_1 совпадает с R. Очевидно, что $R\subseteq R_1$. Воспользуемся теперь разложением

$$G_1=R+(\mathfrak{A}+Pe_2),$$

где $e_2=e-e_1$, e_1 — единица алгебры $\mathfrak{A}$; тогда

$$e_1e_2=e_1(e-e_1)=e_1-e_1=0,\quad e_2e_1=0,\quad e_2^2=e_2(e-e_1)=e_2.$$

Если $r_1\subset R_1$, то

$$r_1=r+a+pe_2;$$

умножая r_1 на e_2, получим

$$r_1e_2=re_2+pe_2$$

(так как $ae_2=ae_1e_2=0$), откуда

$$pe_2=(r_1-r)e_2,$$

т. е. $pe_2\subset R_1$, но так как $e_2^2=e_2$, то $p=0$, т. е. $r_1=r+a$. Отсюда

$$r_1-r=a=a_1+a_2+\ldots+a_k,$$

где справа стоит разложение элемента a в соответствии с разложением $\mathfrak{A}$ в прямую сумму простых алгебр. Если e_i будет единица соответствующего простого слагаемого, то из $R_1\supset a$ следует $R_1\supset ae'_i=a_i$, $i=1,2,\ldots,k$, откуда при $a_i\neq 0$

$$R\supset\mathfrak{A}a_i\mathfrak{A}\supset e'_i,$$

что невозможно, так как элемент e'_i идемпотентен. Поэтому $a_i=0$ для всех i, т. е. $a=0$ и $R_1=R$.

Рассмотрим фактор-алгебру

$$G_1/R\simeq\mathfrak{A}+e_2P=A'_{n_1}+A''_{n_2}+\ldots+A^{(k)}_{n_k}+e_2P.$$

Все тела $A^{(i)}$ допустимы; докажем, что *основное поле P также допустимо.*

Пусть

$$\tilde{G} = R + P = R + P^*$$

будет расщепляемая алгебра с единицей. Если $p^* = p + r$, то $p^* p^{-1} \supset P^*$, а поэтому

$$p^* p^{-1} = e + r p^{-1} = e^*,$$

так как единственный элемент из P^*, лежащий в одном классе с e, есть e^*. Так как, однако, единицы e и e^* полей P и P^* должны совпадать, как мы знаем, с единицей алгебры $\tilde{G}$, то $e = e^*$, т. е. $rp^{-1} = 0$, откуда $r = 0$. Этим доказано равенство $P = P^*$.

Таким образом, алгебра с единицей G_1 удовлетворяет всем условиям теоремы и поэтому

$$\mathfrak{A}^* + Pe = (\mathfrak{A} + Pe)^r, \quad r \subset R.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^r$, так как единственный элемент из $\mathfrak{A}^* + Pe$, лежащий в одном смежном классе с a, есть a^*, а автоморфизм, порожденный элементом r, перемещает элементы из $\mathfrak{A}$ лишь внутри их классов.

Этим заканчивается доказательство теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое тело конечного ранга над P, центр которого сепарабелен над P, допустимо.*

Доказательство. Докажем сперва допустимость конечных сепарабельных (коммутативных) расширений основного поля P (допустимость самого P доказана выше). Пусть K—такое расширение, $K = P(a)$, где a—корень неприводимого над P полинома $f(x)$. Пусть, далее,

$$G = R + K = R + K^*,$$

причем алгебра G обладает единицей и $R^2 = 0$.

Если элемент a перестановочен с каждым элементом из R, то для любого полинома $\varphi(x)$ из формулы Тейлора следует

$$\varphi(a + r) = \varphi(a) + r\varphi'(a).$$

В частности, если $a^* = a + r$, то

$$f(a^*) = f(a) + rf'(a).$$

Однако, из $K^* \simeq K$ следует, что $f(a^*) = f(a) = 0$, откуда $rf'(a) = 0$, т. е. $r = 0$ ввиду сепарабельности K над P. Таким образом, $K = K^*$, т. е. в этом случае K допустимо.

Пусть, однако, элемент a перестановочен не со всеми элементами из R. Совокупность элементов вида $ra - ar$, где $r \subset R$, образует двусторонний идеал S. Фактор-алгебра $\overline{G} = G/S$ обладает единицей, ее радикал $\overline{R}$ имеет показатель 2, причем

$$\overline{G} = \overline{R} + \overline{K} = \overline{R} + \overline{K}^*.$$

Так как элемент $\overline{a}$ уже перестановочен со всеми элементами из $\overline{R}$, то, по доказанному, $\overline{K} = \overline{K}^*$, что можно записать в виде сравнения

$$K \equiv K^* \pmod{S}.$$

Если в алгебре $S+K=S+K^*$ элемент a^* имеет вид $a^*=a+h$, $h\subset S$, то, по определению идеала S, $h=ra-ar$, $r\subset R$, т. е.

$$a^*=a+ra-ar=a^r$$

и поэтому

$$K^r=[P(a)]^r=P(a^r)=P(a^*)=K^*,$$

что доказывает допустимость поля K.

Пусть теперь дано некоммутативное тело A конечного ранга над P с сепарабельным центром K и пусть

$$G=R+A=R+A^*, \tag{12}$$

причем алгебра G обладает единицей и $R^2=0$.

Мы знаем, что $A\simeq A^*$. Пусть A' будет тело, инверсно изоморфное телам A и A^*. Рассмотрим прямое произведение алгебр G и A' над полем P

$$G_1=G\times_P A'.$$

Оно может быть выполнено при выборе базы в G из линейно независимых над P элементов, исходя из первого или из второго из расщеплений (12) алгебры G:

$$G_1=(R\times_P A')+(A\times_P A')=(R\times_P A')+(A^*\times_P A'). \tag{13}$$

Если

$$A=\sum_{i=}^{n} a_iK, \qquad A'=\sum_{j=1}^{n} a_j'K',$$

то

$$A\times_P A'=\sum_{i,j} a_ia_j'(K\times_P K')=\Big(\sum_{i,j} a_ia_j'K\Big)\times_P K'.$$

Но первый множитель есть, очевидно,

$$A\times_K A'=P_n\times_P K,$$

поэтому

$$A\times_P A'=P_n\times_P K\times_P K'.$$

Благодаря сепарабельности поля K и изоморфного ему поля K', имеем

$$K\times_P K'=e_1K_1+\ldots+e_sK_s, \tag{14}$$

где справа — прямая сумма, а все поля K_i *сепарабельны*. Действительно, это известно для случая нормального поля K, причем в этом случае $K_i=K$, $i=1, 2, \ldots, s$. Если же поле K не нормально, то, присоединяя к нему все корни того сепарабельного полинома, которому удовлетворяет примитивный элемент поля K, мы получим сепарабельное нормальное поле Q, содержащее K. Для Q уже доказано существование прямого разложения

$$Q\times_P Q'=e_1'Q+e_2'Q+\ldots+e_m'Q.$$

С другой стороны, прямое разложение (14) имеет место ввиду сепарабельности и коммутативности K. Очевидно, что каждый идемпотент e_α, $\alpha=1, 2, \ldots, s$, будет суммой некоторых идемпотентов e_β'. Если

$$e_i = e'_{f_1} + \ldots + e'_{f_l}$$

и для $k_i \subset K_i$

$$k_i e_i = q_{f_1} e'_{f_1} + \ldots + q_{f_l} e'_{f_l}, \quad q_{f_j} \subset Q,$$

то, очевидно, соответствие $k_i \rightarrow q_{f_j}$ будет изоморфным отображением поля K_i внутри сепарабельного поля Q. Отсюда следует сепарабельность поля K_i.

Таким образом,

$$G_1 / (R \times_P A') \simeq A \times_P A' = P_n \times_P (e_1 K_1 + \ldots + e_s K_s) =$$
$$= (K_1)_n \dot{+} \ldots \dot{+} (K_s)_n,$$

причем последняя сумма — прямая и все K_i допустимы. Так как к тому же $(R \times_P A')^2 = 0$ и алгебра G_1 обладает единицей, то, по теореме 1, первое из расщеплений (13) переводится во второе внутренним автоморфизмом, порожденным некоторым элементом r_1 из $R \times_P A'$; в частности, $A^* = A_1^{r_1}$, так как каждый элемент остается в одном классе вычетов по радикалу. Таким образом, если $a \subset A$ и $a^* = a + r$, $r \subset R$, причем $r \neq 0$, то ввиду $a^* = a^{r_1} = a + r_1 a - a r_1$ будет $r = r_1 a - a r_1$.

Если

$$r_1 = \sum_{i=1}^{m} a'_i r^{(i)},$$

где элементы a'_i из A' линейно независимы над P, а поэтому и над G, и если единица $e_{A'}$ тела A' принадлежит к рассматриваемой базе (a'_i) тела A' над P, то

$$e_{A'} \cdot r = \left(\sum_{i=1}^{m} a'_i r^{(i)} \right) a - a \left(\sum_{i=1}^{m} a'_i r^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^{m} a'_i (r^{(i)} a - a r^{(i)}).$$

Отсюда следует, что $e_{A'}$ совпадает с одним из a'_i, например, с a'_1, а коэффициенты $r^{(i)} a - a r^{(i)}$ при $i \neq 1$ равны нулю, в то время как

$$r = r' a - a r'$$

и поэтому $a^* = a + r'a - ar' = a^{r'}$. Элемент r' содержится в R и не зависит от выбора элемента a. Таким образом, $A^* = A^{r'}$, что доказывает теорему 2.

В формулировке основной теоремы, непосредственно вытекающей из теорем 1 и 2, о фактор-алгебре G/R предполагалось, что она конечного ранга и сепарабельна. Существенность этих ограничений показывают следующие два примера.

Пример 1. Пусть K будет поле рациональных функций от одной неизвестной t над полем P, $K = P(t)$. Рассмотрим алгебру G над P, имеющую вид

$$G = uK + K, \tag{15}$$

где $u^2 = 0$, $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u$, $ku = uk$ для $k \subset K$. Так как

$$(uK)^2 = 0, \quad G / uK \simeq K,$$

то uK будет радикалом алгебры G, причем показателя 2. Отображение

$$f(t) \rightarrow f(t) + uf'(t)$$

будет изоморфным отображением поля K внутрь алгебры G:

$$[f(t) + uf'(t)] - [g(t) + ug'(t)] = [f(t) - g(t)] + u[f'(t) - g'(t)],$$
$$[f(t) + uf'(t)] \cdot [g(t) + ug'(t)] =$$
$$= f(t)g(t) + u[f'(t)g(t) + f(t)g'(t)] = f(t)g(t) + u[f(t)g(t)]'.$$

Обозначим образ K при этом отображении через K^*. Тогда для G существует расщепление

$$G = uK + K^*,$$

отличное от (15), причем K не может переводиться в K^* никаким внутренним автоморфизмом ввиду коммутативности G. Поле K оказывается недопустимым.

Пример 2. Пусть $K = P(a)$ есть несепарабельное расширение основного поля P, имеющее степень n, и $f(x)$ — неприводимый над P полином, причем $f(a) = 0$ и $f'(a)$ также равно нулю. Рассмотрим алгебру $G = uK + K$ над P, где $u^2 = 0$, $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u$, $ku = uk$ для $k \subset K$. Отображение

$$\sigma g(a) = g(a) + ug'(a),$$

где $g(x)$ — полином из кольца $P[x]$, будет изоморфным отображением поля K внутрь алгебры G: если $g(a) = h(a)$ и если, например,

$$g(x) = h(x) + f(x)q(x),$$

то

$$g'(x) = h'(x) + f'(x)q(x) + f(x)q'(x)$$

и поэтому $g'(a) = h'(a)$, откуда $\sigma g(a) = \sigma h(a)$. Изоморфизм этого соответствия проверяется так же, как в примере 1. Если $\sigma K = K^*$, то расщепления

$$G = uK + K = uK + K^*$$

не переводятся друг в друга внутренним автоморфизмом ввиду коммутативности алгебры G.

Московский гос. университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3.VI.1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мальцев А. И., О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры, Доклады Ак. Наук СССР, XXXVI (1942), 46—50.

A. TIHOMIROV. A GENERALIZATION OF MALCEV'S THEOREM ON CLEFT ALGEBRAS

SUMMARY

In the paper we consider associative algebras over the fundamental field P of infinite rank in general, possessing, however, the nilpotent radical. An algebra G is said to be *cleft* if it contains a such semi-simple subalgebra $\mathfrak{A}$ equivalent over P to the factor algebra G/R of G by the radical R that the semi-direct decomposition

$$G = R + \mathfrak{A}$$

called *cleaving* of G takes place. Two cleavings of the algebra G

$$G = R + \mathfrak{A} = R + \mathfrak{A}'$$

are called *conjugate* if $\mathfrak{A}$ can be mapped onto $\mathfrak{A}'$ by an inner automorphism of G generated by an element of the radical (as to the definition of inner automorphism of an algebra without unit, see ([1])).

The following theorem generalized a theorem of Malcev ([1]) on conjugateness of any two cleavings of a separable algebra of finite rank:

If the cleft algebra G possesses the nilpotent radical R and the factor algebra G/R has finite rank and is separable, then any two cleavings of G are conjugate to one another.

A sfield (that is, a division algebra over P) A will be called *admissible*, in the theorem on conjugateness of cleavings in valid for every cleft algebra G with the unit, whose radical has the exponent 2, i. e. $R^2 = 0$, and, moreover, $G/R \simeq A$.

Then the above theorem follows immediately from the following two theorems:

THEOREM 1. *If the cleft algebra G possesses the nilpotent radical R and*

$$G/R \simeq A'_{n_1} \dot{+} A''_{n_2} \dot{+} \cdots \dot{+} A^{(k)}_{nk},$$

where $\dot{+}$ is the sign of two-sided direct sum, $A^{(i)}_{n_i}$ is the complete ring of matrices of order n over the sfield $A^{(i)}$ and all the sfields A', A'', ..., $A^{(k)}$ are admissibles, then any two cleavings of the algebra G are conjugate to one another.

THEOREM 2. *Any sfield of finite rank over P whose center is separable over P is admissible.*

Examples 1 and 2 show that neither the field of rational functions $P(t)$ over the fundamental field P nor a non-separable extension $P(a)$ are admissible.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 59—74 Série mathématique

G. KUREPA

ENSEMBLES DE SUITES DÉNOMBRABLES D'ENTIERS (CONTRIBUTION AU PROBLÈME DE SUSLIN)

(*Présenté par* **I. M. Vinogradow,** *de l'Académie*)

L'article contient la démonstration d'existence de quelques ensembles ordonnés ou des espaces topologiques et se rattache au problème de Suslin.

L'ensemble C. Les suites d'entiers intervenant dans le présent article seront de la forme

$$n_0, n_1, \ldots, n_\xi, \ldots, \tag{1}$$

n_ξ parcourant la suite 0, 1, 2, ... des entiers $\geqslant 0$, ξ parcourant la suite des nombres ordinaux $< \alpha$, α parcourant tous les nombres ordinaux entre 0 et Ω. Le signe

$$(n_0, n_1, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha} \tag{1'}$$

désignera la suite (1).

On conviendra que deux suites $(n_0, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}$, $(m_0, \ldots, m_\xi, \ldots)_{\xi<\beta}$ ne seront égales que si $\alpha=\beta$ et $n_\xi = m_\xi$ pour tout $\xi < \alpha$.

Nous désignerons par

$$C \tag{2}$$

l'ensemble de toutes les suites (1′) ordonné partiellement par la relation $<$ que voici: pour deux éléments $(n_0, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}$, $(m_0, \ldots, m_\xi, \ldots)_{\xi<\beta}$ la relation

$$(n_0, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha} < (m_0, \ldots, m_\xi, \ldots)_{\xi<\beta} \tag{3}$$

équivaudra à ce que

$$\alpha < \beta, \quad n_\xi = m_\xi \quad (\xi < \alpha).$$

Manifestement, C est un ensemble partiellement ordonné par rapport à $<$ et on voit qu'il jouit des deux propriétés suivantes:

I. Tout sous-ensemble ordonné de C est bien ordonné.

II. Aucun point de C n'est précédé de deux points incomparables de C *; ce qu'on peut exprimer en disant que l'ensemble C est un tableau ramifié par rapport à la relation $<$ de (3) [([1]), p. 73].

* Ce qui veut dire ceci: quels que soient les éléments a, b, c de C vérifiant $a<c$, $b<c$, alors, ou bien $a=b$ ou bien $a<b$, ou bien $b<a$.

P o s i t i o n d u p r o b l è m e. Il y a un grand nombre de problèmes se présentant dans l'étude de l'ensemble C *; le problème qui nous intéresse en ce moment est celui-ci:

T étant un sous-ensemble infini non-dénombrable quelconque de C, est-il vrai qu'au moins une de deux propositions suivantes subsiste:

1) T contient un ensemble ordonné infini non dénombrable;

2) T contient un ensemble infini non dénombrable dont les points sont deux à deux incomparables.

Ne sachant pas résoudre le problème pour n'importe quel $T \subseteq C$ **, nous allons indiquer deux cas intéressants où nous le résoudrons. Pour les énoncer, nous avons besoin de deux fonctions (φ et ψ) que nous allons définir.

F o n c t i o n d e f r é q u e n c e ψ. Quels que soient l'entier $k \geqslant 0$ et la suite $a \equiv (n_0, n_1, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}$ d'entiers $\geqslant 0$, nous désignons par

$$\psi(k, a) \tag{4}$$

le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné des indices ξ vérifiant $n_\xi = k$; en particulier, si $n_\xi \neq k$ pour tout $\xi < \alpha$, nous poserons $\psi(k, a) = 0$.

E x e m p l e: Si $a = (2, 2, 1, 5, 8, 1, 2)$, on aura $\psi(2, a) = 3$, $\psi(5, a) = 1$.

Pour un sous-ensemble non vide T de C, nous poserons:

$$\psi(k, T) = \underset{a \in T}{\text{borne sup}}\, \psi(k, a), \tag{4'}$$

$$\psi T = \underset{k<\omega}{\text{borne sup}}\, \psi(k, T). \tag{4''}$$

Par exemple, $\varphi(k, C) = \Omega$, quel que soit $k < \omega$.

F o n c t i o n d e r a n g φ. Quels que soient $k < \omega$ et $a \equiv (n_0, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha} \in C$, nous poserons

$$\varphi(k, a) = \underset{\xi}{\text{borne sup}}\, \xi, \tag{5}$$

ξ parcourant tous les $\xi < \alpha$ vérifiant $n_\xi = k$, si $n_\xi \neq k$ $(\xi < \alpha)$, nous poserons

$$\varphi(k, a) = -1.$$

Enfin, quels que soient $k < \omega$ et $0 \subset T \subseteq C$, nous poserons

$$\varphi(k, T) = \underset{a \ni T}{\text{borne sup}}\, \varphi(k, a). \tag{5'}$$

E x e m p l e s. Si a désigne $(1, 2, 8, 4, 3, 6, 6)$, alors $\varphi(6, a) = 6$, $\varphi(5, a) = -1$, $\varphi(1, a) = 0$, $\varphi(k, C) = \Omega$ pour tout $k < \omega$.

B u t d e l ' a r t i c l e (l'énoncé du Théorème). Nous prouverons le

THÉORÈME. *Un sous-ensemble T de C [cf. (2)] contiendra un ensemble infini non dénombrable de points deux à deux incomparables, pourvu qu'il vérifie l'une de deux conditions que voici:*

---

* C'est que C généralise en quelque sorte l'ensemble de nombres réels, les éléments $(n_0, n_1, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\omega}$ de C pouvant jouer le rôle des nombres irrationnels, comme l'a montré Baire dans sa théorie des fonctions réelles.

** Le problème est équivalent au problème de Suslin [cf. Thèse, loc. cit. ([1]), pp. 106, 124 et 132 (équivalence $P_2 \rightleftarrows P_5$)].

1° *puissance* $T \geqslant \aleph_1$, $\psi T < \Omega$ [cf. (4″) et théorème 1 ci-dessous];

2° *il y a un* $k < \omega$ *verifiant* $\varphi(k, T) = \Omega$, $\psi(k, T) < \Omega$ [cf. (4′), (5′) et théorème 2 ci-dessous].

Voici une conséquence facile du théorème précédent:

F étant une famille infinie non dénombrable d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels, F contient une sous-famille Φ de puissance $\aleph_1$ dont aucun élément a, ne soit un segment initial d'un autre élément de Φ distinct de **a**.*

Tableaux ramifiés de M. Aronszajn ([3]). Par ailleurs, le cas difficile du problème ci-dessus c'est le cas où l'ensemble $T \subset C$ est un tableau ramifié de M. Aronszajn, c'est-à-dire où T vérifie les conditions suivantes:

a) pour tout $\alpha < \Omega$ l'ensemble de points a de T pour chacun desquels l'ensemble bien ordonné de tous les points de T précedant le point a est d'un type α, non vide et au plus dénombrable;

b) tout sous-ensemble ordonné de T est au plus dénombrable.

En nous servant de la fonction ψ de tout-à-l'heure, nous montrerons l'existence d'un pareil T (cf. n° 5 ci-après).

1. Définitions des symboles γT, $R_\alpha T$ $(\alpha < \gamma T)$. Dans ce qui suit,

$$T \tag{6}$$

désignera un sous-ensemble non vide quelconque de l'ensemble partiellement ordonné C [cf. (2)].

Quel que soit le nombre ordinal α

$$R_\alpha T \tag{7}$$

désignera l'ensemble des $a \in T$ pour chacun desquels le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné de tous les points de T dont chacun précède le point a est égal à α **; nous désignerons par

$$\gamma T \tag{8}$$

le premier α verifiant $R_\alpha T = 0$.

Nous avons ainsi la suite de sous-ensembles non vides de T

$$R_0 T,\ R_1 T,\ \ldots,\ R_\alpha T,\ \ldots \quad (\alpha < \gamma T). \tag{9}$$

Manifestement,

$$T = \sum_\alpha R_\alpha T \quad (\alpha < \gamma T); \tag{9′}$$

2. LEMME 1. *Quels que soient: l'ensemble $T \subseteq C$, l'indice $\beta < \gamma T$, la suite croissante d'indices $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_\xi < \ldots$ vérifiant $\nu_\xi < \gamma T$ $(\xi < \beta)$,*

---

* C'est qu'en désignant par C_0 la famille de tous les ensembles bien ordonnés non vides de nombres rationnels et en définissant pour tout nombre rationnel r et pour tout $a \in C_0$ le nombre ordinal $\psi(r, a)$ d'une manière analogue que dans (4) on démontre que $\psi(r, a) = 0$ ou 1 et dès lors $\psi C_0 = 1$ [cf. (4″)].

Ainsi on retrouverait par une autre voie des résultats de mon article ([2]).

** Ainsi $R_0 T$ désignera l'ensemble des premiers points de T; d'une manière générale, $R_\alpha T = R_0\big(T - \sum_{\xi < \alpha} R_\xi T\big)$.

et la suite de points $b_\xi \in R_{\nu_\xi} T$ $(\xi < \beta)$, *en désignant par* T_0 *l'ensemble des* $b_\xi (\xi < \beta)$, *la relation* $b_\xi \in R_{\eta(\xi)} T_0$ *entraînera* $\xi \geqslant \eta(\xi)$ *pour tout* $\xi < \beta$.

Le lemme veut dire que, quel que soit $\xi < \beta$, l'ensemble bien ordonné des elements $b_\xi (\xi < \beta)$, dont chacun précède b_ξ est d'un type d'ordre $\leqslant \xi$. Et ceci résulte immédiatement du fait que, quel que soient les or dinaux $\varphi < \psi < \beta$, on n'aura pas $b_\psi < b_\varphi$.

LEMME 2. *Si* $\gamma T = \Omega$ *et puissance* $R_\alpha T \leqslant \aleph_0 (\alpha < \Omega)$, *il y a un indice* $k < \omega$ *et une suite transfinie d'éléments de* T

$$b_0, b_1, \ldots, b_\xi, \ldots \quad (\xi < \Omega),$$

tels que

$$\varphi(k, b_\xi) > \xi \quad (\xi < \Omega) \text{ et } b_\xi \neq b_\zeta \quad (\xi < \zeta < \Omega). \tag{10}$$

En effet, soit, pour tout $\alpha < \Omega$

$$m = (m_0^\alpha, m_1^\alpha, \ldots, m_\xi^\alpha, \ldots)_{\xi < \alpha_0}$$

un élément de $R_{\omega+\alpha} T$; à cause de $\gamma T = \Omega$, m^α existe, et le rang α_0 de m^α vérifiera $\alpha_0 \geqslant \omega + \alpha$.

Dans la suite non-dénombrable d'entiers

$$m_1^3, m_2^4, \ldots, m_{\alpha+1}^{\alpha+3}, \ldots \quad (\alpha < \Omega),$$

il y a en aura un, soit k, s'y présentant une infinité non dénombrable de fois; il y aura donc une suite

$$\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_\xi < \ldots \quad (\nu_\xi < \Omega, \ \xi < \Omega)$$

verifiant

$$m_{\nu_\xi + 1}^{\nu_\xi + 3} = k.$$

Dès lors $\varphi(k, m^{\nu_\xi + 3}) \geqslant \nu_\xi + 1 > \nu_\xi$. Or, $n_\xi \geqslant \xi$. Ainsi, les m^α étant deux à deux distincts, il suffira de poser

$$m^{\nu_\xi + 3} = b_\xi \quad (\xi < \Omega)$$

pour se rendre compte de la validité du lemme 2.

En désignant par T_0 l'ensemble des b_ξ $(\xi < \Omega)$ qu'on vient de construire, le lemme 1 entraîne, vu la relation (10), le

Corollaire 1. Quels que soient $\alpha < \gamma T_0$ et $b \in R_\alpha T_0$, on aura $\varphi(k, b) > \alpha$.

3. LEMME 3. *S'il y a un* $k < \omega$ *tel que* $\varphi(k, T) = \Omega$, $\psi(k, T) < \Omega$, *et si chacun des ensembles* $R_\alpha T$ $(\alpha < \Omega)$ *est au plus dénombrable, il existe une suite transfinie d'ordinaux*

$$\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(\alpha), \ldots \quad (\alpha < \Omega),$$

une suite transfinie de points de T

$$t_0, t_1, \ldots, t_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega),$$

et un ordinal

$$\delta < \Omega$$

tels que, quel que soit $\alpha < \Omega$ *on ait*

$$\alpha < \pi(\alpha) < \Omega, \quad t_\alpha \in R_{\pi(\alpha)}T, \quad \varphi(k, t_\alpha) \leqslant \delta \text{ [cf. (5)].}$$

Ce qui importe dans le lemme 3 c'est l'existence d'un δ pareil.

Supposons que le lemme 3 ne soit pas vrai. On pourrait donc faire correspondre à tout $\delta < \Omega$ un ordinal $\alpha(\delta) < \Omega$ tel que les relations $\alpha(\delta) \leqslant \beta < \Omega$, $a \in R_\beta T$ entraînent $\varphi(k, a) > \delta$; pour déterminer $\alpha(\delta)$ sans ambiguité, nous poserons, $\alpha'(\delta)$ étant le plus petit ordinal pareil, $\alpha(\delta) = \alpha'(\delta) + \delta$. On voit sans peine que si $\xi < \zeta < \Omega$, alors $\alpha(\xi) < \alpha(\zeta) < \Omega$.

Définissons alors la suite d'indices

$$\delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_\xi < \ldots \quad (\xi < \Omega)$$

comme il suit: $\delta_0 = 1$; δ_1 sera le premier nombre ordinal supérieur au nombre

$$\underset{a \in R_\xi T}{\text{borne}} \ \underset{(\xi < \alpha(\delta_0))}{\text{sup}} \ \varphi(k, a);$$

d'une manière générale, quel que soit $0 < \alpha < \Omega$, le nombre δ_α sera le premier nombre ordinal supérieur au plus grand des deux nombres

$$\underset{\xi < \alpha}{\text{borne sup}}\, \delta_\xi, \quad \underset{a \in R_\xi T,}{\text{borne}} \ \underset{\xi < \alpha(\delta_\eta), \eta < \alpha}{\text{sup}} \ \varphi(k, a); \tag{11}$$

la puissance de chacun des symboles α, $R_\xi T$, $\alpha(\delta_\eta)$ étant $\leqslant \aleph_0$, le nombre δ_α serait bien détérminé et $< \Omega$ pour tout $\alpha < \Omega$.

En considérant alors la suite des $R_{\delta_\alpha} T$ $(\alpha < \Omega)$, les relations

$$\xi < \eta < \Omega, \quad x \in R_{\alpha(\delta_\xi)}T, \quad y \in R_{\alpha(\delta_\eta)}T \tag{12}$$

entraîneraient d'après (11)

$$\varphi(k, x) < \varphi(k, y). \tag{13}$$

En effet, en vertu de la définition de $\alpha(\delta_\eta)$, si $y \in R_{\alpha(\delta_\eta)}T$, alors $\varphi(k, y) > \delta_\eta$; d'autre part, vu $\alpha(\delta_\xi) < \alpha(\delta_\eta)$, de la définition de δ_η [cf. (11)], on déduit: $\varphi(k, x) < \delta_\eta$, et à fortiori la formule (13).

Ceci étant, considérons le nombre ordinal ψT; celui-ci étant, par hypothèse $< \Omega$, considérons l'ordinal

$$\mu = \psi T + \omega \tag{14}$$

et l'ensemble non vide $R_{\alpha(\delta_\mu)}T$. Soient: $a \in R_{\alpha(\delta_\mu)}T$ et, pour tout $\xi < \mu$, a_ξ l'élément de $R_{\alpha(\delta_\xi)}T$ précédant le point a; on aura

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_\xi < \ldots < a \quad (a_\xi \in R_{\alpha(\delta_\xi)}T, \ \xi < \mu) \tag{15}$$

et d'après (12) et (13),

$$\varphi(k, a_0) < \varphi(k, a_1) < \ldots < \varphi(k, a_\xi) < \ldots < \varphi(k, a) \quad (\xi < \mu). \tag{15'}$$

Autrement dit, si $(n_0, \ldots, n_\alpha, \ldots)$ est l'élément a il y aura, d'aprés (15) et (15'):

un indice $\nu_1 \leqslant \varphi(k, a_1)$ vérifiant $n_{\nu_1} = k$;

un indice ν_ξ tel que $\underset{\eta < \xi}{\text{borne sup}}\, \varphi(k, a_\eta) < \nu_\xi \leqslant \varphi(k, a_\xi)$ et $n_{\nu_\xi} = k$, quel que soit $0 < \xi < \mu$. Il y aurait donc une suite croissante

$$\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_\xi < \ldots \quad (\xi < \mu)$$

telle que

$$n_{\nu_\xi} = k \quad (0 < \xi < \mu),$$

ce qui entraînerait d'après (14)

$$\psi(k, a) \geqslant \mu - 1 \quad \text{et} \quad \psi(k, a) > \psi T,$$

contrairement à la définition de $\psi(T)$ [cf. (4″)].

4. Démonstration du théorème. Les lemmes 1, 2, et 3 étant établis, nous en allons déduire notre théorème qui est équivalent aux théorèmes 1 et 2 que nous allons prouver.

THÉORÈME 1. *Quel que soit le sous-ensemble infini non dénombrable T de C vérifiant $\psi T < \Omega$, T contient un sous-ensemble infini non dénombrable de points deux à deux incomparables.*

Considérons la suite des sous-ensembles non vides de T

$$R_0 T, \ldots, R_\alpha T, \ldots \quad (\alpha < \gamma T);$$

chacun de ceux-ci étant composé de points deux à deux incomparables, le théorème est évident, pourvu que l'un des ensembles $R_\alpha T$ $(\alpha < \gamma T)$, soit infini non dénombrable. Nous pouvons donc supposer que, quel que soit $\alpha < \gamma T$, l'ensemble $R_\alpha T$ soit au plus dénombrable, ce qui, vu la non dénombrabilité de T entraîne $\gamma T = \Omega$.

Ainsi sont remplies les conditions du lemme 2, et soit T_0 l'ensemble de points $b_\alpha \in T$ $(\alpha < \Omega)$, dont on parle (cf. lemme 1) dans le lemme 2 et le corollaire 1.

D'après (10) T_0 sera non dénombrable et d'après le corollaire 1, on aura

$$\varphi(k, a) > \xi \tag{16}$$

pour tout $a \in R_\xi T_0$ et pour tout $\xi < \gamma T_0$.

Nous disons qu'il y a un

$$\zeta < \gamma T_0 \tag{17}$$

vérifiant puissance $R_\zeta T_0 = \aleph_1$. En effet, supposons que $R_\alpha T_0$ soit au plus dénombrable, quel que soit $\alpha < \gamma T_0$; T_0 étant non dénombrable, $\gamma T_0 = \Omega$.

Par hypothèse, $\psi T < \Omega$ ce qui, vu $\psi T_0 \leqslant \psi T$, entraîne $\psi T_0 < \Omega$ et donc

$$\psi(k, T_0) < \Omega. \tag{18}$$

D'autre part, $\gamma T_0 = \Omega$ et d'après (16), $\varphi(k, T_0) = \Omega$. Ainsi seraient remplies les conditions du lemme 3 et nous en déduirions l'existence: d'un $\delta < \Omega$, d'une suite $\pi(\alpha) < \Omega$ $(\alpha < \Omega)$ et d'une suite $t_\alpha \in R_{\pi(\alpha)} T_0$ tels que

$$\alpha < \pi(\alpha) < \Omega \quad \text{et} \quad \varphi(k, t_\alpha) \leqslant \delta \quad (\alpha < \Omega)$$

ce qui est incompatible avec la relation (16) du moment que $\xi > \delta$. La validité de (17) étant prouvée, le théorème 1 en résulte tout de suite.

THÉORÈME 2. *Si pour un sous-ensemble T de C il y a un $k < \omega$ vérifiant*

$$\varphi(k, T) = \Omega, \quad \psi(k, T) < \Omega,$$

T contient un sous-ensemble de puissance $\aleph_1$ de points deux à deux incomparables [cf. (4′), (5′)].

En effet, de l'hypothèse $\varphi(k, T) = \Omega$ on déduit immédiatement, par le procédé de l'induction transfinie, l'existence d'une suite de points $b_\xi \in T$ $(\xi < \Omega)$, vérifiant (10) et le corollaire 1; et alors la démonstration du théorème 2 s'achève comme celle du théorème 1.

Ansi le théorème est complètement établi.

5. L'existence des tableaux ramifiés de M. Aronszajn, c'est-à-dire des tableaux ramifiés T vérifiant ces trois conditions:

a) $\gamma T = \Omega$;

b) puissance $R_\alpha T \leqslant \aleph_0$ $(\alpha < \Omega)$;

c) tout sous-ensemble ordonné de T est au plus dénombrable.

Pour définir un T pareil, définissons la suite

$$T_0, T_1, \ldots, T_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega) \tag{19}$$

de sous-ensembles de C comme il suit:

$$T_\alpha = R_\alpha C \quad \text{pour tout} \quad \alpha < \omega;$$

soit $\omega \leqslant \alpha < \Omega$ et supposons que l'on ait déterminé la suite

$$T_0 \; T_1, \ldots, T_\xi, \ldots \quad (\xi < \alpha)$$

de manière qu'en posant

$$S_\alpha = \sum_\xi T_\xi \quad (\xi < \alpha),$$

les conditions suivantes soient remplies:

(1_α) $\gamma S_\alpha = \alpha$ [cf. (8)];

(2_α) $R_\xi S_\alpha = T_\xi \subseteq R_\xi C$ pour tout $\xi < \alpha$ [cf. (7)];

(3_α) quels que soient: $\xi < \zeta < \alpha$, $a \in T_\xi$ et l'entier k se présentant dans l'élément a de C *, l'ensemble T_ζ contient un élément a' succédant à a et vérifiant $\psi(k, a) = \psi(k, a')$ [cf. (4)].

Manifestement, l'ensemble $S_\omega = \sum_\alpha T_\alpha$ $(\alpha < \omega)$ vérifie les conditions (1_ω), (2_ω), (3_ω). D'une manière générale, on voit sans peine que si β est un ordinal de seconde espèce tel que, quel que soit $\alpha < \beta$, l'ensemble S_α soit défini et vérifie les conditions (1_α), (2_α), (3_α), alors l'ensemble $S_\beta = \sum_{\alpha<\beta} S = \sum_{\alpha<\beta} T_\alpha$ vérifie les conditions (1_β), (2_β), (3_β).

Pour définir T_α, distingons deux cas, suivant que l'ordinal α est de première ou de seconde espèce.

Dans le premier cas, T_α désignera l'ensemble des points de $R_\alpha C$ dont chacun succède à un élément de $T_{\alpha-1}$. Dans le second cas, soit

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \ldots \quad (n < \omega)$$

* Bien entendu, a est une suite d'entiers $\geqslant 0$.

une suite croissante d'ordinaux $<\alpha$ convergeant vers α. Pour définir $T_\alpha \subseteq R_\alpha C$, nous allons faire correspondre à un élément quelconque a de $\sum_{n<\omega} T_{\alpha_n}$ un certain élément $\bar{a}$ de $R_\alpha C$ tel que $a < \bar{a}$ [cf. (3)]; en genéral, $\bar{a}$ sera variable avec a.

L'indice n étant défini par $a \in T_{\alpha_n}$, soit k un certain entier se présentant dans a; alors, par hypothèse 3, il y a un $a^1 \in T_{\alpha_{n+1}}$ tel que

$$a < a^1, \quad \psi(k, a) = \psi(k, a^1);$$

d'une manière générale, soit $1 < r < \omega$ et supposons que l'on ait déterminé la suite $a, a^1, a^2, \ldots, a^{r-1}$, telle que

$$a < a^1 < a^2 < \ldots < a^{r-1}, \quad a^i \in T_{\alpha_{n+i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, r-1)$$

et

$$\psi(k, a) = \psi(k, a^i) \quad (i < r);$$

alors, par hypothèse (3_α), il y a un élément, et nous en désignerons un certain par a^r, tel que

$$a^r \in T_{\alpha_{n+r}}, \quad a^{r-1} < a^r \quad \text{et} \quad \psi(k, a^{r-1}) = \psi(k, a^r)$$

et donc $\psi(k, a^r) = \psi(k, a)$.

La suite $a^1, a^2, \ldots, a^r, \ldots$ $(r < \omega)$ étant définie, nous désignerons par $\bar{a}$ l'élément bien déterminé de $R_\alpha C$ succédant à chacun des a^r. Ainsi est déterminé l'ensemble T_α de points $\bar{a}$, a parcourant l'ensemble dénombrable $\sum_n T_{\alpha_n}$ $(n < \omega)$.

En tous cas, T_α est défini et on se rend compte que l'ensemble $S_{\alpha+1} = \sum_{\xi \leq \alpha} T_\xi$ vérifie les conditions $(1_{\alpha+1}), (2_{\alpha+1}), (3_{\alpha+1})$.

La suite (19) étant définie, il suffit de poser

$$T = \sum_\alpha T_\alpha \quad (\alpha < \Omega) \tag{20}$$

pour se rendre compte que T est un tableau ramifié de M. Aronszajn, c. q. f. d.

Il y a lieu d'observer que le tableau T de (20) vérifie $\psi T = \omega$, et d'après le théorème 1, T contient un sous-ensemble de puissance $\aleph_1$ de points deux à deux incomparables.

Le problème de savoir si chaque tableau ramifié de M. Aronszajn extrait de C contient un ensemble de puissance $\aleph_1$ de points deux à deux incomparables est équivalent au problème de Suslin et, comme celui-ci, reste encore ouvert.

Institut de Mathématiques
Zagreb, Jugoslavija

Reçu
11. IV. 1946

LITTÉRATURE

[1] Kurepa G., Ensembles ordonnés et ramifiés (Thèse, Paris, 1935: aussi Publ. Math. Univ. Belgrade, IV, (1935), 1—138.

[2] Kurepa G., Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés. Comptes rendus, 205, (1937), 1033—1035 et Revista de Sciencias, Lima, XLII, 827—846; XLIII, 483—500.

[3] Kurepa G., Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés (tableaux ramifiés de M. Aronszajn), Publ. Math. Univ. de Belgrade, VI, (1937), 129—160.

ГЕОРГИЙ КУРЕПА. МНОЖЕСТВА СЧЕТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

(К ПРОБЛЕМЕ СУСЛИНА)

ПЕРЕВОД

Множество C. Последовательности целых чисел, встречающиеся в этой статье, будут иметь вид

$$n_0, n_1, \ldots, n_\xi, \ldots, \tag{1}$$

где n_ξ пробегает последовательность $0, 1, 2, \ldots$ целых чисел $\geqslant 0$, а ξ пробегает последовательность порядковых чисел $< \alpha$, где α пробегает все порядковые числа от 0 до Ω. Через

$$(n_0, n_1, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha} \tag{1'}$$

будем обозначать последовательность (1).

Условимся говорить, что две последовательности $(n_0, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}$ и $(m_0, m_1, \ldots, m_\xi, \ldots)_{\xi<\beta}$ равны в том и только в том случае, когда $\alpha=\beta$ и $n_\xi = m_\xi$ для всякого $\xi < \alpha$.

Обозначим через

$$C \tag{2}$$

множество всех последовательностей (1′), частично упорядоченное при помощи следующего закона: для двух элементов $(n_0, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}$, $(m_0, \ldots, m_\xi, \ldots)_{\xi<\beta}$ соотношение

$$(n_0, n_1, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha} < (m_0, m_1, \ldots, m_\xi, \ldots)_{\xi<\beta} \tag{3}$$

означает, что

$$\alpha < \beta, \quad n_\xi = m_\xi \quad (\xi < \alpha).$$

Ясно, что множество C частично упорядочено по отношению к знаку $<$, и мы видим, что оно обладает следующими свойствами:

I. Всякое упорядоченное подмножество множества C является вполне упорядоченным.

II. Ни для какой точки из C не существует двух предшествующих ей точек из C, которые несравнимы *; иными словами множество C есть *разветвленная таблица* по отношению к знаку $<$, определяемому соотношением (3) [([1]), стр. 73].

Постановка проблемы. Существует очень много проблем, возникающих при изучении множества C **; проблема, которая нас интересует в данный момент, такова:

Пусть T — любое *несчетное* подмножество множества C; должно ли всегда иметь место одно из двух предложений:

1) T содержит упорядоченное *несчетное* множество;

2) T содержит *несчетное* множество точек таких, что каждые две из них несравнимы.

---

* Это значит, что, каковы бы ни были элементы a, b, c из C, удовлетворяющие условию $a < c$, $b < c$, имеем всегда или $a = b$ или $a < b$ или $b < a$.

** Дело в том, что C в некотором смысле обобщает множество действительных чисел, ибо элементы $(n_0, n_1, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\omega}$ множества C могут играть роль иррациональных чисел, как показал Бэр в своей теории действительных функций.

Не умея решить эту проблему для произвольного $T \subseteq C$ *, мы укажем два интересных частных случая, в которых она нами разрешена. Чтобы их сформулировать, нам понадобится определить две функции (φ и ψ).

Функция ψ. Каковы бы ни были целое число $k \geqslant 0$ и последовательность $a \equiv (n_0, n_1, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}$ целых чисел $\geqslant 0$, мы обозначим через

$$\psi(k, a) \tag{4}$$

порядковый тип вполне упорядоченного множества индексов ξ, удовлетворяющих условию $n_\xi = k$; в частности, если $n_\xi \neq k$ для всех $\xi < \alpha$, мы положим $\psi(k, a) = 0$.

Пример. Если $a = (2, 2, 1, 5, 8, 1, 2)$, мы будем иметь $\psi(2, a) = 3$, $\psi(5, a) = 1$.

Для непустого множества T из C положим

$$\psi(k, T) = \underset{a \in T}{\text{borne sup}}\, \psi(k, a), \tag{4'}$$

$$\psi T = \underset{k<\omega}{\text{borne sup}}\, \psi(k, T). \tag{4''}$$

Например, $\psi(k, C) = \Omega$ для всякого $k < \omega$.

Функция φ. Каковы бы ни были $k < \omega$ и $a \equiv (n_0, \ldots, n_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha} \subset C$, положим

$$\varphi \qquad a) = \underset{\xi}{\text{borne sup}}\, \xi \tag{5}$$

для всех $\xi < \alpha$, для которых $n_\xi = k$; если же $n_\xi \neq k$ для всех $\xi < \alpha$, мы положим $\varphi(k, a) = -1$.

Наконец, каковы бы ни были $k < \omega$ и $0 \subset T \subseteq C$, положим

$$\varphi(k, T) = \underset{a \in T}{\text{supremum}}\, \varphi(k, a). \tag{5'}$$

Примеры. Если $a = (1, 2, 8, 4, 3, 6, 6)$, то $\varphi(6, a) = 6$, $\varphi(5, a) = -1$, $\varphi(1, a) = 0$, $\varphi(k, C) = \Omega$ для всякого $k < \omega$.

Цель статьи (формулировка теоремы). Нами будет доказана

ТЕОРЕМА. *Подмножество* T *множества* C [ср. (2)] *содержит несчетное множество точек попарно несравнимых, если оно удовлетворяет одному из следующих условий:*

1° *мощность* $T \geqslant \aleph_1$, $\psi T < \Omega$ [ср. (4″) и теорему 1 ниже],

2° *существует такое* $k < \omega$, *что* $\varphi(k, T) = \Omega$, $\psi(k, T) < \Omega$ [ср. (4′), (5′) и теорему 2 ниже].

Следствие. *Если* F — *несчетное семейство вполне упорядоченных множеств из рациональных чисел, то* F *содержит семейство* Φ *мощности* $\aleph_1$, *ни один из элементов которого* a *не является начальным элементом другого элемента из* Φ, *отличного от* a **.

---

* Эта проблема эквивалента проблеме Суслина [ср. ([1]), стр. 106, 124 и 132 — эквивалентность $P_2 \rightleftarrows P_5$].

** Обозначая через C_0 семейство всех непустых вполне упорядоченных множеств из рациональных чисел и определяя для всякого рационального r и для всякого $a \in C_0$ порядковое число $\psi(r, a)$ аналогично тому, как это указано в формуле (4), мы доказываем, что $\psi(r, a) = 0$ или 1, а значит $\psi C_0 = 1$ [ср. (4″)].

Таким образом, можно найти другим путем некоторые результаты моей статьи ([2]).

Разветвленные таблицы Ароншайна ([3]). Заметим еще, что трудным случаем вышепоставленной проблемы является тот, где множество $T \subset C$ есть разветвленная таблица Ароншайна, т. е. T удовлетворяет следующим условиям:

а) для всякого $\alpha < \Omega$ множество точек a из T, для каждой из которых вполне упорядоченное множество всех точек из T, предшествующих ей, имеет тип α, непусто и не более, чем счетно;

b) всякое упорядоченное подмножество множества T, не более, чем счетно.

Пользуясь ранее введенной функцией ψ, мы докажем существование такого T (ср. далее следующий п. 5).

1. Определение символов γT, $R_\alpha T$ $(\alpha < \gamma T)$. В дальнейшем

$$T \tag{6}$$

будет обозначать любое непустое подмножество частично упорядоченного множества C [ср. (2)].

Каково бы ни было порядковое число α

$$R_\alpha T \tag{7}$$

будет обозначать множество тех $a \subset T$, для каждого из которых порядковый тип вполне упорядоченного множества всех точек из T, каждая из которых предшествует a, равен α *; далее, обозначим через

$$\gamma T \tag{8}$$

первое α, удовлетворяющее $R_\alpha T = 0$.

Таким образом, мы имеем последовательность непустых подмножеств множества T

$$R_0 T,\ R_1 T,\ \ldots,\ R_\alpha T,\ \ldots \quad (\alpha < \gamma T). \tag{9}$$

Ясно, что

$$T = \sum_\alpha R_\alpha T \quad (\alpha < \gamma T). \tag{9'}$$

2. ЛЕММА 1. *Каковы бы ни были множество $T \subseteq C$, индекс $\beta < \gamma T$, возрастающая последовательность индексов $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_\xi < \ldots$, удовлетворяющих условию $\nu_\xi < \gamma T$ $(\xi < \beta)$, и последовательность точек $b_\xi \in R_{\nu_\xi} T$ $(\xi < \beta)$, соотношение $b_\xi \in R_{\eta(\xi)} T_0$ влечет за собой $\xi \geqslant \eta(\xi)$ для всякого $\xi < \beta$, где T_0 обозначает множество b_ξ $(\xi < \beta)$.*

Лемма утверждает, таким образом, что каково бы ни было $\xi < \beta$, вполне упорядоченное множество тех элементов b_ξ $(\xi < \beta)$, каждый из которых предшествует b_ξ, имеет порядковый тип $\leqslant \xi$. Но это непосредственно вытекает из того факта, что каковы бы ни были порядковые числа $\varphi < \psi < \beta$, соотношение $b_\psi < b_\varphi$ невозможно.

ЛЕММА 2. *Если $\gamma T = \Omega$ и мощность $R_\alpha T \leqslant \aleph_0$ $(\alpha < \Omega)$, то существует индекс $k < \omega$ и трансфинитная последовательность элементов из T*

---

* Таким образом, $R_0 T$ будет обозначать множество первых точек T и вообще $R_\alpha T = R_0 (T - \sum_{\xi < \alpha} R_\xi T)$.

$$b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_\xi,\ \ldots \quad (\xi < \Omega),$$

таких, что

$$\varphi(k,\ b_\xi) > \xi \quad (\xi < \Omega) \text{ и } b_\xi \neq b_\zeta \quad (\xi < \zeta < \Omega). \tag{10}$$

В самом деле, пусть для всякого $\alpha < \Omega$

$$m^\alpha = (m_0^\alpha,\ m_1^\alpha,\ \ldots,\ m_\xi^\alpha,\ \ldots)_{\xi < \alpha_0}$$

есть элемент из $R_{\omega+\alpha}T$; в силу $\gamma T = \Omega$, такой m^α существует и ранг α_0 элемента m^α удовлетворяет условию $\alpha_0 \geqslant \omega + \alpha$.

В несчетной последовательности целых чисел

$$m_1^3,\ m_2^4,\ \ldots,\ m_{\alpha+1}^{\alpha+3},\ \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

найдется такое, пусть k, которое встретится в ней несчетное множество раз; значит найдется последовательность

$$\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_\xi < \ldots \quad (\nu_\xi < \Omega,\ \xi < \Omega),$$

удовлетворяющая условию

$$m_{\nu_\xi + 1}^{\nu_\xi + 3} = k.$$

В силу этого $\varphi(k,\ m^{\nu_\xi+3}) \geqslant \nu_\xi + 1 > \nu_\xi$. Но $n_\xi \geqslant \xi$ и, следовательно, так как m^α попарно различны, достаточно положить

$$m^{\nu_\xi+3} = b_\xi \quad (\xi < \Omega),$$

чтобы убедиться в справедливости леммы 2.

Обозначая через T_0 множество $b_\xi\,(\xi < \Omega)$, которое мы только что построили, на основании леммы 1 и соотношения (10) получаем

Следствие 1. *Каковы бы ни были $\alpha < \gamma T_0$ и $b \in R_\alpha T_0$, мы будем иметь $\varphi(k,\ b) > \alpha$.*

3. ЛЕММА 3. *Если существует такое $k < \omega$, для которого $\varphi(k,\ T) = \Omega$, $\psi(k,\ T) < \Omega$ и если каждое из множеств $R_\alpha T\ (\alpha < \Omega)$ не более, чем счетно, то существуют:*

трансфинитная последовательность порядковых чисел

$$\pi(0),\ \pi(1),\ \ldots,\ \pi(\alpha),\ \ldots \quad (\alpha < \Omega),$$

трансфинитная последовательность точек из T

$$t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_\alpha,\ \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

и порядковое число

$$\delta < \Omega$$

такие, что, каково бы ни было $\alpha < \Omega$, мы имеем

$$\alpha < \pi(\alpha) < \Omega, \quad t_\alpha \in R_{\pi(\alpha)}T, \quad \varphi(k,\ t_\alpha) \leqslant \delta \ [\text{ср. } (5)].$$

Важным в лемме 3 является наличие такого δ.

Допустим, что лемма 3 неверна. Тогда можно было бы привести в соответствие каждому $\delta < \Omega$ такое порядковое число $\alpha(\delta) < \Omega$, что

соотношения $\alpha(\delta) \leqslant \beta < \Omega$ и $a \in R_\beta T$ повлекли бы за собой $\varphi(k, a) > \delta$; чтобы точно определить $\alpha(\delta)$, мы примем $\alpha(\delta) = \alpha'(\delta) + \delta$, где $\alpha'(\delta)$ — наименьшее из таких порядковых чисел.

Легко видеть, что если $\xi < \zeta < \Omega$, то $\alpha(\xi) < \alpha(\zeta) < \Omega$.

Определим теперь последовательность индексов

$$\delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_\xi < \ldots \quad (\xi < \Omega)$$

следующим образом: $\delta_0 = 1$; δ_1 — первое порядковое число, которое превосходит $\underset{a \in R_\xi T \ (\xi < \alpha(\delta_0))}{\text{supremum}} \varphi(k, a)$; и вообще, каково бы ни было $0 < \alpha < \Omega$, число δ_α будет первым порядковым числом, превосходящим наибольшее из двух чисел

$$\underset{\xi < \alpha}{\text{supremum}}\ \delta_\xi, \quad \underset{a \in R_\xi T,\ \xi < \alpha(\delta_\eta),\ \eta < \alpha}{\text{supremum}} \varphi(k, a). \tag{11}$$

Так как мощность каждого из символов α, $R_\xi T$, $\alpha(\delta_\eta)$ будет $\leqslant \aleph_0$, то число δ_α вполне определено и $< \Omega$ для всякого $\alpha < \Omega$.

Рассматривая теперь последовательность из $R_{\delta_\alpha} T$ $(\alpha < \Omega)$, мы видим, что соотношения

$$\xi < \eta < \Omega, \quad x \in R_{\alpha(\delta_\xi)} T, \quad y \in R_{\alpha(\delta_\eta)} T \tag{12}$$

влекут, в силу (11), соотношение

$$\varphi(k, x) < \varphi(k, y). \tag{13}$$

В самом деле, на основании определения $\alpha(\delta_\eta)$, если $y \in R_{\alpha(\delta_\eta)} T$, то $\varphi(k, y) > \delta_\eta$; с другой стороны, так как $\alpha(\delta_\xi) < \alpha(\delta_\eta)$, то из определения δ_η [ср. (11)] выводим $\varphi(k, x) < \delta_\eta$ и à fortiori формулу (13).

Заметив это, рассмотрим порядковое число ψT; так как оно, по гипотезе, $< \Omega$, рассмотрим порядковое число

$$\mu = \psi T + \omega \tag{14}$$

и непустое множество $R_{\alpha(\delta_\mu)} T$.

Пусть $a \in R_{\alpha(\delta_\mu)} T$ и пусть для всякого $\xi < \mu$ элемент из $R_{\alpha(\delta_\xi)} T$, который предшествует a, есть a_ξ; мы будем иметь

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_\xi < \ldots < a \quad (a_\xi \in R_{\alpha(\delta_\xi)} T,\ \xi < \mu) \tag{15}$$

и, в силу (12) и (13),

$$\varphi(k, a_0) < \varphi(k, a_1) < \ldots < \varphi(k, a_\xi) < \ldots < \varphi(k, a) \quad (\xi < \mu). \tag{15'}$$

Иначе говоря, если $(n_0, \ldots, n_\alpha, \ldots)$ есть элемент a, то в силу (15) и (15′) существуют: индекс $\nu_1 \leqslant \varphi(k, a_1)$, удовлетворяющий условию $n_{\nu_1} = k$, и индекс ν_ξ такой, что

$$\underset{\eta < \xi}{\text{supremum}}\ \varphi(k, a_\eta) < \nu_\xi \leqslant \varphi(k, a_\xi) \text{ и } n_{\nu_\xi} = k$$

каково бы ни было $0 < \xi < \mu$. Но тогда должна существовать возрастающая последовательность

$$\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_\xi < \ldots \quad (\xi < \mu)$$

такая, что

$$n_{\gamma_\xi}=k \quad (0<\xi<\mu),$$

а это в силу (14) влечет

$$\psi(k, a) \geqslant \mu-1 \text{ и } \psi(k, a)>\psi T,$$

что противоречит определению $\psi(T)$ [ср. (4″)].

4. Доказательство теоремы. После того как леммы 1, 2 и 3 доказаны, мы можем из них вывести нашу теорему; она эквивалентна теоремам 1 и 2, которые доказываются ниже.

ТЕОРЕМА 1. *Каково бы ни было несчетное подмножество T множества C, удовлетворяющее условию $\psi T<\Omega$, T содержит несчетное множество точек, попарно несравнимых.*

Рассмотрим множество непустых подмножеств множества T

$$R_0 T, \cdots, R_\alpha T, \ldots, (\alpha<\gamma T);$$

так как каждое из них состоит из попарно несравнимых точек, то теорема очевидна, если одно из множеств $R_\alpha T\ (\alpha<\gamma T)$ несчетно. Значит можно предположить, что для всякого $\alpha<\gamma T$ множество $R_\alpha T$ не более, чем счетно, а так как T несчетно, то $\gamma T=\Omega$.

Таким образом, условия леммы 2 выполнены; пусть теперь T_0 есть множество точек $b_\alpha \in T\ (\alpha<\Omega)$, о которых говорится (ср. лемму 1) в лемме 2 и в следствии 1.

В силу (10) T_0 будет несчетно и на основании следствия 1 мы будем иметь

$$\varphi(k, a)>\xi \tag{16}$$

для всякого $a \in R_\xi T_0$ и для всякого $\xi<\gamma T_0$.

Докажем, что найдется такое

$$\zeta<\gamma T_0, \tag{17}$$

для которого мощность $R_\zeta T_0=\aleph_1$. В самом деле, допустим, что $R_\alpha T_0$ не более, чем счетно для любого $\alpha<\gamma T_0$; так как T_0 несчетно, то $\gamma T_0=\Omega$.

По гипотезе $\psi T<\Omega$, а из этого, в силу $\psi T_0 \leqslant \psi T$, следует, $\psi T_0<\Omega$ и, значит,

$$\psi(k, T_0)<\Omega. \tag{18}$$

С другой стороны, $\gamma T_0=\Omega$ и, в силу (16), $\varphi(k, T_0)=\Omega$.

Таким образом, из выполнения условия леммы 3 следует существование последовательностей $\pi(\alpha)<\Omega\ (\alpha<\Omega)$, $t_\alpha \in R_{\pi(\alpha)} T_0$ и такого $\delta<\Omega$, для которых

$$\alpha<\pi(\alpha)<\Omega \text{ и } \varphi(k, t_\alpha) \leqslant \delta \quad (\alpha<\Omega),$$

что противоречит соотношению (16) как только $\xi>\delta$. Следовательно, соотношение (17) доказано, откуда непосредственно и вытекает утверждение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Если для некоторого подмножества T из C существует $k<\omega$, удовлетворяющее условию*

$$\varphi(k, T)=\Omega, \quad \psi(k, T)<\Omega,$$

то T содержит подмножество мощности $\aleph_1$ точек попарно несравнимых [ср. (4′), (5′)].

В самом деле, из гипотезы $\varphi(k, T)=\Omega$ непосредственно выводим методом трансфинитной индукции существование последовательности точек $b_\xi \in T$ $(\xi<\Omega)$, удовлетворяющей (10) и следствию 1; но тогда доказательство теоремы 2 заканчивается аналогично теореме 1.

Таким образом, теорема 2 доказана.

5. Существование разветвленных таблиц Ароншайна ([3]), т. е. разветвленных таблиц T, удовлетворяющих трем условиям:

a) $\gamma T=\Omega$,

b) мощность $R_\alpha T \leqslant \aleph_0$ $(\alpha<\Omega)$,

c) всякое упорядоченное подмножество множества T не более, чем счетно.

Чтобы определить такое T, определим последовательность

$$T_0, T_1, \ldots, T_\alpha, \ldots \quad (\alpha<\Omega) \tag{19}$$

подмножеств множества C следующим образом:

$$T_\alpha=R_\alpha C \text{ для всякого } \alpha<\omega;$$

положим $\omega \leqslant \alpha<\Omega$ и допустим, что мы определили последовательность

$$T_0, T_1, \ldots, T_\xi, \ldots \quad (\xi<\alpha)$$

так, что если положить

$$S_\alpha=\sum_\xi T_\xi \quad (\xi<\alpha),$$

то будут иметь место следующие условия:

(1_α) $\gamma S_\alpha=\alpha$ [ср. (8)];

(2_α) $R_\xi S_\alpha=T_\xi \subseteq R_\xi C$ для всякого $\xi<\alpha$ [ср. (7)];

(3_α) каковы бы ни были $\xi<\zeta<\alpha$, $a \in T_\xi$ и целое k, содержащееся в элементе a из C *, множество T_ζ содержит элемент a', следующий за a и удовлетворяющий условию $\psi(k, a)=\psi(k, a')$ [ср. (4)].

Ясно, что множество $S_\omega=\sum\limits_\alpha T_\alpha$ $(\alpha<\omega)$ удовлетворяет условиям (1_ω), (2_ω), (3_ω). Вообще, легко видеть, что если β — порядковое число второго рода такое, что, каково бы ни было $\alpha<\beta$, множество S_α определено и удовлетворяет условиям (1_α), (2_α), (3_α), то множество $S_\beta=\sum\limits_{\alpha<\beta} S=\sum\limits_{\alpha<\beta} T_\alpha$ удовлетворяет условиям (1_β), (2_β), (3_β).

Чтобы определить T_α, будем различать два случая, смотря по тому, будет ли α порядковым числом первого или второго рода.

В первом случае T_α будет обозначать множество тех точек из $R_\alpha C$, каждая из которых следует за некоторым элементом из $T_{\alpha-1}$.

Во втором случае, пусть

---

* Разумеется, a есть последовательность целых чисел $\geqslant 0$.

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \ldots \quad (n < \omega)$$

есть возрастающая последовательность порядковых чисел $< \alpha$, сходящаяся к α. Чтобы определить $T_\alpha \subseteq R_\alpha C$, мы приведем в соответствие любому элементу a из $\sum_{n<\omega} T_{\alpha_n}$ некоторый элемент $\bar{a}$ из $R_\alpha C$ такой, что $a < \bar{a}$ [ср. (3)]; вообще говоря, $\bar{a}$ меняется вместе с a.

Определив индекс n из условия $a \in T_{\alpha_n}$, возьмем некоторое целое k из a (см. сноску на стр. 73); тогда по гипотезе 3 найдется такое $a^1 \in T_{\alpha_{n+1}}$, что

$$a < a^1, \quad \psi(k, a) = \psi(k, a^1);$$

пусть вообще $1 < r < \omega$; предположим, что мы определелили последовательность $a, a^1, a^2, \ldots, a^{r-1}$, такую, что

$$a < a^1 < a^2 < \ldots < a^{r-1}, \quad a^i \in T_{\alpha_{n+i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, r-1)$$

и

$$\psi(k, a) = \psi(k, a^i) \quad (i < r).$$

Тогда, по гипотезе (3_α) найдется элемент $a^r \in T_{\alpha_{n+r}}$ такой, что

$$a^{r-1} < a^r \quad \text{и} \quad \psi(k, a^{r-1}) = \psi(k, a^r)$$

и значит $\psi(k, a^r) = \psi(k, a)$.

После того как последовательность $a^1, a^2, \ldots, a^r, \ldots$ $(r < \omega)$ определена, обозначим через $\bar{a}$ вполне определенный элемент из $R_\alpha C$, следующий за каждым из a^r. Таким образом, определено множество T_α точек $\bar{a}$, где a пробегает счетное множество $\sum_n T_{\alpha_n}$ $(n < \omega)$.

Итак, для обоих случаев T_α определено, и мы видим, что множество $S_{\alpha+1} = \sum_{\xi \leqslant \alpha} T_\xi$ удовлетворяет условиям ($1_{\alpha+1}$), ($2_{\alpha+1}$), ($3_{\alpha+1}$).

После того как последовательность (19) определена, достаточно положить

$$T = \sum_\alpha T_\alpha \quad (\alpha < \Omega), \tag{20}$$

чтобы убедиться в том, что T есть разветвленная таблица Ароншайна, что и требовалось доказать.

Следует заметить, что таблица T, определяемая равенством (20), удовлетворяет условию $\psi T = \omega$, и, в силу теоремы 1, T содержит подмножество мощности $\aleph_1$ попарно несравнимых точек.

Вопрос о том, будет ли всякая разветвленная таблица Ароншайна, взятая из C, содержать множество мощности $\aleph_1$ попарно несравнимых точек, эквивалентен проблеме Суслина и, как эта последняя, остается нерешенным.

Институт математики
Загреб, Югославия

Поступило
11.IV.1946

ЛИТЕРАТУРА

1 Kurepa G., Ensembles ordonnés et ramifiés (Thèse, Paris, 1935; aussi Publ. Math. Univ. Belgrade, IV, (1935), 1—138.

2 Kurepa G., Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés, Comptes rendus, 205, (1937), 1003—1035 et Revista de Sciencias, Lima, XLII, 827—846; XLIII, 483—500.

3 Kurepa G., Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés (tableaux ramifiés de M. Aronszajn), Publ. Math. Univ. de Belgrade, VI, (1937), 129—160.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 75–100 Série mathématique

И. И. ИБРАГИМОВ

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

При помощи методов интерполяции устанавливается полнота некоторых систем аналитических функций.

В этой статье мы устанавливаем полноту некоторых систем аналитических функций, не прибегая к их ортогонализации. Такого рода исследования (не опирающиеся на ортогонализацию данной системы функций) могут быть проведены с помощью некоторых приемов, встречающихся в решении интерполяционных задач, как это, например, сделано А. Гельфондом в работе ([1]) и в моей кандидатской диссертации ([2]).

При отыскании условий полноты рассмотренных здесь некоторых систем аналитических функций мне пришлось пользоваться преимущественно методами интерполяции. Оказывается, метод интерполяции является одним из эффективных методов для установления условий полноты системы аналитических функций,

Мы говорим, что система регулярных функций $\{\varphi_n(z)\}$ полна внутри круга Γ, радиуса R с центром в начале координат, если при заданных k и ε ($k=0, 1, 2, \ldots$; ε — сколь угодно малая положительная величина) существует последовательность чисел $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, удовлетворяющая неравенству

$$\left| z^k - \sum_{s=0}^{N} A_s \varphi_s(z) \right| < \varepsilon$$

для каждого z, расположенного внутри круга Γ, при достаточно большом $N = N(\varepsilon)$.

Так как в данной работе будут рассмотрены случаи полноты системы аналитических функций в круге конечного радиуса с центром в начале координат, то мы введем понятие радиуса полноты данной системы аналитических функций. Именно, будем называть радиусом полноты данной системы аналитических функций радиус максимального круга с центром в начале координат, внутри которого данная система будет полна.

При определении радиуса полноты некоторых систем аналитических функций приходится использовать следующий критерий полноты системы аналитических функций (являющийся очевидным следствием определения полноты):

Если система аналитических функций $\{\varphi_k(z)\}$ полна внутри круга Г радиуса R с центром в начале координат и если для каждой функции $\varphi_k(z)$ этой системы можно найти такую линейную форму от конечного числа N функций другой системы $\{\psi_n(z)\}$, что разность между линейной формой и $\varphi_k(z)$ будет меньше наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε внутри любого круга с центром в начале координат и с радиусом, меньшим R, то система функций $\{\varphi_n(z)\}$ будет также полна внутри того же круга Г с центром в начале координат и радиусом $R (N = N(\varepsilon))$.

Прежде всего мы устанавливаем, что система последовательных производных $\{\varphi^{(p)}(z)\}$ аналитической функции $\varphi(z)$ с периодом 2π внутри полосы $-\pi \leqslant I(z) \leqslant \pi$ полна внутри круга Г с центром в начале координат и радиусом $\pi - \varepsilon$ (ε — сколь угодно малая положительная величина), если только все коэффициенты Фурье функции $\varphi(z)$ отличны от нуля.

Далее, пользуясь интерполяционным процессом Ньютона, удается показать, что задача определения радиуса полноты системы аналитических функций $\{\varphi(z+\alpha_n)\}$ может быть решена при помощи только что сформулированной теоремы, где $\{\alpha_n\}$ есть последовательность произвольных комплексных чисел, имеющая единственную предельную точку в начале координат или в бесконечности *.

Наконец, полагая, что $F(z)$ есть аналитическая функция внутри конечного круга, мы устанавливаем условие полноты системы аналитических функций $\{F(z^{\alpha_k})\}$ где α_k — возрастающая последовательность действительных положительных чисел; так же рассматривается случай, когда $\{\alpha_k\}$ есть последовательность комплексных чисел, имеющая единственную предельную точку в начале координат.

§ 1. О полноте систем последовательных производных аналитической функции

Предположим, что $\varphi(z)$ есть аналитическая и периодическая с периодом 2π функция внутри полосы $-\pi \leqslant I(z) \leqslant \pi$. Определим радиус полноты системы последовательных производных $\{\varphi^n(z)\}$ заданной функции $\varphi(z)$. Для этой цели рассмотрим числа $c_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, определенные следующим образом:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-nti}\varphi(t)\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

В частности, равенство (1) при $n = 0$ дает

$$2\pi c_0 = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

* Подобная задача рассматривалась иным путем в действительной области П. Н. Хлодовским ([3]).

Очевидно, числа $c_0, c_1, c_2, \ldots$ являются коэффициентами Фурье аналитической функции $\varphi(z)$ с периодом 2π.

Полагая в равенстве (2) $t = x + t$, мы, в силу периодичности $\varphi(z)$, получим

$$2\pi c_0 = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \varphi(t+x)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\,dt, \tag{3}$$

где x — действительная переменная.

Но, в силу аналитичности и периодичности функции $\varphi(z)$, равенство (3) остается в силе, если действительную переменную x заменить комплексной переменной z и, следовательно, равенство (2) можно представить в виде

$$2\pi c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z+t)\,dt, \tag{4}$$

а формулу (1) — в виде

$$2\pi c_k e^{kiz} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-kit}\varphi(z+t)\,dt. \tag{4'}$$

Возьмем прямоугольник L со сторонами параллельными осям координат, целиком лежащий внутри полосы $-\pi \leqslant I(z) \leqslant \pi$, с основанием большим, чем 4π и с высотой меньшей, чем 2π. Пусть, например, прямоугольник L ограничен прямыми: $x = 2\pi + \varepsilon$, $x = -(2\pi + \varepsilon)$, $y = \pi - \varepsilon$, $y = -(\pi - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина.

Обозначим через L_1 прямоугольник той же высоты, но с основанием $2(\pi + \varepsilon)$; пусть, например, прямоугольник L_1 ограничен прямыми: $x = \pi + \varepsilon$, $x = -(\pi + \varepsilon)$, $y = \pi - \varepsilon$, $y = -(\pi - \varepsilon)$.

Обозначим через z_0 произвольную фиксированную точку, а через z = произвольную внутреннюю точку прямоугольника L_1; тогда точка $z_0 - z = t$ будет произвольной внутренней точкой прямоугольника L.

Пусть аналитическая функция $\zeta = \lambda(t)$, где $t = z_0 - z$, отображает прямоугольник L на круг Γ радиуса R с центром в начале координат, так что точка z_0 переходит в начало координат $\zeta = 0$; при этом, очевидно, $\varphi(z_0 + t) = f(\zeta)$ является аналитической функцией внутри нашего круга $\Gamma\,(|\zeta| \leqslant R)$.

Тогда имеет место разложение

$$\varphi(z_0 + t) = f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n [\lambda(t)]^n. \tag{5}$$

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n$ сходится равномерно внутри круга Γ $(|\zeta| \leqslant R)$ и поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n [\lambda(t)]^n$ сходится равномерно внутри прямоугольника L.

В силу аналитичности функции $\varphi(z)$ внутри полосы $-\pi \leqslant I(z) \leqslant \pi$ имеет место разложение

$$\varphi(z_0+t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\ldots \tag{6}$$

внутри круга γ радиуса π с центром в начале координат.

Далее, в силу предположения относительно функции $\zeta=\lambda(t)$, имеет место разложение

$$\zeta=\lambda(t)=\lambda_1t+\lambda_2t^2+\ldots+\lambda_nt^n+\ldots$$

внутри того же круга γ. Поэтому равенство (5) принимает вид

$$\varphi(z_0+t)=A_0+A_1[\lambda_1t+\lambda_2t^2+\ldots]+\ldots+A_n[\lambda_1t+\lambda_2t^2+\ldots]^n+\ldots \tag{7}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в равенствах (6) и (7), получаем

$$A_0=a_0=\varphi(z_0),$$

$$A_1\lambda_1=a_1;\quad A_1=\frac{1}{\lambda_1}\varphi'(z_0),$$

$$\lambda_2A_1+\lambda_1^2A_2=a_2;\quad A_2=\frac{1}{\lambda_1^2}\left[\frac{1}{2!}\varphi''(z_0)-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\varphi'(z_0)\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n=\alpha_1^{(n)}\varphi'(z_0)+\alpha_2^{(n)}\varphi''(z_0)+\ldots+\alpha_n^{(n)}\varphi^{(n)}(z_0).$$

Таким образом, равенство (5) примет вид

$$\varphi(z_0+t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}\varphi^{(k)}(z_0)\right][\lambda(t)]^n. \tag{5'}$$

Используя равенство (5′), мы можем представить равенство (4′) в следующем виде:

$$2\pi c_ke^{kiz_0}=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}\varphi^{(k)}(z_0)\right][\lambda(t)]^n\right\}e^{-ikt}dt=$$

$$=\sum_{k=}^{\infty}B_k\varphi^{(k)}(z_0). \tag{8}$$

Равенство (8) справедливо при любом z, лежащем внутри полосы $-\pi\leqslant I(z)\leqslant\pi$, так как $\varphi(z)$ есть аналитическая и периодическая (с периодом 2π) функция внутри той же полосы. Следовательно, ряд

$$2\pi c_ke^{kiz}=\sum_{k-0}^{\infty}B_k\varphi^{(k)}(z) \tag{8'}$$

сходится равномерно внутри всей полосы $-\pi\leqslant I(z)\leqslant\pi$.

Заметим, что система аналитических функций $\{e^{nz}\}$ полна внутри круга Γ с центром в начале координат и радиусом $\pi-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ — сколь угодно малая величина), так как функция e^z есть однозначная аналитическая функция внутри того же круга Γ.

Итак, на основании высказанного критерия полноты системы аналитических функций мы приходим к следующему заключению, являющемуся следствием равенства (8′).

ТЕОРЕМА I. *Если $\varphi(z)$ есть аналитическая функция с периодом 2π внутри полосы $-\pi \leqslant I(z) \leqslant \pi$, то система последовательных производных $\{\varphi^{(n)}(z)\}$ рассматриваемой функции $\varphi(z)$ полна внутри круга Γ с центром в начале координат и радиусом $\pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина), если только все коэффициенты ряда Фурье функции $\varphi(z)$ отличны от нуля.*

Примечание. Аналогично может быть доказано, что если $\varphi(z)$ — аналитическая функция с периодом 2ω внутри полосы $-\omega \leqslant I(z) \leqslant \omega$, то система последовательных производных $\{\varphi^{(n)}(z)\}$ полна внутри круга $|z| \leqslant \omega - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина), если только все коэффициенты Фурье

$$c_k = \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} e^{\frac{k\pi t i}{\omega}} \varphi(t)\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

отличны от нуля.

§ 2. О полноте системы аналитических функций $\{f(z + \alpha_k)\}$ в случае, когда $\lim\limits_{k\to\infty} |\alpha_k| = 0$

Покажем, что задача определения радиуса полноты некоторых систем аналитических функций может быть решена при помощи только что доказанной теоремы I.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция с периодом 2π внутри полосы $-\pi \leqslant I(z) \leqslant \pi$ и пусть последовательность комплексных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ имеет единственную предельную точку в начале координат, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0 \quad \text{и} \quad |\alpha_n| < 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Определим радиус полноты системы функций $\{f(z + \alpha_n)\}$.

ТЕОРЕМА II. *Если $f(z)$ — аналитическая функция с периодом 2π в полосе $-\pi \leqslant I(z) \leqslant \pi$, причем все коэффициенты ряда Фурье для $f(z)$ отличны от нуля, и если последовательность чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ имеет единственную предельную точку в начале координат, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0 \quad \text{и} \quad |\alpha_n| < 1,$$

то система функций $\{f(z + \alpha_n\}$ полна внутри круга Γ с центром в начале координат и радиусом $\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина.

Доказательство*. Представим функцию $f(z + x)$ обобщенным интерполяционным рядом Ньютона при фиксированном z ($|z| \leqslant \pi$). Предполагая $x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ точками интерполяции, будем иметь

$$f(z + x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{k-1}) + R_n(z, x), \tag{9}$$

---

* При доказательстве теорем II и III я буду пользоваться некоторыми оценками, которые установлены А. О. Гельфондом ([4]).

где

$$A_k = \sum_{s=0}^{k} \frac{f(z+\alpha_s)}{(\alpha_s-\alpha_0)(\alpha_s-\alpha_1)\cdots(\alpha_s-\alpha_k)}; \tag{10}$$

$$R_n(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\prod\limits_{i=0}^{n}(x-\alpha_i)}{\prod\limits_{i=0}^{n}(t-\alpha_i)} \cdot \frac{f(z+t)}{t-x}. \tag{11}$$

Дифференцируя равенство (9) p раз по x и полагая затем $x=0$, получаем

$$f^{(p)}(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k \left| \frac{d^p}{dx^p}(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{k-1}) \right|_{x=0} + R_{n,p}(z), \tag{12}$$

где

$$R_{n,p}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\left| \frac{d^p}{dx^p}\left[(t-x)^{-1} \prod\limits_{i=0}^{n}(x-\alpha_i)\right] \right|_{x=0}}{\prod\limits_{i-0}^{n}(t-\alpha_i)} f(z+t)\,dt. \tag{13}$$

Заметим, что на основании (10) равенство (12) можно представить в следующем виде:

$$f^{(p)}(z) = \sum_{s=0}^{n} c_k f(z+\alpha_s) + R_{n,p}(z). \tag{14}$$

Очевидно справедливость теоремы II последует из равенства (14), если мы докажем, что $|R_{n,p}(z)|$ равномерно стремится к нулю при неограниченном возрастании n для всех z, расположенных внутри круга Γ с центром в начале координат и радиусом $\pi-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малая величина.

Итак, мы переходим к оценке остаточного члена $R_{n,p}(z)$, определяемого равенством (13).

Заметим, что функцию

$$\frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)}{t-x}$$

можно представить в виде интеграла Коши вдоль окружности круга с центром в начале координат и радиусом ε (ε — положительное число меньшее единицы), так как эта функция регулярна внутри и на окружности рассматриваемого круга $|u| \leqslant \varepsilon$ при фиксированном t ($|t|=1$).

Таким образом,

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{n}(x-\alpha_i)}{t-x} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|u|=\varepsilon} \frac{\prod\limits_{i=0}^{n}(u-\alpha_i)}{(t-u)(u-x)}\,du. \tag{15}$$

Дифференцируя равенство (15) p раз по x и полагая затем $x=0$, получим

$$\left[\frac{d^p}{dx^p}\frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}{t-x}\right]_{x=0}=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{|u|=\varepsilon}\frac{\prod\limits_{i=0}^{n}(u-\alpha_i)}{(t-u)\,u^{p+1}}. \tag{16}$$

Заметим, что всегда найдется такое целое положительное число k, для которого

$$|u-\alpha_i|<2 \quad \text{при} \quad i\leqslant k,$$
$$|u-\alpha_i|\leqslant 2\varepsilon \quad \text{при} \quad i>k.$$

Очевидно, величину ε можно выбрать так, чтобы $2\varepsilon=\varepsilon_1$ было меньше единицы. Тогда будем иметь

$$\left|\prod_{i=0}^{n}(u-\alpha_i)\right|\leqslant 2^k(2\varepsilon)^{n-k} \quad \text{или} \quad \left|\prod_{i=0}^{n}(u-\alpha_i)\right|=A\varepsilon_1^{n+o(n)}, \tag{17}$$

где A — постоянное число, не зависящее от n и ε_1.

Кроме того, при $|t|=1$ и $|u|<\varepsilon_1$ $(\varepsilon_1<1)$ имеет место неравенство

$$|t-u|>\frac{1}{2}. \tag{18}$$

Теперь, равенство (16) при использовании соотношений (17) и (18) даст следующую оценку *:

$$\left|\frac{d^p}{dx^p}\frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}{t-x}\right|_{x=0}=B\varepsilon_1^{n+o(n)}, \tag{19}$$

где B — постоянное число, не зависящее от n и ε_1 $(\varepsilon_1<1)$.

Далее, дадим оценку произведения $\prod\limits_{k=0}^{n}(t-\alpha_k)$ при $|t|=1$ и $\lim\limits_{k\to\infty}|\alpha_k|=0$, $0\leqslant|\alpha_k|)<1$ $(k=0, 1, 2, \dots)$.

Пусть m — целое положительное число, такое, что $|\alpha_k|<\frac{1}{2}$ при $k>m$. Тогда

$$\left|\prod_{k=0}^{n}(t-\alpha_k)\right|\geqslant\prod_{k=0}^{m}(1-|\alpha_k|)\prod_{k=m+1}^{n}(1-|\alpha_k|)=C\prod_{k=m+1}^{n}(1-|\alpha_k|), \tag{20}$$

где C — постоянная величина, не зависящая от n.

Допустим, что γ_n выбрано так, что имеет место равенство

$$\sum_{k=m+1}^{n}|\alpha_k|=\gamma_n(n-m). \tag{21}$$

Логарифмируя неравенство (20) и разлагая функцию $\ln(1-|\alpha_k|)$ по степеням $|\alpha_k|$, находим, на основании (21), следующую оценку для каждого члена полученного ряда:

* Равенство (19) установлено А. О. Гельфондом ([1]).

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{|\alpha_k|^\nu}{\nu} \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|\alpha_k|\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}}{\nu} = \frac{1}{\nu \cdot 2^{\nu-1}} \cdot \gamma_n (n-m)$$

при $\nu = 2, 3, 4, \ldots$

Таким образом,

$$\ln \prod_{k=1}^{n} |t-\alpha_k| \geqslant \ln C - \gamma_n (n-m)\left(1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\ldots\right) \geqslant$$
$$\geqslant \ln C - 2\gamma_n (n-m). \qquad (22)$$

Докажем, что γ_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Предположим противное: пусть

$$\inf \gamma_n = \sigma_1 \quad (\sigma_1 > 0).$$

Это значит, что существует последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$, стремящихся к бесконечности, такая, что каждое из чисел $\gamma_{n_1}, \gamma_{n_2}, \gamma_{n_3}, \ldots$ не меньше, чем σ_1 $(\sigma_1 > 0)$.

Заметим, что в этом случае имеет место неравенство

$$\sum_{k=m+1}^{n_s} |\alpha_k| \geqslant \sigma_1 (n_s - m).$$

Пусть $n_0 = n_0\left(\frac{\sigma_1}{2}\right)$ есть натуральное число такое, что

$$|\alpha_k| < \frac{\sigma_1}{2} \quad \text{при } k > n_0.$$

Тогда

$$\sum_{k=m+1}^{n_s} |\alpha_k| = \sum_{k=m+1}^{n_0} |\alpha_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n_s} |\alpha_k| = c_{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}(n_s - m) \geqslant \sigma_1 (n_s - m), \qquad (23)$$

где c_{σ_1} не зависит от n_s.

Таким образом, из неравенства (23) находим

$$n_s \leqslant \frac{2c_{\sigma_1}}{\sigma_1} + m = \text{const}\,(\sigma_1),$$

т. е. n_s есть постоянная величина, зависящая от σ_1.

Полученное противоречие показывает, что γ_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Таким образом, из неравенства (22) получаем

$$\prod_{k=1}^{n} |t-\alpha_k| = e^{\ln C - 2\gamma_n (n-m)} = \varepsilon_1^{(-\ln \varepsilon_1)[\ln C - 2\gamma_n (n-m)]} =$$
$$= \varepsilon_1^{2(n-m)\gamma_n \ln \varepsilon_1 - \ln C \ln \varepsilon_1} = \varepsilon_1^{o(n)}. \qquad (24)$$

Наконец, так как $f(z)$ — аналитическая функция с периодом 2π, то всегда можно найти постоянную величину M, удовлетворяющую неравенству

$$|f(z+t)| \leqslant M \qquad (25)$$

при $|z| \leqslant \pi$ и $|t| = 1$.

Итак, используя неравенства (19), (24) и (25), получаем следующую оценку для модуля $|R_{n,p}(z)|$:

$$|R_{n,p}(z)| = D\varepsilon_1^{n+o(n)}, \tag{26}$$

где D не зависит от n и ε_1 (ε_1 — положительное число, меньшее единицы).

Равенство (26) показывает, что $|R_{n,p}(z)|$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n для всех z, расположенных внутри круга Γ ($|z| \leqslant \pi$), что и доказывает теорему II.

§ 3. О полноте системы аналитических функций $\{f(z+\alpha_k)\}$ в случае, когда $\lim\limits_{k\to\infty}|\alpha_k| = \infty$

Пусть $f(z)$ — целая аналитическая функция периода 2π конечного порядка ρ_1 нормального типа σ_1.

Рассмотрим системы функций $\{f(z+\alpha_n)\}$, где $\{\alpha_n\}$ — последовательность комплексных чисел, расположенных достаточно правильно (т. е. без особых уплотнений) на плоскости комплексного переменного z.

Это предположение будет верно, если потребовать существования двух пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|\alpha_n|}{\ln n} = \rho^{-1}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{n^{\frac{1}{\rho}}} = \sigma^{-\frac{1}{\rho}}. \tag{27}$$

Очевидно, числа ρ и σ достаточно хорошо характеризуют плотность множества чисел $\{\alpha_n\}$. При этих условиях можно доказать следующую теорему о полноте системы аналитических функций $\{f(z+\alpha_n)\}$.

ТЕОРЕМА III. *Пусть $f(z)$ — целая аналитическая функция периода 2π конечного порядка ρ_1 нормального типа σ_1, для которой все коэффициенты ряда Фурье отличны от нуля, и пусть плотность множества комплексных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ характеризуется числами ρ и σ, где*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|\alpha_n|}{\ln n} = \rho^{-1}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{n^{\frac{1}{\rho}}} = \sigma^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Тогда при выполнении условий:

1) $\rho > \rho_1$,

2) *при* $\rho = \rho_1 \quad \sigma_1 < \dfrac{2^{1-\rho_\sigma}}{\rho}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2 - t^{\frac{1}{\rho}}}$

система функций $\{f(z+\alpha_n)\}$ будет полна внутри круга Γ с центром в начале координат и радиусом $\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина.

Для того чтобы убедиться в справедливости этой теоремы достаточно показать, что каждая функция полной системы $\{f^{(k)}(z)\}$ представляется в виде линейной формы с постоянными коэффициентами, через функции нашей системы $\{f(z+\alpha_n)\}$ при всех z, удовлетворяющих неравенству $|z| \leqslant \pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина.

Для этой цели рассмотрим интерполяционную формулу, которая представляет функцию $f(z+x)$ в плоскости комплексного переменного x с точками интерполяции $x=\alpha_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ при фиксированном z. Эта интерполяционная формула есть обобщенный интерполяционный ряд Ньютона:

$$f(z+x)=\sum_{k=0}^{n} A_k \prod_{i=0}^{k-1}(x-\alpha_i)+R_n(z, x), \tag{28}$$

где

$$A_k=\sum_{s=0}^{k}\frac{f(z+\alpha_s)}{(\alpha_s-\alpha_0)(\alpha_s-\alpha_1)\ldots(\alpha_s-\alpha_k)},$$

$$R_n(z, x)=\frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-\alpha_i)}{\prod_{i=0}^{n}(t-\alpha_i)}\frac{f(z+t)}{t-x}\,dt,$$

причем C есть окружность $|t|=r_n$ $(r_n>|\alpha_n|)$ и

$$r_n=2\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{29}$$

Дифференцируя равенство (28) p раз по x и полагая затем $x=0$, получаем

$$f^{(p)}(z)=\sum_{k=0}^{n} A_k\left[\frac{d^p}{dx^p}\prod_{i=0}^{k-1}(x-\alpha_i)\right]_{x=0}+R_{n,p}(z), \tag{30}$$

где

$$R_{n,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_n}\frac{\left[\frac{d^p}{dx^p}\prod_{i=0}^{n}(x-\alpha_i)(t-x)^{-1}\right]_{x=0}}{\prod_{i=0}^{n}(t-\alpha_i)}f(z+t)\,dt. \tag{31}$$

Так как все коэффициенты A_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ являются линейными комбинациями функций системы $\{f(z+\alpha_k)\}$, то в силу теоремы I и равенства (30), мы убедимся в справедливости нашей теоремы, если только покажем, что модуль остаточного члена $|R_{n,p}(z)|$ равномерно стремится к нулю при неограниченном возрастании n для всех z, $|z|\leqslant r$, $r<\pi$.

Очевидно, условия (27) нашей теоремы можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{n}{\sigma+\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\rho}}<|\alpha_n|<\left(\frac{n}{\sigma-\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$$

По предположению, $f(t)$ есть целая аналитическая функция конечного порядка ρ_1 нормального типа σ_1; это значит, что имеет место неравенство

$$|f(z+t)|\leqslant e^{(\sigma_1+\varepsilon)|z+t|^{\rho_1}}=e^{(\sigma_1+\varepsilon)r_n^{\rho_1}+o(n)}. \tag{32}$$

Принимая во внимание неравенство

$$\left|\prod_{k=0}^{n}(x-\alpha_k)\right| \leqslant \prod_{k=0}^{n}\left(|x|+k^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon_k}\right) \leqslant e^{\frac{1}{\rho}n\ln n+o(n)},$$

мы из тождества

$$\left[\frac{d^p}{dx^p}\prod_{k=0}^{n}(x-\alpha_k)(t-x)^{-1}\right]_{x=0} = \frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(\zeta-\alpha_k)}{(t-\zeta)\zeta^{p+1}}\,d\zeta \tag{33}$$

получаем следующую оценку:

$$\left[\frac{d^p}{dx^p}\prod_{k=0}^{n}(x-\alpha_k)(t-x)^{-1}\right]_{x=0} \leqslant \frac{1}{r_n}\cdot e^{\frac{1}{\rho}n\ln n+o(n)}. \tag{34}$$

Кроме того, при произвольном t, лежащем на окружности $|t|=r_n=2n^{\frac{1}{\rho_1}}$, имеет место неравенство

$$\left|\prod_{k=0}^{n}(t-\alpha_k)\right| \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left(2n^{\frac{1}{\rho_1}}-|\alpha_n|\right) \geqslant e^{\frac{1}{\rho_1}n\ln n+o(n)}. \tag{35}$$

Таким образом, используя (32), (34) и (35), из равенства (31) получаем следующую оценку:

$$|R_{n,p}(z)| \leqslant e^{(\sigma_1+\varepsilon)2^{\rho_1}\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho}}+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)n\ln n+o(n)}$$

при любом z, $|z|\leqslant\pi$.

Последнее неравенство показывает, что $|R_{n,p}(z)|$ равномерно стремится к нулю при неограниченном возрастании n для всех z, $|z|\leqslant\pi$, если только $\rho_1<\rho$.

Покажем, что при $\rho=\rho_1$ $|R_{n,p}(z)|$ также равномерно стремится к нулю при неограниченном возрастании n для всех z, $|z|\leqslant\pi$, если удовлетворяется второе условие нашей теоремы.

Для этой цели заметим, что имеет место оценка *

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)\right| \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left[2\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}}-\left(\frac{k}{\sigma-\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right] = \prod_{k=1}^{n}\left[2\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}}-\left(\frac{k}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]e^{o(n)} =$$

$$=\sigma^{-\frac{n}{\rho}}\cdot n^{\frac{n}{\rho}}\prod_{k=1}^{n}\left[2-\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]e^{o(n)} = e^{\frac{1}{\rho}n\ln n-\frac{1}{\rho}n\ln\sigma+\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left[2-\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]+o(n)} =$$

$$= e^{\frac{1}{\rho}n\ln n-\frac{1}{\rho}n\ln\sigma+n\int\limits_0^1\ln\left(2-t^{\frac{1}{\rho}}\right)dt+o(n)} = e^{\frac{1}{\rho}n\ln n-\frac{1}{\rho}n\ln\sigma e+\frac{2n}{\rho}\int\limits_0^1\frac{dt}{2-t^{\frac{1}{\rho}}}+o(n)} \tag{36}$$

Принимая во внимание неравенство

$$\left|\prod_{k=0}^{n}(x-\alpha_k)\right| < \prod_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k}{\sigma-\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\rho}}+|x|\right] = e^{\frac{1}{\rho}n\ln n-\frac{n}{\rho}\ln\sigma e+o(n)},$$

мы из тождества (33) получаем

* Эта оценка установлена А. О. Гельфондом [1].

$$\left[\frac{d^p}{dx^p}\prod_{k=0}^{n}(x-\alpha_k)(t-x)^{-1}\right]_{x=0}\leqslant\frac{1}{r_n}\,e^{\frac{1}{\rho}n\ln n-\frac{n}{\rho}\ln\sigma e+o(n)} \qquad (37)$$

Используя (32), (36) и (37), из равенств (31) получаем следующую оценку для $|R_{n,p}(z)|$:

$$|R_{n,p}(z)|\leqslant e^{\left(\sigma_1-\frac{2^{1-\rho}\sigma}{\rho}\int\limits_0^1\frac{dt}{2-t^{\frac{1}{\rho}}}\right)\frac{2^{\rho}n}{\sigma}+o(n)} \qquad (\rho=\rho_1) \qquad (38)$$

для всех z, лежащих внутри круга $|z|\leqslant\pi$.

Неравенство (38) показывает, что в случае $\rho=\rho_1$, $|R_{n,p}(z)|$ равномерно стремится к нулю при неограниченном возрастании n для всех z, лежащих внутри круга $|z|\leqslant\pi$, если только имеет место неравенство

$$\sigma_1<\frac{2^{1-\rho}\sigma}{\rho}\int\limits_0^1\frac{dt}{2-t^{\frac{1}{\rho}}},$$

что и доказывает справедливость второго условия нашей теоремы.

А. О. Гельфондом ([1]) доказано, что первое и второе условия теоремы III являются достаточными (и в известном смысле необходимыми) для представимости целой аналитической функции интерполяционным рядом Ньютона.

Примечание. Полученные здесь результаты (теоремы I, II и III) согласуются со следующим предложением А. И. Маркушевича ([4]), входящим в его докторскую диссертацию: система последовательных производных $\{f^{(n)}(z)\}$ аналитической функции $f(z)$ и система аналитических функций $\{f(z+\alpha_n)\}$ являются одновременно полными или неполными.

§ 4. О полноте системы аналитических функций $\{F(z^{\alpha_k})\}$

T. Carleman ([5]) доказал, что если $\{\alpha_k\}$ — возрастающая последовательность действительных положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\sum\limits_{\alpha_\nu<R}\frac{1}{\alpha_\nu}}{\ln R}=\alpha>0,$$

то система аналитических функций $\{z^{\alpha_k}\}$ полна внутри области $-\alpha\pi<\arg z<\alpha\pi$. Попутно доказано, что расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k}$ является необходимым и достаточным условием полноты системы действительных функций $\{x^{\alpha_k}\}$ на отрезке $(0,1)$.

Вопрос о полноте системы действительных функций $\{x^{\alpha_k}\}$ впервые рассматривался С. Н. Бернштейном ([6]).

В этом параграфе мы решаем задачу, являющуюся непосредственным обобщением задачи T. Carleman'а, а именно устанавливаем условие полноты системы аналитических функций $\{F(z^{\alpha_k})\}$.

Сначала будут рассмотрены несколько частных случаев, а затем — более общий, так как методы, примененные в частных случаях, суще-

ственно отличаются от методов, примененных в общем случае. Кроме того, в частных случаях получаются более точные результаты.

1. Прежде всего, полагая $\alpha_n = n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, докажем следующее предложение.

ТЕОРЕМА IV. *Если $F(z)$—аналитическая функция внутри единичного круга, обладающая свойствами: $F(0) = 1$ и $F'(0) = 1$, то система аналитических функций $\{F(z^n)\}$ полна внутри единичного круга.*

Если $F(z)$ имеет нуль в начале координат кратности m $(m \geqslant 1)$, то система функций $\{F(z^n)\}$ полна внутри единичного круга с разрезом от начала координат до точки окружности вдоль отрицательной части действительной оси.

Прежде чем перейти к доказательству нашей теоремы, рассмотрим, в качестве примера, следующую частную задачу:

Пусть

$$F(z) = \frac{z}{1-z};$$

определим область полноты системы аналитических функций $\left\{\frac{z^n}{1-z^n}\right\}$. Для этой цели умножим каждую функцию нашей системы на функцию Möbys'a $\mu(n)$ и рассмотрим сумму

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)\, z^n}{1-z^n}.$$

Очевидно, при $|z| \leqslant 1-\varepsilon$ (ε — сколь угодно малая положительная величина)

$$\frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{k=1}^\infty z^{nk},$$

следовательно,

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)\, z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^\infty \mu(n) \left[\sum_{k=1}^\infty z^{nk}\right] = \sum_{N=1}^\infty \left[\sum_{dd'=N} \mu(d)\right] z^N.$$

Известно, что

$$\mu(1) = 1, \qquad \sum_{dd'=N\geqslant 2} \mu(d) = 0,$$

поэтому последнее равенство принимает вид

$$z = \sum_1^\infty \frac{\mu(n)\, z^n}{1-z^n}. \tag{39}$$

Заменяя z любой целой положительной степенью z, мы видим из равенства (39), что каждая степень (кроме нулевой) может быть представлена как угодно хорошо функциями нашей системы $\left\{\frac{z^n}{1-z^n}\right\}$ внутри единичного круга.

Итак, присоединяя 1 к системе функций $\left\{\frac{z^n}{1-z^n}\right\}$, приходим к следующему заключению:

Система аналитических функций

$$1, \frac{z}{1-z}, \frac{z^2}{1-z^2}, \ldots, \frac{z^n}{1-z^n}, \ldots$$

полна внутри единичного круга.

Перейдем теперь к доказательству теоремы IV.

Для того чтобы убедиться в справедливости теоремы IV, в силу нашего критерия полноты, достаточно показать, что каждая из функций $1, z, z^2, \ldots, z^n, \ldots$ представляется как угодно хорошо функциями нашей системы $\{F(z^n)\}$ при $|z|<1$, так как система положительных степеней z полна в каждой конечной части плоскости z. Заметим, что ряд

$$F(z) = 1 + z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{40}$$

сходится внутри единичного круга $|z| \leqslant 1$.

Отсюда, заменяя z через z^m, находим, что разность

$$|1 - F(z^m)| = |z^m(1 + a_2 z^m + \ldots)| \tag{41}$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом m. Это значит, что единица представляется функциями нашей системы как угодно хорошо внутри единичного круга.

Покажем теперь, что любая целая положительная степень z также представляется как угодно хорошо функциями нашей системы $\{F(z^n)\}$ внутри единичного круга. Для этой цели рассмотрим следующий ряд Дирихле:

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \tag{42}$$

Очевидно, существует число z_0 такое, что для всех z, удовлетворяющих неравенству

$$\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0,$$

функция $\pi(z)$ не имеет ни одного нуля и ряд

$$\left|\sum_{2}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\operatorname{Re} z_0}}\right| = \rho \quad (\rho \leqslant 1)$$

сходится. В таком случае, ряд

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{n^s} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\sum_{2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\right)^k$$

будет сходящимся вне того же круга.

Оценим коэффициенты A_n ряда Дирихле функции $\frac{1}{\varphi(z)}$. Для этого, воспользовавшись последним равенством, заметим, что мажорантой может служить неравенство

$$\frac{1}{\varphi(z)} \ll 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \frac{a_n}{n^{\operatorname{Re} z_0}}\right) \ll 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)^k; \tag{43}$$

где $s = \operatorname{Re}(z - z_0)$.

Далее, известна следующая формула:

$$\zeta^2(s) = \sum_1^\infty \tau(n) n^{-s},$$

где $\tau(n)$ — число делителей n. Поэтому справедливо неравенство

$$\left(\sum_2^\infty \frac{1}{n^s}\right)^2 \leqslant \sum_2^\infty \frac{\tau(n)}{n^s}, \tag{44}$$

которое, очевидно, является частным случаем неравенства

$$\left(\sum_2^\infty \frac{1}{n^s}\right)^k \leqslant \sum_{2^{k-1}}^\infty \frac{[\tau(n)]^{k-1}}{n^s} \tag{45}$$

при $k=2$.

Для того чтобы убедиться в справедливости (45) при любом k, достаточно показать, что если (45) верно при заданном k, то оно останется в силе при замене k на $k+1$.

Действительно,

$$\left(\sum_2^\infty \frac{1}{n^s}\right)^{k+1} \leqslant \left(\sum_{2^{k-1}}^\infty \frac{[\tau(n)]^{k-1}}{n^s}\right) \sum_2^\infty \frac{1}{n^s} = \sum_{2^k}^\infty \frac{c_n}{n^s},$$

где

$$c_n = \sum_{t/n} \tau(n) [\tau(n)]^{k-1} \leqslant \tau(n) [\tau(n)]^{k-1} = [\tau(n)]^k.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_2^\infty \frac{1}{n^s}\right)^{k+1} \leqslant \sum_{2^k}^\infty \frac{[\tau(n)]^k}{n^s},$$

т. е. неравенство (45) остается в силе при замене k на $k+1$.

Вследствие (45) неравенство (43) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum \frac{A_n}{n^s} \ll 1 + \sum_{k=1}^\infty \sum_{2^{k-1}}^\infty \frac{[\tau(n)]^{k-1}}{n^s}; \tag{43'}$$

очевидно, ряд $\sum_{2^{k-1}}^\infty \frac{[\tau(n)]^k}{n^s}$ не содержит ни одного члена, соответствующего значению $n < 2^{k-1}$; он содержит только такие члены, которые соответствуют значениям $n > 2^{k-1}$.

Отсюда

$$k < \left[\frac{\ln n}{\ln 2}\right] + 1.$$

Таким образом, из мажорантного неравенства (43′) мы получаем для коэффициентов A_n следующую оценку:

$$A_n < [\tau(n)]^k < n^{\ln n} = e^{\ln^2 n}$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n|} < \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln^2 n}{n}} = 1.$$

Следовательно, ряд $\sum A_n z^n$ является сходящимся внутри единичного круга.

Перемножая ряды

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \text{ и } \frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^s},$$

находим

$$1 = \left[1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^s},$$

что возможно, если

$$A_1 = 1, \quad \sum_{t/n} a_t A_{\frac{n}{t}} = 0, \qquad \geqslant 2), \tag{46}$$

Заметим, что для функции

$$f(z) = F(z) - 1$$

имеет место разложение Тейлора

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{47}$$

внутри единичного круга $|z| \leqslant 1$.

Заменяя z в равенстве (47) последовательно через $z^2, z^3, z^4, \ldots, z^k, \ldots$ получаем

$$\left.\begin{array}{l} f(z^2) = z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots + a_n z^{2n} + \ldots, \\ f(z^3) = z^3 + a_2 z^6 + a_3 z^9 + \ldots + a_n z^{3n} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{48}$$

Умножая затем равенства (47) и (48) соответственно на $A_1, A_2, \ldots, \ldots, A_n, \ldots$ и складывая, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k f(z^k) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t/n} a_t A_{\frac{n}{t}}\right) z^n,$$

или, в силу равенства (46),

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k f(z^k) = z.$$

Отсюда

$$z = \sum_{k=1}^{N} A_k f(z^k) + R\ (z).$$

Наконец, заменяя в последнем равенстве z на z^m, находим

$$\left| z^m - \sum_{k=1}^{N} A_k f(z^{mk}) \right| = |R_N(z^m)| < \varepsilon_N, \tag{β}$$

где ε_N стремится к нулю при $N \to \infty$.

Неравенства (β) доказывают первую часть нашей теоремы.

Допустим теперь, что аналитическая внутри единичного круга функция $F(z)$ имеет в начале координат нуль кратности m, т. е, что

$$F(z)=a_m z^m+\ldots+a_n z^n+\ldots$$

В таком случае, полагая $z^m=y$, вследствие того, что $\sqrt[m]{y}$ есть однозначная аналитическая функция внутри единичного круга Г с разрезом от 0 до -1 вдоль отрицательной части действительной оси, мы можем утверждать, что функция

$$\psi(y)=F(\sqrt[m]{y})$$

есть однозначная аналитическая функция внутри того же круга Г. Следовательно, в силу только что доказанной первой части нашей теоремы, система функций $\{\psi(y^n)\}$ полна внутри круга Г (единичного круга с указанным разрезом), и поэтому полна также система функций $\{F(z^n)\}$ внутри единичного круга с разрезом от начала координат до точки -1 вдоль отрицательной части действительной оси.

Таким образом, наша теорема полностью доказана.

Примечание. После моего сообщения о полученных здесь результатах на семинаре по теории функций комплексного переменного М. В. Келдыш высказал идею другого доказательства теоремы IV. Проведем это доказательство.

Пусть $F(z)$ — аналитическая функция внутри единичного круга, обладающая свойствами: $F(0)=1$ и $F'(0)=1$.

Выберем величины ρ и ρ_1 так, чтобы $\rho<\rho_1<1$; тогда из разложения (47) получим

$$|F(z)-1|<M(\rho)\cdot|z|,$$

где

$$M(\rho)=\frac{1}{\rho}\max_{|z|=\rho}|F(z)-1|$$

для всех z, лежащих внутри круга $|z|<\rho$.

Отсюда, заменяя z на z^n и имея в виду, что $|z|^n<\rho$, находим

$$|F(z^n)-1|<M(\rho)\cdot|z|^n.$$

Заметим, что разложение

$$F(z^n)-1=z^n+a_2z^{2n}+\ldots+a_kz^{kn}+\ldots$$

можно представить в виде

$$F(z^n)-1=\rho_1^n\left(\frac{z}{\rho_1}\right)^n+a_2\rho_1^{2n}\left(\frac{z}{\rho_1}\right)^{2n}+\ldots+a_k\rho_1^{kn}\left(\frac{z}{\rho_1}\right)^{kn}+\ldots \quad (49)$$

или в виде

$$\frac{F(z^n)-1}{\rho_1^n}=\left(\frac{z}{\rho_1}\right)^n+a_2\rho_1^n\left(\frac{z}{\rho_1}\right)^{2n}+\ldots+a_k\rho_1^{(k-1)n}\left(\frac{z}{\rho_1}\right)^{kn}+\ldots$$

для всех $n=1, 2, \ldots, k, \ldots$

Введя обозначения

$$b_n=\frac{F(z^n)-1}{\rho_1^n},\quad x_{ik}=\left(\frac{z}{\rho_1}\right)^{ik}\quad \text{и}\quad a_{ik}=a_i\rho_1^k,$$

получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_{ik} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{49'}$$

Относительно такой системы известно, что если ряды

$$\sum |b_k|^2 \text{ и } \sum |a_{ik}|^2$$

являются сходящимися, то система уравнений (49′) имеет единственную систему решений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, для которой ряд $\sum |x_j|^2$ также сходится; для нахождения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ нужно прервать каждое из уравнений (49′) в некотором месте и решить полученную таким образом конечную систему уравнений.

Очевидно, для всех z, лежащих внутри круга $|z| < \rho$,

$$|b_n| = \left| \frac{F(z^n) - 1}{\rho_1^n} \right| < M(\rho) \cdot \frac{|z|^n}{\rho_1^n} \leqslant M(\rho) \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n.$$

Следовательно, ряд $\sum |b_n|^2$ сходится.

Далее, в силу аналитичности $F(z)$ внутри единичного круга, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1$ и поэтому ряд $\sum |a_{kn}|^2$, составленный из квадратов коэффициентов $a_{kn} = a_k \rho_1^{kn}$, будет также сходящимся.

Таким образом, система (49), так же как и система (49′), имеет единственную систему решений:

$$x_1 = \frac{z}{\rho_1}, \; x_2 = \left(\frac{z}{\rho_1} \right)^2, \ldots, x_n = \left(\frac{z}{\rho_1} \right)^n, \ldots;$$

это значит, что любая степень z может быть представлена в виде линейной формы величин

$$b_n = \frac{F(z^n) - 1}{\rho_1^n}$$

для всех z, лежащих внутри круга $|z| \leqslant \rho$, $\rho < 1$, что и доказывает теорему IV.

Замечание. Теорема IV остается в силе в случае, когда $f(z)$ есть целая функция.

2. Допустим теперь, что $\{\alpha_n\}$ — последовательность действительных положительных чисел и $F(z)$ — однозначная аналитическая функция внутри единичного круга.

В силу определения полноты, система $\{F(z^{\alpha_k})\}$ будет полна внутри области (D), ограниченной контуром Γ, если для заданной однозначной аналитической внутри (D) функции $\varphi(z)$ и для достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность чисел $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, удовлетворяющая неравенству

$$\left| \varphi(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k F(z^{\alpha_k}) \right| < \varepsilon \tag{50}$$

для всех z, лежащих внутри области (D).

Представляя разность $\varphi(z) - \sum c_k F(z^{\alpha_k})$ в виде интеграла Коши вдоль Γ и применяя неравенство Шварца, находим, что

$$\left|\varphi(z)-\sum_{k=0}^{n} c_k F(z^{\alpha_k})\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)-\sum c_k F(\zeta^{\alpha_k})}{z-x}\,d\zeta\right| <$$

$$< \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left|\int_{\Gamma}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^2}\cdot\int_{\Gamma}\left|\varphi(\zeta)-\sum c_k F(\zeta^{\alpha_k})\right|^2 |d\zeta|\right|}.$$

Отсюда видно, что неравенство (50) имеет место, если выполняется предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma}\left|\varphi(\zeta)-\sum_{k=0}^{n} c_k F(\zeta^{\alpha_k})\right|^2 |d\zeta| = 0. \tag{50'}$$

Обозначая через $u_\nu(s)$ и $v_\nu(s)$ соответственно действительную и мнимую часть функции $F(z^{\alpha_\nu})$ на контуре, мы видим, что равенство (50′) удовлетворяется, если только *

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma}[h(s)-\omega_n(s)]^2\,ds = 0, \tag{51}$$

где $h(s)$ — интегрируемая в квадрате действительная функция, а $\omega_n(s)$ — полином вида

$$\omega_n(s) = \sum_{k=0}^{n}[a_k u_k(s) + b_k v_k(s)].$$

Равенство (51) возможно тогда и только тогда, если каждая действительная интегрируемая в квадрате функция $g(s)$, обладающая тем свойством, что

$$\int_{\Gamma} g(s)\,u_\nu(s)\,ds = \int_{\Gamma} g(s)\,v_\nu(s)\,ds = 0$$

или

$$\int_{\Gamma} g(s)\,F(z^{\alpha_\nu})\,ds = 0, \tag{52}$$

почти всюду равна нулю. В самом деле, рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda) = \int_{\Gamma} g(s)\,F(z^{\lambda})\,ds, \tag{53}$$

имеющую нули в точках $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$.

Пусть область (D) есть круг $|z| \leqslant e^{-\delta}$ с разрезом от начала координат до точки окружности $\Gamma(|z| = e^{-\delta})$ вдоль отрицательной части действительной оси ($\delta > 0$ — фиксированное число). В таком случае, полагая

$$z = e^{-\delta+i\varphi} \text{ и } \lambda = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

заметим, что $|z^\lambda| \leqslant 1$, если имеет место неравенство

$$|z^\lambda| \leqslant e^{r(-\delta\cos\theta-\varphi\sin\theta)} \leqslant 1,$$

которое возможно, если

$$-\delta\cos\theta - \varphi\sin\theta < 0$$

или

$$|\operatorname{tg}\theta| \leqslant \frac{\delta}{\pi}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{\pi}.$$

---

* Аналогичное равенство имеет место для мнимой части (50′).

Итак, если λ меняется внутри угла $-\theta \leqslant \arg \lambda \leqslant \theta$ и z находится внутри круга $|z| \leqslant e^{-\delta}$ с разрезом от начала координат до точки окружности Г вдоль отрицательной части действительной оси, то $\Phi(\lambda)$ есть регулярная и ограниченная функция внутри угла $-\theta \leqslant \arg \lambda \leqslant \theta$.

Заметим, что угол с раствором 2θ посредством функции

$$\eta = \lambda^{\beta},$$

где $\beta = \frac{\pi}{2\theta}$, преобразуется в правую полуплоскость.

Следовательно, если z меняется внутри круга Г с указанным разрезом, то функция

$$\Phi(\sqrt[\beta]{\eta}) = \Phi_1(\eta) = \int_{\Gamma} g(s) F(z^{\sqrt[\beta]{\eta}}) \, ds$$

будет регулярной и ограниченной функцией в правой полуплоскости.

Заметим, что правая полуплоскость ($\operatorname{Re} \eta \geqslant 0$) посредством линейной функции

$$w = \frac{\eta - 1}{\eta + 1}$$

преобразуется в единичный круг $|w| \leqslant 1$. При этом точкам $\lambda = \alpha_k$ соответствуют точки

$$w_k = \frac{\alpha_k^{\beta} - 1}{\alpha_k^{\beta} + 1},$$

находящиеся внутри единичного круга.

Таким образом, мы показали, что функция

$$\psi(w) = \Phi\left(\sqrt[\beta]{\frac{1+w}{1-w}}\right) = \int_{\Gamma} g(s) F\left(z^{\sqrt[\beta]{\frac{1+w}{1-w}}}\right) ds$$

есть ограниченная и регулярная функция внутри единичного круга $|w| \leqslant 1$ и имеет нули в точках

$$w_k = \frac{\alpha_k^{\beta} - 1}{\alpha_k^{\beta} + 1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Как известно [7], если $\varphi(w_k) = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и ряд $\sum |1 - w_k|$ расходится, то $\varphi(w) \equiv 0$.

Следовательно, $\Phi(\lambda) \equiv 0$, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - w_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_k^{\beta} + 1}$$

или ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^{\beta}}$ расходится.

Таким образом, расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^{\beta}}$, где $\beta = \frac{\pi}{2\theta}$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\pi}$,

будет достаточным условием полноты системы аналитических функций $\{F(z^{\alpha_k})\}$ внутри круга $|z| \leqslant e^{-}$ с указанным разрезом, если мы покажем, что $g(s)$ почти всюду на Γ равна нулю.

Из того, что $\Phi(\lambda) \equiv 0$, следует, что

$$\Phi(k) = 0 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

или

$$\Phi(n) = \int\limits_{\Gamma} g(s) F(z^n)\, ds = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

но система функций $F(z^n)$ полна внутри круга $|z| < 1$, откуда непосредственно следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} g(s) z^n\, ds = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

так как z^n может быть сколь угодно хорошо аппроксимирована последовательностью функций $F(z^n)$. Отсюда, ввиду полноты z^n на Γ, в свою очередь следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} g(s) s^n\, ds = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Но $g(s)$ — интегрируемая в квадрате функция — значит из всех последних условий следует, что $g(s)$ почти всюду равна нулю на Γ.

Итак, оказывается справедливой

ТЕОРЕМА V. *Пусть* $F(z)$ — *аналитическая функция внутри* $|z| \leqslant e^{-\delta}$, *а последовательность действительных и положительных чисел* $\{\alpha_k\}$ *такова, что* $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \infty$ *и ряд* $\sum \frac{1}{\alpha_k^{\beta}}$ *расходится* $\left(\beta = \frac{\pi}{2\theta}\right.$ $\delta > 0$ — *фиксированное действительное число*$\left.\right)$. *Тогда система аналитических функций* $\{F(z^{\alpha_k})\}$ *полна внутри круга* $|z| \leqslant e^{-}$ *с разрезом от начала координат до точки окружности вдоль отрицательной части действительной оси.*

3. Пусть $F(z)$ — аналитическая функция внутри и на окружности единичного круга, и $\{\alpha_k\}$ — возрастающая последовательность действительных и положительных чисел.

Рассмотрим систему действительных функций $\{F(x^{\alpha_k})\}$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$. Заметим, что для всех комплексных значений z, лежащих в правой полуплоскости, имеет место неравенство

$$|x^z| < 1.$$

Сохраняя предыдущие обозначения, мы видим, что в данном случае $\theta = \frac{\pi}{2}$ и поэтому $\beta = 1$.

Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА VI. *Пусть последовательность действительных положительных чисел* $\{\lambda_k\}$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ *сходится, и* $F(z)$ — *аналитическая функция внутри и на окружности единичного круга, представляемая лакунарным рядом*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k}. \qquad (60)$$

Тогда расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k}$, *где* α_k $(k=1, 2, \ldots)$ — *действительные положительные числа, является необходимым и достаточным условием полноты системы действительных функций* $\{F(x^{\alpha_k})\}$ *на отрезке* (0,1).

Это утверждение равносильно следующему:

Если функция $F(z)$, *аналитическая внутри единичного круга, определяется равенством* (60), *то сходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k}$ *является необходимым и достаточным условием существования интегрируемого в квадрате решения уравнений:*

$$\int_0^1 h(x) F(x^{\alpha_k})\, dx = 0 \quad (k=1, 2, \ldots). \qquad (61)$$

Для доказательства этого утверждения воспользуемся следующей теоремой T. Garleman'a ([5]):

Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k}$ является необходимым и достаточным условием существования интегрируемого в квадрате решения уравнений

$$\int_0^1 h(x) x^{\gamma_k} dx = 0 \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Очевидно, из сходимости рядов $\sum \frac{1}{\alpha_s}$ и $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ следует сходимость ряда $\sum \frac{1}{\alpha_s \lambda_k}$. Тогда, в силу теоремы Garleman'a, существует интегрируемое в квадрате решение уравнений

$$\int_0^1 h(x) x^{\alpha_s \lambda_k} dx = 0 \quad (s, k = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда очевидно, что существует интегрируемая в квадрате функция, удовлетворяющая уравнениям

$$\int_0^1 h(x) F(x^{\alpha_s})\, dx = 0 \quad (s=1, 2, \ldots),$$

что и доказывает нашу теорему.

Примечание. Заметим, что теорема III остается в силе, если $F(z)=Q_l(z)$ — многочлен заданной степени l, т. е. расходимость ряда $\sum \frac{1}{\alpha_k}$ является необходимым и достаточным условием полноты системы функций $\{Q(x^{\alpha_k})\}$ на отрезке (0,1). Это утверждение является непосредственным обобщением вышесформулированной теории Garleman'a.

Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, А. О. Гельфонду удалось показать, что расходимость ряда $\sum \frac{1}{\alpha_k}$ является достаточным

условием полноты системы действительных функций $\{F(x^{\alpha_k})\}$ на отрезке $(0,1)$, где $F(z)$ есть аналитическая функция внутри единичного круга.

4. В случае, когда α_k $(k=1, 2, \ldots)$—комплексные числа, имеет место

ТЕОРЕМА VII. *Пусть $F(z)$—аналитическая функция внутри круга $|z| \leqslant e^{\pi+\delta}$, где $\delta > 0$—произвольное действительное число, а последовательность комплексных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$, такова, что*

$$1 > |\alpha_0| > |\alpha_1| \geqslant \ldots \geqslant |\alpha_n| \geqslant \ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0;$$

тогда система аналитических функций $\{F(z^{\alpha_k})\}$ полна внутри круга $|z| \leqslant e^{-\delta}$ с разрезом от 0 до точки окружности вдоль отрицательной части действительной оси.

Доказательство. Заметим, что для всех z, лежащих внутри круга Γ ($|z| \leqslant e^{-\delta}$, $\delta > 0$—сколь угодно малая величина) с разрезом от начала координат до точки окружности вдоль отрицательной части действительной оси, и для λ, лежащих на окружности единичного круга ($|\lambda| = 1$), справедливо неравенство

$$|z^\lambda| = |e^{(-\delta+i\varphi)(\cos\theta+i\sin\theta)}| = e^{-\delta\cos\theta-\varphi\sin\theta} \leqslant e^{\pi+\delta}.$$

Представляя функцию $F(z^x)$ интерполяционной формулой Ньютона в плоскости x с точками интерполяции $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots$, получим

$$F(z^x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \prod_{i=0}^{k} (x-\alpha_i) + R_n(z, x), \tag{62}$$

где

$$A_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{F(z^{\alpha_k})}{\prod(\alpha_s-\alpha_n)}, \quad R_n(z, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \prod \frac{x-\alpha_k}{t-\alpha_k} \cdot \frac{F(z^t)}{t-z}\,dt$$

и Γ—окружность единичного круга.

Дифференцируя равенство (62) p раз по x и полагая затем $x=0$, получим

$$\left(\sum_{j=0}^{p} A_j F^{(j)}(1)\right) z^p = \sum_{k=0}^{n} B_k F(z^{\alpha_k}) + R_{n,p}(z), \tag{63}$$

где

$$R_{n,p}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\frac{d^p}{dx^p}\left[(t-x)^{-1}\prod\limits_{k=0}^{n}(x-\alpha_k)\right]_{x=0}}{\prod\limits_{k=0}^{n}(t-\alpha_k)} F(z^t)\,dt.$$

Очевидно, имеет место неравенство

$$\max|F(z^t)| = \max_{|\zeta|\leqslant e^{\pi+\delta}} |F(\zeta)| \leqslant M,$$

где M—постоянная величина.

Наконец, пользуясь известными неравенствами (19) и (25), получим следующую оценку:

$$|R_{n,p}(z)| \leqslant B\varepsilon_1^{n+o(n)} . \quad (64)$$

Вследствие (63) неравенство (64) и доказывает нашу теорему.

Азербайджанский гос. университет
г. Баку

Поступило
28.V.1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gelfond A. O., Sur les systèmes complets de fonctions analytiques, Матем. сборник, т. 4 (46) : 1 (1939), 149—156.
[2] Ибрагимов И. И., О полноте некоторых систем аналитических функций, Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем., 3, (1939), 553—568.
[3] Хлодовский И. Н., Почти абсолютно монотонные функции, Доклады Ак. Наук СССР, XXV, № 9 (1939), 725—728.
[4] Маркушевич А. И., О базисе в пространстве аналитических функций, Матем. сборник, т. 17(59), № 2 (1945), 211—252.
[5] Garleman T., Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen, Arkiv för matematik, astronomi och fysik, 17, 3/4, Nr. 9 (1922), 1—30.
[6] Bernstein S., Proceedings of the fifth international congress of mathematicians, Cambridge, vol. 1 (1912), 256—266.
[7] Privaloff I., Math. Annal., 93 (1924), 149—152.

I. I. IBRAGUIMOFF. SUR LES SYSTÈMES COMPLETS DE FONCTIONS ANALYTIQUES

RÉSUMÉ

Soit $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ une suite de fonctions régulières à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant R$. Nous dirons que le système de fonctions $\{f_n(z)\}$ est complet dans le cercle $|z| \leqslant \rho$ si pour chaque fonction $F(z)$ analytique à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant \rho$, $\rho \leqslant R$, il existe une suite de nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ telle que

$$F(z) - \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(z) \,| < \varepsilon$$

pour $|z| \leqslant \rho - \delta$ et $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, les nombres ε et δ étant positifs et aussi petits que l'on veut.

Le rayon du cercle maximal ayant pour centre l'origine et à l'intérieur duquel le système est complet et nommé «rayon du système complet» de fonctions analytiques données. Dans le présent article nous démontrons quelques théorèmes concernant le «rayon du système complet» pour certains systèmes de fonctions analytiques.

1. Si $\varphi(z)$ est une fonction analytique à l'intérieur de la bande $-\pi \leqslant I(z) \leqslant \pi$ et périodique de période 2π, le système de dérivées successives $\{\varphi^{(n)}(z)\}$ de la fonction $\varphi(z)$ considérée est complet à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant \pi - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est aussi petit que l'on veut, pourvu que tous les coefficients de Fourier de la fonction $\varphi(z)$ soient non nuls.

2. Si $f(z)$ est une fonction analytique dans la bande $-\pi \leqslant I(z) \leqslant \pi$ et périodique de période 2π, si tous les coefficients de Fourier de $f(z)$ sont non nuls et si $\{\alpha_n\}$ est une suite de nombres ayant pour seul point limite l'origine des coordonnées, le système de fonctions $\{f(z+\alpha_n)\}$ est complet à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant \pi - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, est aussi petit que l'on veut.

3. Soit $f(z)$ une fonction analytique entière de période 2π, d'ordre fini ρ_1 et du type normal σ_1, ayant tous les coefficients de Fourier non nuls; soit $\{\alpha_n\}$ une ensemble de nombres complexes dont la densité est caractérisée par les nombres ρ et σ, où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|\alpha_n|}{\ln n} = \rho^{-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_n|}{n^{\frac{1}{\rho}}} = \sigma^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Alors dans les conditions 1) $\rho > \rho_1$ et 2) pour $\rho = \rho_1$ on a

$$\sigma_1 < \frac{2^{1-\rho}\sigma}{\rho} \int_0^1 \frac{dt}{2 - t^{\frac{1}{\rho}}},$$

le système de fonctions $\{f(z+\alpha_n)\}$ est complet à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant \pi - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est aussi petit que l'on veut.

4. Si $F(z)$ est une fonction analytique à l'intérieur du cercle unitaire telle que $F(0) = 1$ et $F'(0) = 1$, le système de fonctions analytiques $\{F(z^n)\}$ est complet à l'intérieur du cercle unitaire. Si $F(z)$ possède à l'origine des coordonnées un zéro d'ordre m $(m \geqslant 1)$, le système de fonction $\{F(z^n)\}$ est complet à l'intérieur du cercle unitaire où l'on fait une coupure à partir de l'origine et jusqu'à la circonférence suivant la partie négative de l'axe réel.

5. Soit $F(z)$ une fonction analytique à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant e^{-\delta}$ et $\{\alpha_k\}$ une suite de nombres réels positifs telle que $\lim \alpha_n = \infty$ et la série $\sum \frac{1}{\alpha_k^3}$ diverge si $\beta = \frac{\pi}{2\theta}$, où $\delta > 0$ est un nombre réel fixe. Alors le système de fonctions analytiques $\{F(z^{\alpha_k})\}$ est complet à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant e^{-\delta}$ où l'on fait une coupure à partir de l'origine et jusqu'à la circonférence le long de la partie négative de l'axe réel.

6. Soit $\{\lambda_k\}$ une suite de nombres réels positifs telle que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_k}$ converge et $F(z)$ une fonction analytique à l'intérieur et sur la circonférence du cercle unitaire représentable par la série lacunaire

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k}.$$

Alors la divergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k}$, où les α_k $(k = 1, 2, \ldots)$ sont des nombres réels positifs, est une condition nécessaire et suffisante pour que

le système de fonctions réelles $\{F(x^{\alpha_k})\}$ soit complet sur le segment $(0,1)$.

7. Soit $F(z)$ une fonction analytique à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant e^{\pi+\delta}$ et $\{\alpha_n\}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$; alors le système de fonctions analytiques $\{F(z^{\alpha_k})\}$ est complet à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant e^{-\delta}$, où $\delta > 0$ est un nombre réel arbitraire, cercle où l'on fait une coupure à partir de 0 et jusqu'à la circonférence.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 101—104 Série mathématique

В. М. ДУБРОВСКИЙ

ЗАМЕЧАНИЯ К МОЕЙ РАБОТЕ «О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА И О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА»

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество каких-то элементов и $\mathfrak{M}$ — семейство подмножеств множества $\mathfrak{A}$. Предположим, что семейство $\mathfrak{M}$ содержит какие угодно разности и конечные или счетные суммы входящих в него множеств, все множество $\mathfrak{A}$ и пустое множество. Тогда имеют место теоремы:

I. Пусть последовательность $\Phi_1(\mathscr{E}), \Phi_2(\mathscr{E}), \ldots$ вполне аддитивных функций стремится к определенному конечному пределу $\Phi(\mathscr{E})$ для каждого $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$. Тогда предельная функция $\Phi(\mathscr{E})$ также вполне аддитивна.

II. Пусть последовательность $\Phi_1(\mathscr{E}), \Phi_2(\mathscr{E}), \ldots$ вполне аддитивных функций стремится к нулю для каждого $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$. Тогда для каждой суммы $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots$ не пересекающихся множеств из $\mathfrak{M}$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\Phi}_n(\mathscr{E}_{n+1} + \mathscr{E}_{n+2} + \ldots) = 0,$$

где $\overline{\Phi}_n$ означает полную вариацию функции Φ_n.

III. Пусть последовательность $\Phi_1(\mathscr{E}), \Phi_2(\mathscr{E}), \ldots$, вполне аддитивных функций стремится к определенному конечному пределу для каждого $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$. Тогда соответствующие полные вариации $\overline{\Phi}_1(\mathfrak{A}), \overline{\Phi}_2(\mathfrak{A}), \ldots$ равномерно ограничены.

IV. Пусть $A \subset \mathfrak{M}$. Предположим, что последовательность вполне аддитивных функций $\Phi_1(\mathscr{E}), \Phi_2(\mathscr{E}), \ldots$ стремится к определенному конечному пределу $\Phi(\mathscr{E})$ для каждой части множества $A\,(\mathscr{E} \subset \mathfrak{M})$. Пусть последовательность равномерно ограниченных измеримых (по отношению к $\mathfrak{M}$) функций $f_1(x), f_2(x), \ldots$ стремится к пределу $f(x)$ для каждого элемента $x \subset A$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,\Phi_n(d\mathscr{E}) = \int_A f(x)\,\Phi(d\mathscr{E});$$

где интегралы понимаются в смысле Lebesgue'a — Stieltjes'a и определяются по отношению к семейству $\mathfrak{M}$.

Эти теоремы доказаны в работе (1). Там было сделано предположение, что семейство $\mathfrak{M}$ содержит также отдельные элементы множества $\mathfrak{A}$. Я хочу отметить, прежде всего, что это предположение не использо-

вано в доказательствах и поэтому вносит лишь излишнее ограничение общности.

Теорема 1 доказана Radon'ом [2] и Pospišil'ом [3], но при весьма ограничительных предположениях, когда она почти тривиальна.

Рассмотрим теперь частный случай, состоящий в том, что $\mathfrak{A}$ — замкнутое ограниченное множество n-мерного эвклидова пространства, а $\mathfrak{M}$ — семейство измеримых в смысле Borel'я множеств, содержащихся в $\mathfrak{A}$. В этом случае линейный функционал $L(f)$, определенный для непрерывных функций $f(x)$ элемента x множества $\mathfrak{A}$, можно представить в виде интеграла Stieltjes'a

$$L(f)=\int_{\mathfrak{A}} f(x)\,\Phi(d\mathscr{E}),$$

где $\Phi(\mathscr{E})$ — некоторая определенная на семействе $\mathfrak{M}$ вполне аддитивная функция, соответствующая этому линейному функционалу. Наоборот, правая часть последнего равенства при определенной вполне аддитивной функции $\Phi(\mathscr{E})$ представляет собой линейный функционал, определенный для непрерывных функций элемента x множества $\mathfrak{A}$ [4].

Принято говорить, что последовательность вполне аддитивных функций $\Phi_1(\mathscr{E}), \Phi_2(\mathscr{E}), \ldots$ (рассматриваемых как характеристики линейных функционалов) *сходится слабо* к вполне аддитивной функции $\Phi(\mathscr{E})$ $(\mathscr{E}\subset\mathfrak{M})$, если

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathfrak{A}} f(x)\,\Phi_n(d\mathscr{E})=\int_{\mathfrak{A}} f(x)\,\Phi(d\mathscr{E})$$

для любой непрерывной функции $f(x)$.

Если же полная вариация разности $\Phi_n-\Phi$ на множестве $\mathfrak{A}$ стремится к нулю при $n\to\infty$, то последовательность $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ называется *сильно сходящейся* к функции Φ [см. [2], [5]].

Предположим теперь, что последовательность $\Phi_1(\mathscr{E}), \Phi_2(\mathscr{E}), \ldots$ вполне аддитивных функций стремится к определенному конечному пределу для любого $\mathscr{E}\subset\mathfrak{M}$. Поставим себе целью доказать, что такого рода сходимость последовательности вполне аддитивных функций множества является промежуточной между сильной и слабой. Она является, очевидно, следствием сильной сходимости. С другой стороны, из нее вытекает слабая сходимость, что легко видеть, принимая во внимание теорему IV.

Но может быть следующий случай: последовательность $\Phi_1(\mathscr{E}), \Phi_2(\mathscr{E}), \ldots$ вполне аддитивных функций сходится слабо, в то время как ни эта последовательность, ни любая ее подпоследовательность не являются сходящимися для любого определенного множества $\mathscr{E}\subset\mathfrak{M}$.

Действительно, пусть последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек $\mathfrak{A}$ сходится к точке x_0. Положим $\Phi_n(\mathscr{E})=1$, если $\mathscr{E}\supset x_n$, и $\Phi_n(\mathscr{E})=0$, если $\mathscr{E}\not\supset x_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Очевидно, Φ_n сходится слабо к Φ_0 при неограниченном возрастании n. С другой стороны, полагая

$$\mathscr{E}=x_1+x_3+x_5+\ldots,$$

легко видеть, что предел $\Phi_n(\mathscr{E})$ при $n\to\infty$ не существует. Подпосле-

довательность $\Phi_{n_\nu}(\mathscr{E})$, где $\nu = 1, 2, \ldots$, очевидно не будет сходиться на множестве

$$\mathscr{E} = x_{n_1} + x_{n_3} + x_{n_5} + \ldots$$

Рассмотрим теперь пример, показывающий, что последовательность $\Phi_n(\mathscr{E})$ вполне аддитивных функций может сходиться для любого определенного $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$ при $n \to \infty$, в то время как сильная сходимость для нее не будет иметь места.

Возьмем для простоты случай, когда число измерений рассматриваемого пространства равно двум и $\mathfrak{A}$ представляет собой прямоугольник $a_1 \leqslant \xi_1 \leqslant b_1$ $a_2 \leqslant \xi_2 \leqslant b_2$, где ξ_1, ξ_2 — координаты переменной точки x и a_1, b_1, a_2, b_2 — некоторые постоянные $(a_1 < b_1,\ a_2 < b_2)$. Обозначим через $R_{k,n}$ прямоугольник

$$a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2^n}(k-1) < \xi_1 < a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2^n}k, \quad a_2 < \xi_2 < b_2$$
$$(k = 1, 2, \ldots, 2^n;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Положим $f_n(x) = (-1)^k$, если точка x лежит внутри прямоугольника $R_{k,n}$ и $f_n(x) = 0$ в остальных точках области $\mathfrak{A}$ $(k = 1, 2, \ldots 2^n;\ n = 1, 2, \ldots)$. Определим затем последовательность вполне аддитивных функций множества, полагая

$$\Phi_n(\mathscr{E}) = \iint\limits_{\mathscr{E}} f_n(x)\, d\xi_1\, d\xi_2 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

для любого $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$.

Тогда $\Phi_n(\mathscr{E})$ будет стремиться к нулю для любого измеримого множества $\mathscr{E}$ при $n \to \infty$. Это становится очевидным, если принять во внимание, что измеримое множество можно аппроксимировать как угодно близко конечным числом прямоугольных областей. С другой стороны, полная вариация функции $\Phi_n(\mathscr{E})$ при любом n остается постоянной, равной $\operatorname{mes} \mathscr{E}$, откуда легко видеть, что последовательность Φ_n не может сильно сходиться.

Известно, что слабая сходимость линейных функционалов влечет за собой равномерную ограниченность норм ([5]). Однако, теорема III не является следствием этого свойства линейных функционалов, так как слабая сходимость вполне аддитивных функций множества, рассматриваемых в этой теореме, вытекает из теоремы IV, доказательство которой основано на теореме III.

Поступило
17. VII. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубровский В. М., О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множества и о предельном переходе под знаком интеграла, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 9 (1945), 311—320.

[2] Radon I., Über lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., 128 (1919), 1083—1121.

[3] Pospišil B., Sus un problème de M. M. S. Bernstein et A. Kolmogoroff, Časopis, pro pestovani matematiky a fysiky (1936), 64—76.

[4] Radon I., Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien, math.-naturw. Kl., 122 (1913), 1295—1438.

[5] Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

V. DUBROVSKY. REMARKS TO MY PAPER «ON SOME PROPERTIES OF COMPLETELY ADDITIVE SET FUNCTIONS AND PASSING TO THE LIMIT UNDER THE INTEGRAL SIGN»

SUMMARY

Let $\mathfrak{A}$ be a set and let $\mathfrak{M}$ be a family of subsets of $\mathfrak{A}$. Suppose that the family $\mathfrak{M}$ contains differences and finite or enumerable sums of the sets entering $\mathfrak{M}$, as well as $\mathfrak{A}$ itself and the void set.

The following theorems are valid:

I. Suppose that a sequence of completely additive functions of sets $\Phi_1(\mathcal{E}), \Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$ tends to a finite limit $\Phi(\mathcal{E})$ at every set $\mathcal{E}$ belonging to $\mathfrak{M}$. Then the limit function $\Phi(\mathcal{E})$ is also completely additive.

II. Suppose that a sequence of completely additive functions of sets $\Phi_1(\mathcal{E}), \Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$ tends to zero at every $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$; Then for every sum $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots$ of non-overlapping sets belonging to $\mathfrak{M}$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\Phi}_n(\mathcal{E}_{n+1} + \mathcal{E}_{n+2} + \ldots) = 0,$$

where $\overline{\Phi}_n$ denotes the total variation of the function Φ_n.

III. Suppose that a sequence of completely additive functions $\Phi_1(\mathcal{E}), \Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$ tends to a finite limit at every $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$. Then the corresponding total variations $\overline{\Phi}_1(\mathcal{E}), \overline{\Phi}_2(\mathcal{E}), \ldots$ are uniformly bounded.

IV. Let $A \subset \mathfrak{M}$. Suppose that a sequence of completely additive functions $\Phi_1(\mathcal{E}), \Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$ tends to a finite limit $\Phi(\mathcal{E})$ at every part $\mathcal{E}$ of the set A. Suppose also that a sequence of uniformly bounded measurable (with respect to $\mathfrak{M}$) functions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ tends to limit $f(x)$ at every element $x \subset A$. Then

$$\lim \int_A f_n(x)\,\Phi_n(d\mathcal{E}) = \int_A f(x)\,\Phi(d\mathcal{E});$$

where the integrals defined with respect to the family $\mathfrak{M}$ are to be understood in Lebesgue-Stieltjes' sense.

These theorems were proved in the paper mentioned in the title. We assumed there, however, that the family $\mathfrak{M}$ contained also single elements of $\mathfrak{A}$. This assumption was not used and thus was redundant.

Besides other remarks we show in this paper that the convergence of a sequence of completely additive functions $\Phi_n(\mathcal{E})$ in the sense that a definite limit exists at every $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$ as $n \to \infty$ is intermediate between the strong and the weak convergences, that is, this convergence follows from the strong convergence and implies the weak one [(2), (5)]. An example is given showing that a sequence may converge weakly while neither $\Phi_n(\mathcal{E})$ nor any its subsequence converge at every $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$. Another example shows that the limit of $\Phi_n(\mathcal{E})$ may exist for every fixed $\mathcal{E}$, while the sequence does not converge strongly.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 105—110 Série mathématique

А. Я. ХИНЧИН

ДВЕ ТЕОРЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЗАДАЧЕЙ ЧЕБЫШЕВА

Если неравенство $|\theta x - y - \alpha| < 1/t$, где θ — иррациональное, α — вещественное число, при любом $t \geqslant 1$ может быть удовлетворено целыми числами x, y так, что $|x| < Ct^\beta$, где $C > 0$ — постоянная, то говорят, что уравнение

$$\theta x - y - \alpha = 0 \tag{1}$$

допускает приближенные решения порядка β.

Автор доказывает две теоремы, соответственно решающие следующие две задачи:

1) каково должно быть иррациональное число θ, чтобы существовало вещественное число α, для которого уравнение (1), не допуская точных решений в целых x, y, допускало бы приближенные решения данного порядка $\beta > 0$?

2) если θ дано, то каково должно быть α, чтобы уравнение (1) допускало приближенные решения порядка $\beta > 0$?

В обоих случаях даются необходимые и достаточные условия.

Известно, что для любого иррационального числа θ дробные доли произведения θx, где x пробегает все целые рациональные числа, расположены всюду плотно на отрезке $(0,1)$; другими словами, уравнение

$$\theta x - y - \alpha = 0 \tag{1}$$

при любом иррациональном θ и любом вещественном α может быть решено в целых x, y с любой степенью точности. Исследование закономерностей, связанных с этим приближенным решением, называют задачей Чебышева (Чебышев положил начало этим исследованиям в своей известной работе ([1])). Условимся говорить, что уравнение (1) имеет приближенные решения порядка $\beta > 0$, если существует такая постоянная $C > 0$, что при любом $t \geqslant 1$ неравенства

$$|\theta x - y - \alpha| < \frac{1}{t}, \quad |x| < Ct^\beta \tag{2}$$

могут быть решены в целых x, y. Так как в случае, когда уравнение (1) может быть *точно* решено в целых x, y (т. е. когда число α может быть представлено в виде $a\theta + b$ с целыми a и b), оно тривиальным образом допускает приближенные решения любого порядка, то этот случай, который можно назвать *вырожденным*, мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Среди вопросов, связанных с приближенным решением уравнения (1), следующие два имеют, очевидно, важное значение:

1. Для каких иррациональных чисел θ число α может быть подобрано так, чтобы уравнение (1) было невырожденным и в то же время допускало приближенные решения порядка β?

2. Если θ дано, то каким должно быть число α, чтобы уравнение (1) допускало приближенные решения порядка β?

Содержание настоящей заметки составляют две теоремы, отвечающие на эти вопросы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть θ — иррациональное число. Для существования вещественного числа α, при котором уравнение* (1), *будучи невырожденным, допускает приближенные решения порядка β, необходимо и достаточно существование такой постоянной $\gamma > 0$, чтобы неравенство*

$$|q\theta - p| < \gamma / q^{1/\beta}$$

имело бесчисленное множество решений в целых $q > 0$, p.

Доказательство. —1. Пусть уравнение (1) невырождено и допускает приближенные решения порядка β. Пусть число $t \geqslant 1$ задано произвольно, а целые числа x и y удовлетворяют неравенствам (2). Положим

$$\xi = |\theta x - y - \alpha| < \frac{1}{t},$$

так что

$$|x| < Ct^{\beta} < C/\xi^{\beta}.$$

В силу нашего допущения, существуют целые числа x' и y', удовлетворяющие неравенствам

$$|\theta x' - y' - \alpha| < \xi, \quad |x'| < C/\xi^{\beta},$$

причем, очевидно, $x' \neq x$, если t достаточно велико (что мы в праве предположить). Мы получаем

$$|\theta(x' - x) - (y' - y)| < 2\xi, \quad |x' - x| < 2C/\xi^{\beta},$$

или, полагая $x' - x = q$, $y' - y = p$,

$$|q\theta - p| < 2\xi, \quad 0 < q < 2C/\xi^{\beta}, \text{*}$$

откуда

$$\xi < \left(\frac{2C}{q}\right)^{1/\beta},$$

и, следовательно,

$$|q\theta - p| < \gamma/q^{1/\beta}.$$

Так как $|q\theta - p| < 2\xi < 2/t$, то, при достаточно большом t, и q сколь угодно велико, так что необходимость критерия доказана.

2. Пусть теперь, обратно, θ есть иррациональное число, удовлетворяющее требуемому признаку. Заметим с самого начала, что мы в дальнейшем можем допустить $\beta \leqslant 1$; в самом деле, с одной стороны устанавливаемый нашей теоремой критерий при $\beta \geqslant 1$, как известно, выполняется для любого θ, а с другой — уравнение (1), если оно допускает

* Для определенности здесь предположено $q > 0$.

приближенные решения порядка 1, и подавно будет, очевидно, допускать приближенные решения любого порядка $\beta > 1$.

В силу сделанного нами предположения существует, очевидно, последовательность пар взаимно простых целых чисел $q_n > 0$, p_n, удовлетворяющих неравенствам

$$|q_n\theta - p_n| < \gamma/q_*^{1/\beta}, \quad q_{n+1} > 2^{n+1}q_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Положим теперь $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, и вообще

$$a_{n+1} = a_n + q_n, \quad b_{n+1} = b_n + p_n, \quad a_n p_n - b_n q_n = m_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

откуда, в частности,

$$a_{n+1}p_n - b_{n+1}q_n = m_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Неравенство $q_n \geqslant 2^{n-1}a_n$ очевидно для $n = 1$; но если оно верно для n, то

$$q_{n+1} > 2^{n+1}q_n \geqslant 2^n(q_n + a_n) = 2^n a_{n+1}.$$

Таким образом, для любого $n \geqslant 1$

$$q_n \geqslant 2^{n-1}a_n. \tag{5}$$

Как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно большом n мы будем иметь, в силу неравенств (3) и (5) и соотношения (4),

$$\left|\frac{m_n}{q_n} - \frac{m_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{q_n}(a_{n+1}p_n - b_{n+1}q_n) - \frac{1}{q_{n+1}}(a_{n+1}p_{n+1} - b_{n+1}q_{n+1})\right| =$$

$$= a_{n+1}\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < (a_n + q_n)\left\{\frac{\gamma}{q_n^{\frac{1+\beta}{\beta}}} + \frac{\gamma}{q_{n+1}^{\frac{1+\beta}{\beta}}}\right\} <$$

$$< \frac{(1+\varepsilon)\gamma q_n}{q_*^{\frac{1+\beta}{\beta}}} = (1+\varepsilon)\gamma q_*^{-1/\beta}.$$

Это показывает, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n}{q_n} = \alpha$, причем

$$\left|\alpha - \frac{m_n}{p_n}\right| < \gamma(1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{\infty} q_k^{-1/\beta} < \gamma(1+2\varepsilon)\, q_n^{-1/\beta}. \tag{6}$$

Пусть теперь число t достаточно велико и в остальном произвольно. Выберем число n согласно неравенствам

$$a_n \leqslant t^\beta < a_{n+1} \,(= a_n + q_n < 2q_n);$$

тогда, в силу неравенств (6) и (5),

$$|a_n\theta - b_n - \alpha| = \left|a_n\left(\theta - \frac{p_n}{q_n}\right) - \left(\alpha - \frac{m_n}{q_n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_n\gamma}{q_*^{1+1/\beta}} + \frac{\gamma(1+2\varepsilon)}{q_*^{1/\beta}} < \frac{2\gamma(1+\varepsilon)}{q_*^{1/\beta}} < \frac{2\gamma(1+\varepsilon)}{(a_{n+1}/2)^{1/\beta}} < \frac{2^{1+1/\beta}\gamma(1+\varepsilon)}{t} = \frac{1}{T},$$

где положено $T = \frac{t}{2^{1+1/\beta}\gamma(1+\varepsilon)}$, так что T произвольно вместе с t. При этом $a_n \leqslant t^\beta < CT^\beta$, где C — постоянная и $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Но это и значит, что уравнение (1) имеет приближенные решения порядка β. Остается показать, что это уравнение невырождено.

Допустим, что $\alpha = a\theta - b$, где a и b — целые числа. Тогда в силу (6) и (3) при достаточно большом n

$$\left|\frac{m_n}{q_n} - a\frac{p_n}{q_n} + b\right| < \left|\alpha - \frac{m_n}{q_n}\right| + \left|a\left(\theta - \frac{p_n}{q_n}\right)\right| <$$
$$< \gamma(1+2\varepsilon)\, q_*^{-1/\beta} + |a|\, \gamma q_*^{-1-1/\beta} < \gamma(1+3\varepsilon)\, q_*^{-1/\beta},$$

откуда

$$|m_n - ap_n + bq_n| < \gamma(1+3\varepsilon)\, q_n^{1-1/\beta}. \tag{7}$$

Если $\beta < 1$, то правая часть этого неравенства сколь угодно мала при достаточно большом n; если же $\beta = 1$, то при любом θ можно положить $\gamma = 1/\sqrt{5}$, вследствие чего правая часть неравенства (7) при достаточно малом ε будет меньше единицы. Таким образом, при $\beta \leqslant 1$ и достаточно большом n

$$|m_n - ap_n + bq_n| < 1,$$

откуда

$$m_n = a_n p_n - b_n q_n = ap_n - bq_n,$$
$$(a_n - a)\, p_n = (b_n - b)\, q_n,$$
$$a_n - a \equiv 0 \pmod{q_n};$$

но в силу неравенства (5)

$$a_n = o(q_n) \quad (n \to \infty);$$

поэтому при достаточно большом n

$$a_n = a,$$

что невозможно по определению чисел a_n. Этим теорема 1 доказана полностью.

Условимся во всем дальнейшем обозначать через θ_q (соответственно α_q) расстояние числа θ (соответственно α) до ближайшей рациональной дроби со знаменателем q (так что $0 \leqslant \theta_q \leqslant 1/2q$).

ТЕОРЕМА 2. *Для того, чтобы уравнение (1) допускало приближенные решения порядка β, необходимо и достаточно существование такой постоянной $\Gamma > 0$, что*

$$\alpha_q < \Gamma \theta_q^{\frac{1}{1+\beta}} \quad (q = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Доказательство. — 1. Пусть неравенства (2) разрешимы в целых x, y при любом $t \geqslant 1$. Пусть q — любое натуральное число, $q\theta_q = |q\theta - p|$. Положим $t = (C\theta_q)^{-\frac{1}{1+\beta}}$, и выберем x и y соответственно неравенствам (2); наконец, положим $px - qy = r$. Тогда

$$\left|x\left(\theta - \frac{p}{q}\right) - \left(\alpha - \frac{r}{q}\right)\right| = |x\theta - y - \alpha| < \frac{1}{t}.$$

Отсюда

$$\alpha_q \leqslant \left|\alpha - \frac{r}{q}\right| < \frac{1}{t} + |x|\,\theta_q < \frac{1}{t} + Ct^{\beta}\,\theta_q = 2C^{\frac{1}{1+\beta}}\,\theta_q^{\frac{1}{1+\beta}} = \Gamma\theta_q^{\frac{1}{1+\beta}}.$$

Это доказывает необходимость нашего признака.

2. Пусть условие (8) выполнено. Положим $\gamma=(3\Gamma)^{-1-\beta}$, и пусть q — наименьшее натуральное число, для которого

$$\theta_q=\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\gamma/t^{1+\beta};$$

пусть $\alpha_q=\left|\alpha-\frac{r}{q}\right|$. Для определенности предположим, что $\theta>\frac{p}{q}$. Пусть b — (единственное) натуральное число, для которого

$$pb\equiv-1 \pmod q),\quad 0<b<q.$$

Тогда при некотором целом a

$$pb-qa=-1,\quad \frac{a}{b}=\frac{p}{q}+\frac{1}{bq}>\frac{p}{q}.$$

Если бы было $\frac{a}{b}<\theta$, то мы имели бы

$$\frac{p}{q}<\frac{a}{b}<\theta,\quad \left|\theta-\frac{a}{b}\right|<\left|\theta-\frac{p}{q}\right|,\quad \theta_b<\theta_q,$$

что невозможно по определению числа q (в виду $b<q$); следовательно, $\frac{p}{q}<\theta<\frac{a}{b}$, и значит

$$\theta_q<\gamma/t^{1+\beta}\leqslant\theta_b\leqslant\frac{a}{b}-\theta<\frac{a}{b}-\frac{p}{q}=\frac{1}{bq}.$$

Пусть $\alpha_b=\left|\alpha-\frac{c}{b}\right|$; положим

$$cq-br=x,\quad cp-ar=y.$$

Тогда в силу (8):

1) $$|x|=bq\left|\frac{c}{b}-\frac{r}{q}\right|\leqslant bq(\alpha_b+\alpha_q)<$$

$$<\Gamma bq\left(\theta_b^{\frac{1}{1+\beta}}+\theta_q^{\frac{1}{1+\beta}}\right)<2\Gamma\, bq\theta_b^{\frac{1}{1+\beta}}.$$

Но из $\theta_b<\frac{1}{bq}$ следует $bq<1/\theta_b$, а потому

$$|x|<2\Gamma\theta_b^{-\frac{\beta}{1+\beta}}<2\Gamma(t^{1+\beta}/\gamma)^{\frac{\beta}{1+\beta}}=Ct^{\beta}, \tag{9}$$

где положено $C=2\Gamma/\gamma^{\frac{\beta}{1+\beta}}=2/3\gamma$.

2) $$x\theta-y-\alpha|=\left|x\left(\theta-\frac{p}{q}\right)-\left(\alpha-\frac{r}{q}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant Ct^{\beta}\theta_q+\alpha_q<\frac{C\gamma t^{\beta}}{t^{1+\beta}}+\frac{\Gamma\gamma^{\frac{1}{1+\beta}}}{t}=\frac{1}{t}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{t}. \tag{10}$$

Неравенства (9) и (10) показывают, что уравнение (1) допускает приближенные решения порядка β, чем теорема 2 полностью доказана.

Поступило
2. XI. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чебышев П. Л., Об одном арифметическом вопросе, Полн. собр. соч., т. 1, (1944), 237—275.

A. KHINTCHINE. DEUX THÉORÈMES LIÉS AU PROBLÈME DE TCHEBYCHEFF

RÉSUMÉ

On dit que l'équation (1), où θ et α sont deux nombres réels donnés dont θ est irrationnel, admet des solutions approchées d'ordre $\beta > 0$, lorsqu'il existe une constante $C > 0$ telle que les inégalités (2) peuvent être satisfaites par deux nombres entiers x, y, quel que soit $t \geqslant 1$. L'équation (1) est dite dégénérée lorsqu'elle admet une solution *exacte* en nombres entiers x, y.

THÉORÈME 1. *Soit θ un nombre irrationnel. Pour qu'il existe un nombre réel α tel que l'équation* (1) *soit non dégénérée et admette des solutions approchées d'ordre β, il faut et il suffit que l'inégalité*

$$|q\theta - p| < \gamma q^{-1/\beta},$$

$\gamma > 0$ *étant une constante convenablement choisie, ait une infinité de solutions en nombres entiers $q > 0$, p.*

Désignons par θ_q (resp. α_q) la plus petite distance entre θ (resp. α) et une fraction rationnelle de dénominateur q $\left(\text{de sorte que } 0 \leqslant \theta_q \leqslant \frac{1}{2q}\right)$.

THÉORÈME 2. *Pour que l'équation* (1) *admette des solutions approchées d'ordre β, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\alpha_q < \Gamma \theta_q^{\frac{1}{1+\beta}} \quad (q = 1, 2, \ldots),$$

Γ *désignant une constante positive convenablement choisie.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 111–138 Série mathématique

Ю. В. ЛИННИК

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ГАУССОВУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком **С. Н. Бернштейном**)

Изучается вопрос о погрешности предельного закона вероятностей для сумм независимых случайных величин. При этом получены более точные оценки, чем ранее известные.

1. Пусть ряд независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_N, \ldots$ имеет законы распределения $F_j(x)$, математические ожидания $E(X_j)=0$ и дисперсии $\sigma_j < \infty$ $(j=1,2,\ldots,N)$. Пусть дисперсия суммы $X_1+\ldots+X_N$

$$\sigma_1^2+\ldots+\sigma_N^2 \neq 0.$$

Как известно, центральная предельная теорема в ее классической формулировке трактует о законе распределения $\overline{F}_N(x)$ нормированной суммы $Z_n=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_N}{S_N}$. В частности, известны необходимые и достаточные условия для того, чтобы

$$\lim_{N\to\infty}\overline{F}_N(x)=G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy, \tag{1}$$

выраженные в виде ограничений, наложенных лишь на поведение вторых моментов.

Однако, многие современные работы посвящены собиранию сведений о том, как протекает стремление закона $\overline{F}_N(x)$ к гауссову закону при выполнении тех или иных достаточных условий, хотя бы и более жестких, чем условия Lindeberg'a. В частности, интересно знать, какова структура тех случайных величин, среди всех, подчиняющихся определенным условиям, которые обнаруживают в некотором смысле наибольшее уклонение суммы от нормального распределения.

К исследованиям в этом направлении относятся, например, работы H. Cramér ([1]), ([2]), A. C. Berry ([3]) и C. G. Esseen ([4]). Последние авторы принимают, что независимые величины X_j, помимо указанных выше условий, имеют еще абсолютные третьи моменты $\beta_{3j}=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^3\,dF_j(x)$.

Если обозначить $A_{3N}=\sum_{j=1}^{N}\beta_{3j}$ и ввести «дробь Ляпунова» $L_N=\frac{A_{3N}}{S_N^3}$, то для

выполнения (1), как известно, достаточно, чтобы $L_N \to 0$ при $N \to \infty$. В связи с этим исследуется отношение

$$\frac{|P_N(x)|}{L_N} = \frac{|\overline{F}_N(x) - G(x)|}{L_N}.$$

В работах (³) и (⁴) показано, что

$$\frac{|P_N(x)|}{L_N} \leqslant C_0, \tag{2}$$

где C_0 — некоторая абсолютная константа [$C_0 = 7{,}5$ в работе C. G. Esseen (⁴) *]. Кроме того, работа (⁴) дает некоторые основания выделить среди всех возможных систем $\{X_j\}$ систему, даваемую симметрической схемой Бернулли (бросание монеты), в качестве в некотором роде наихудшей.

2. В настоящей работе будут допущены более жесткие, чем в (³) и (⁴), но все же достаточно широкие условия, и в этих условиях будут получены значительно более точные сведения относительно $|P_N(x)|$ чем в оценке (2). Эти сведения выяснят особую роль симметрической схемы Бернулли в данных условиях, а также некоторые особенности способа приближения $\overline{F}_N(x)$ к $G(x)$.

Обозначения. Буквы $C_0, C_1, \ldots; c_0, c_1, \ldots$ обозначают абсолютные константы $\geqslant 1$; $\eta_0, \eta_1, \ldots$ — такие же константы, заключенные между 0 и $\frac{1}{2}$ (исключая 0). Все эти константы будут эффективно вычислимы.

Функции $\Psi_0(N), \Psi_1(N), \Psi_2(N), \ldots$ обозначают монотонные положительные функции числа N, возрастающие до ∞.

Знак $A(N) \ll B(N)$ И. М. Виноградова для двух функций $A(N)$, $B(N)$, из которых $B(N)$ положительна и монотонна, означает, что $\frac{|A(N)|}{B(N)} < c_a$ при $N > c_b$ (c_a и c_b — какие-либо из наших констант).

Буква $T_N = L_N^{-1}$, буква r означает $\ln T_N$. Закон распределения $F(x)$ в точках разрыва определяется, как $\frac{1}{2}\{F(x-0) + F(x+0)\}$.

P_r означает вероятность; $F_1 * F_2$ означает композицию

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\,dF_2(y)$$

двух законов.

3. Подчиним независимые величины $X_1, X_2, \ldots, X_N, \ldots$ помимо обычных условий, высказанных в п. 1, дополнительным ограничениям.

Зададимся функциями $\Psi_0(N), \Psi_1(N), \ldots$ типа, указанного в п. 2, и наложим следующие ограничения:

I) на вторые моменты:

$$S_N^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_N^2 \leqslant C_1 N, \tag{3}$$

* В то же время легко обнаружить, что $C_0 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$\sigma_j^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF_j(x) \geqslant c_1^2 \quad (j \leqslant N), \tag{4}$$

причем допускаются исключения из (4), но не более, чем для $\frac{N}{\Psi_0(N)}$ индексов $j \leqslant N$,

$$L_N \leqslant \frac{1}{\Psi_1(N)}, \tag{5}$$

(это есть конкретизирование условия Ляпунова);

II) на третьи моменты:

$$\frac{1}{A_{3N}} \sum_{j=1}^{N} R_j^{(N)} \leqslant \frac{1}{\Psi_2(N)}, \tag{6}$$

где

$$R_j^{(N)} = \int\limits_{|x| \geqslant \frac{S_N}{\Psi_3(N)}} |x|^3\, dF_j(x);$$

III) малая окрестность нуля маловероятна, т. е.

$$\int\limits_{|x| \leqslant L_N^{1-\eta_0}} dF_j(x) \leqslant \frac{1}{\Psi_4(N)} \quad (j \leqslant N), \tag{7}$$

причем допустимы исключения, но не более, чем для $\frac{N}{\Psi_0(N)}$ индексов.

Заметим, что $L_N \to 0$, так что речь идет об окрестности нуля тем более узкой, чем меньше L_N.

4. При этих условиях получаются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА I. *Если величины X_i обладают симметрическим распределением ($F_j(x) = 1 - F_j(-x)$), то при любом фиксированном M и $|x| \leqslant M$*

$$\frac{|P_N(x)|}{L_N} = \frac{|\overline{F}_N(x) - G(x)|}{L_N} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + \varepsilon_N(M)), \tag{8}$$

где $\varepsilon_N(M)$ зависит только от M, N и выбора функций $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_4$, причем $\varepsilon_N(M) \to 0$ при $N \to \infty$. (Таким образом, приближение $\varepsilon_N(M)$ к 0 происходит равномерно по всем допустимым системам $\{X_j\}$).

Смысл этой теоремы поясняется следующим замечанием. Для симметрической схемы Бернулли, когда все $F_j(x)$ имеют вид

$$F_j(x) = 0\ (x < -1); \quad F_j(x) = \frac{1}{2}\ (-1 < x < 1); \quad F_j(x) = 1\ (x > 1),$$

существует ряд точек $x_{\nu N}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) таких, что расстояние соседних точек $x_{\nu, N+1} - x_{\nu N} = o(1)$ при $N \to \infty$, $x_{\nu N} \to \pm\infty$ при $\nu \to \pm\infty$ и

$$\frac{|\overline{F}_N(x_{\nu N}) - G(x_{\nu N})|}{L_N} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{\nu N}^2}{2}} (1 - \varepsilon_N),$$

где $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$ и $|x| \leqslant M$ (точки $x_{\nu N}$ зависят от N).

Таким образом, в условиях п. 3 схема Бернулли дает среди всех симметрических схем в некотором смысле наибольшее уклонение от нормального распределения.

ТЕОРЕМА II. *В условиях теоремы* I *существует последовательность точек* $\zeta_{-n}^{(N)}, \zeta_{-n+1}^{(N)}, \ldots, \zeta_{-1}^{(N)}, \zeta_0^{(N)}, \ldots, \zeta_l^{(N)}$ *таких, что*

$$\zeta_{\nu+1}^{(N)} - \zeta_{\nu}^{(N)} = q_N, \quad |M - \zeta_l^{(N)}| \leqslant q_N, \quad |-M - \zeta_{-n}^{(N)}| \leqslant q_N,$$

где

$$\left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right) L_N \leqslant q_N \leqslant 2\left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right) L_N \tag{9}$$

и для которых

$$\frac{|\overline{F}_N(\zeta_\nu^{(N)}) - G(\zeta_0^{(N)})|}{L_N} < \varepsilon'_N, \tag{10}$$

причем $\varepsilon'_N \to 0$ *при* $N \to \infty$ *равномерно по всем допустимым системам* $\{X_j\}$.

Далее, для любого x *с* $|x| \leqslant M$ *имеем*

$$\int_x^{x+q_N} P_N(x)\,dx \leqslant q_N \cdot L_N \frac{1}{\Psi_6(N)}. \tag{11}$$

Таким образом, существует сетка равноудаленных значений $\zeta_\nu^{(N)}$, где законы $\overline{F}_N(x)$ и $G(x)$ должны сближаться более тесно, чем в общем случае.

Следует заметить, что теорема I может быть выведена геометрическим путем из (10) и (11) (см. доказательство леммы 12, п. 21).

ТЕОРЕМА III. *Если* $\{X_j\}$ *не все симметрически распределены, то при дополнительных условиях:*

IV) $x = 0$ *есть медиана распределений* $F_j(x)$:

$$\int_{x>0} dF_j(x) = \frac{1}{2} \quad (j \leqslant N), \tag{12}$$

причем допускаются исключения, но не более, чем для $\frac{N}{\Psi_0(N)}$ *индексов,*

V) $$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dF_j(x) = 2\int_0^{\infty} x^2\,dF_j(x) \quad (j \leqslant N), \tag{13}$$

(*причем возможны не более, чем* $\frac{N}{\Psi_0(N)}$ *исключений*), *получим*

$$\frac{|Q_N(x)|}{L_N} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + \varepsilon_N(M)), \tag{14}$$

где

$$Q_N(x) = \overline{F}_N(x) - G(x) - H_N(x) \text{ при } |x| \leqslant M,$$

$$H_N(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)\,\Delta_N,$$

$$\Delta_N = \frac{1}{S_N^3} \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dF_j(x)$$

и $\varepsilon_N(M)$ — *число из теоремы* I.

ТЕОРЕМА IV. *Существуют точки* $\zeta_\nu^{(N)}$, *определяемые так же, как в теореме* II, *такие, что*

$$\frac{|Q_N(\zeta_\nu^{(N)})|}{L_N} < \varepsilon'_N, \tag{15}$$

где $\varepsilon'_N \to 0$ — *число из теоремы* II.

Далее, при $|x| \leqslant M$

$$\int_x^{x+q_N} Q_N(x)\,dx \ll q_N \cdot L_N \frac{1}{\Psi_6(N)}. \tag{16}$$

Теорема III может быть выведена из (15) и (16) геометрическим путем.

5. Пусть

$$\varphi_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF_j(x)$$

— характеристические функции (кратко — х. ф.) законов $F_j(x)$, а

$$g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

— х. ф. закона Гаусса $G(x)$.

Мы будем изучать разность $F_N(x) - G(x)$ с помощью х. ф. по обычному способу ([2]), но для получения большей точности применим к изучению произведения большого числа х. ф. метод особой классификации аргументов (интервалы I и II класса) и «сглаживания» тригонометрических сумм, введенный в аддитивную теорию чисел И. М. Виноградовым.

6. Пусть $F(x)$ и $K(x)$ — два закона распределения с х. ф. $f(t)$ и $k(t)$. Тогда имеем основную формулу обращения ([4]):

$$F(x) - K(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\,\frac{f(t) - k(t)}{-it}\,dt \tag{17}$$

(см. п. 2 относительно определения законов).

Для закона $\overline{F}_N(x)$ распределения нормированной суммы $\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{S_N}$ имеем

$$\text{х. ф. } \overline{\varphi}_N\left(\frac{t}{S_N}\right) = \varphi_1\left(\frac{t}{S_N}\right)\cdots\varphi_N\left(\frac{t}{S_N}\right).$$

Пусть $B_N = L_N^{-2}\ln^{10} T_N = T_N^2 r^{10}$; его х. ф. $g_B(t) = e^{-\frac{t^2}{2B}}$. Введем вспомогательную нормальную переменную

$$G(x) = \sqrt{\frac{B}{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{B}{2}y^2}\,dy.$$

Тогда, если положить

$$\widetilde{F}_N(x) = \overline{F}_N(x) * G_B(x), \qquad \widetilde{G}(x) = G(x) * G_B(x), \tag{18}$$

то из (17) получим

$$\tilde{F}_N(x)-\tilde{G}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{it}\left[\bar{\varphi}_N\left(\frac{t}{S_N}\right)-g(t)\right]g_B(t)\,dt. \quad (19)$$

Разность $\tilde{P}_N(x)=\tilde{F}_N(x)-\tilde{G}(x)$ значительно более удобна в обращении, чем $P_N(x)=\bar{F}_N(x)-G(x)$; в частности, она непрерывна. Основные вычисления будут относиться к этой разности и поэтому нужно будет из ее свойств выводить свойства $P_N(x)$. С этой целью мы докажем некоторые леммы.

7. ЛЕММА 1. *Если число $\Delta\geqslant\frac{L_N}{r}$ и если для окрестности числа ξ длины $\frac{2\Delta}{r^2}\left(|x-\xi|\leqslant\frac{\Delta}{r^2}\right)$ имеем $|\tilde{F}_N(x)-\tilde{G}(x)|\leqslant\Delta$, то при $N>c_1>e^4$*

$$|\bar{F}_N(\xi)-G(\xi)|\leqslant\Delta\left(1+\frac{1}{r}\right). \quad (20)$$

Доказательство. Пусть это неверно и пусть сперва

$$\bar{F}_N(\xi)-G(\xi)>\Delta\left(1+\frac{1}{r}\right).$$

Так как $G'(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, а $\bar{F}_N(x)$ монотонна, то при $\delta\in\left[0,\frac{\Delta}{2r}\right]$

$$F_N(\xi+\delta)-G(\xi+\delta)\geqslant\Delta\left(1+\frac{1}{2r}\right).$$

Положим $x_0=\xi+\frac{\Delta}{4r^2}$; тогда

$$\bar{F}_N(x)-G(x)\geqslant\Delta\left(1+\frac{1}{2r}\right)$$

при $|x-x_0|\leqslant\frac{\Delta}{8r^2}$ и

$$|\bar{F}_N(x)-G(x)|\leqslant 1$$

вне этого промежутка. Далее,

$$\tilde{F}_N(x_0)-\tilde{G}(x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}[\bar{F}_N(x_0-y)-G(x_0-y)]\,dG_B(y)=$$

$$=\sqrt{\frac{B}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[F_N(x_0-y)-G(x_0-y)]\,e^{-\frac{B}{2}y^2}\,dy\geqslant$$

$$\geqslant\Delta\left(1+\frac{1}{2r}\right)\int_{|y-x_0|\leqslant\frac{\Delta}{8r^2}}\sqrt{\frac{B}{2\pi}}e^{-\frac{B}{2}y^2}\,dy-2\sqrt{\frac{B}{2\pi}}\int_{\frac{\Delta}{8r^2}}^{\infty}e^{-\frac{B}{2}y^2}\,dy.$$

Так как $B=T_N^2r^{10}$, то при $N>c_1$

$$\tilde{F}_N(x_0)-\tilde{G}(x_0)\geqslant\Delta\left(1+\frac{1}{4r}\right),$$

что противоречит условию леммы.

Если

$$\bar{F}_N(\xi)-G(\xi)<-\Delta\left(1+\frac{1}{r}\right),$$

то, полагая $x_0=\xi-\frac{\Delta}{4r^2}$, получаем при $|x-x_0|\leqslant\frac{\Delta}{8r^2}$

$$G(x)-\bar{F}_N(x)\geqslant\Delta\left(1+\frac{1}{2r}\right)$$

и снова приходим к противоречию.

ЛЕММА 2.

$$S_N^2\geqslant C_2N,\ a\ L_N=\frac{A_{3N}}{S_N^3}\geqslant\frac{1}{\sqrt{N}}. \qquad (21)$$

Первое утверждение непосредственно ясно из (4). Второе утверждение верно и без ограничений п. 3. Именно, если ρ_2 и ρ_3 — второй и третий абсолютные моменты некоторого закона распределения, то, как известно ([2]),

$$\rho_2^{\frac{1}{2}}\leqslant\rho_3^{\frac{1}{3}},\quad \rho_3\geqslant\rho_2^{\frac{3}{2}}.$$

Наряду с $F_1(x),\ldots,F_N(x)$, также и $\frac{F_1(x)+\cdots+F_N(x)}{N}$ будет законом распределения, причем

$$\rho_2=\frac{S_N^2}{N},\quad \rho_3=\frac{A_{3N}}{N}.$$

Отсюда $\frac{A_{3N}N^{\frac{3}{2}}}{NS_N^3}\geqslant 1$, что и приводит к доказательству.

8. Основной интеграл (19) сходится абсолютно и равномерно по x в силу поведения $g_B(t)=e^{-\frac{t^2}{2B}}$.

Если теперь положим $B_1=B^{\frac{1}{2}}r^2=T_Nr^7$, то получим

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-B_1}^{\infty}\frac{e^{-ixt}}{it}\left[\bar{\varphi}_N\left(\frac{t}{S_N}\right)-g(t)\right]g_B(t)\,dt\leqslant\frac{1}{T_N^{2}}=L_N^2 \qquad (22)$$

и такую же оценку для $-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{B_1}$, в силу малости $g_B(t)$. Это дает нам

$$\tilde{P}_N(x)=\tilde{F}_N(x)-\tilde{G}(x)=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-B_1}^{B_1}\frac{e^{-itx}}{it}\left[\bar{\varphi}_N\left(\frac{t}{S_N}\right)-g(t)\right]g_B(t)\,dt+R_1, \qquad (23)$$

где $R_1\leqslant L_N^2$.

Дальнейшее сужение интервалов можно произвести, используя следующую лемму, доказанную в несколько другой формулировке А. М. Ляпуновым (1901 г.): при $|t|\leqslant\frac{T_N}{24}$

$$\left|\bar{\varphi}_N\left(\frac{t}{S_N}\right)-g(t)\right|\leqslant c_2L_N|t|^3e^{-\frac{t^2}{4}} \qquad (24)$$

(см. ([4]), стр. 44; обозначения изменены).

9. Положим $L_N^{-1}=T_N$ и зафиксировав

$$\Psi_5(N)<r^2=\ln^2T_N,$$

выделим

$$I_0 = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \Psi_5(N)} \frac{e^{-ixt}}{it} \left[\bar{\varphi}_N \left(\frac{t}{S_N} \right) - g(t) \right] g_B(t)\, dt.$$

(Изучение I_0, которое мы отложим на дальнейшее, будет проводиться обычным способом разложения х. ф. в ряд Маклорена).

Далее, из (24) выводим:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Psi_5(N)}^{\frac{T_N}{24}} \frac{e^{-ixt}}{it} \left[\bar{\varphi}_N \left(\frac{t}{S_N} \right) - g(t) \right] g_B(t)\, dt \leqslant c_3 \int\limits_{\Psi_5(N)}^{\frac{T_N}{24}} |t|^2 e^{-\frac{t^2}{4}} L_N\, dt \ll$$

$$\ll \frac{L_N}{\Psi_6(N)}. \tag{25}$$

Такая же оценка годна и для $\int\limits_{-\frac{T_N}{24}}^{-\Psi_5(N)}$. Поэтому вся трудность сводится к изучению

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-B_1}^{-\frac{T_N}{24}} + \int\limits_{\frac{T_N}{24}}^{B_1} \frac{e^{-ixt}}{it} \left[\bar{\varphi}_N \left(\frac{t}{S_N} \right) - g(t) \right] g_B(t)\, dt = I_1' + I_1'',$$

где

$$I_1' = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\frac{T_N}{24}}^{B_1}, \quad I_1'' = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-B_1}^{-\frac{T_N}{24}}.$$

Для изучения, в частности, I_1', положим $t = zT_N$. Так как $B_1 = T_N r^7$, то

$$I_1' = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{24}}^{r^7} \frac{e^{-ixT_N z}}{z} \left[\bar{\varphi}_N \left(\frac{zT_N}{S_N} \right) - g(zT_N) \right] g_B(zT_N)\, dz.$$

Положим

$$\bar{\varphi}_N \left(\frac{t}{S_N} \right) = \bar{f}_N(z), \quad \varphi_j \left(\frac{zT_N}{S_N} \right) = f_j(z) \quad (j \leqslant N).$$

Таким образом,

$$\bar{f}_N(z) = f_1(z) \cdots f_N(z). \tag{26}$$

Функция $f_j(z)$ есть х. ф. для закона $F_j\left(x \frac{S_N}{T_N} \right) = H_j(x)$. Этот закон имеет дисперсию $\sigma_j^2 \frac{T_N^2}{S_N^2}$, так что общая дисперсия законов $H_j(x)$ равна T_N^2. Замечая, что

$$\int\limits_{\frac{1}{24}}^{r^7} g(zT_N) \frac{dz}{z} \ll e^{-\frac{1}{48} T_N^2} \ll \frac{L_N}{T_N}, \tag{27}$$

сводим дело к изучению

$$I_1' = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{24}}^{r^7} \frac{e^{-ixT_N z}}{z} \bar{f}_N(z)\, g_B(zT_N)\, dz.$$

10. Мы имеем

$$\bar{f}_N(z) = \prod_{j=1}^{N} f_j(z).$$

В поведении этого произведения могут быть два случая:

1) в каждой точке $z \in \left[\frac{1}{24}, r^7\right]$ $|\bar{f}_N(z)| < e^{-r^2}$. В этом случае

$$I_1' \ll e^{-\frac{r^2}{2}} \ll L_N^2. \tag{28}$$

Такого неравенства было бы достаточно для наших целей.

2) Существует $z' \in \left[\frac{1}{24}, r^7\right]$ такое, что $|\bar{f}_N(z')| \geqslant e^{-r^2}$. В силу непрерывности $\bar{f}_N(z)$ существует наименьшее z_0 под условием

$$z_0 \in \left[\frac{1}{24}, r^7\right], \quad |\bar{f}_N(z_0)| \geqslant e^{-r^2}.$$

Возьмем теперь число $1 - \frac{r^{50}}{N}$. Среди N значений $f_j(z_0)$ $(j \leqslant N)$ не более, чем $\frac{N}{45}$ могут удовлетворять неравенству

$$|f_j(z_0)| \leqslant 1 - \frac{r^{50}}{N},$$

в противном случае свойство числа z_0 было бы нарушено. Из оставшихся $N_1 \geqslant N\left(1 - \frac{1}{r^{45}}\right)$ функций $f_j(z)$ каждая удовлетворяет неравенству

$$|f_j(z_0)| > 1 - \frac{r^{50}}{N}.$$

Поэтому можно выбрать $N_2 \geqslant N\left(1 - \frac{1}{\Psi_4(N)}\right)$ х. ф. $f_j(z)$ таких, что отвечающие им индексы j не являются исключительными в смысле условий п. 3. Мы перенумеруем их, как $f_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, N_2)$. Таким образом,

$$|f_j(z_0)| > 1 - \frac{r^{50}}{N} \quad (j \leqslant N_2). \tag{29}$$

11. Для каждой $f_j(z)$ $(j \leqslant N_2)$ найдется число ϑ_j такое, что

$$f_j(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz_0x}\, dH_j(x) = e^{i\vartheta_j} M_j, \quad M_j > 1 - \frac{r^{50}}{N}.$$

Отсюда

$$1 \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz_0x - i\vartheta_j}\, dH_j(x) > 1 - \frac{r^{50}}{N},$$

$$1 - \int_{-\infty}^{\infty} \cos(z_0x - \vartheta_j)\, dH_j(x) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{z_0x}{2} - \frac{\vartheta_j}{2}\right) dH_j(x) < \frac{r^{50}}{N}. \tag{30}$$

В качестве особых точек оси x отметим нули подинтегральной функции:

$$x_{\nu j} = \frac{2\nu\pi}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0} \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Каждую точку оси x можно представить в виде

$$x = \frac{2\nu\pi}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0} + \alpha \quad \left(|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{z_0}\right). \tag{31}$$

Изучим вероятности для разных интервалов значений α при законе распределения $H_j(x)$.

Пусть $\mathfrak{B}_0$ — множество всех x с $|\alpha| \in \left[\frac{\pi}{10z_0}, \frac{\pi}{z_0}\right]$. Для таких x

$$\sin^2\left(\frac{z_0 x}{2} - \frac{\vartheta_j}{2}\right) \geqslant \sin^2\frac{\pi}{20}$$

и, в силу (30),

$$\int_{\mathfrak{B}} dH_j(x) < \frac{r^{50}}{2N\sin^2\frac{\pi}{20}} \ll \frac{r^{50}}{N}. \tag{32}$$

Окружим каждую особую точку $x_{\nu j} = \frac{2\nu\pi}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0}$ сегментом $2\Delta_0$, где

$$\Delta_0 = \frac{r^{100}}{z_0\sqrt{N}} \in \left[\frac{r^{93}}{\sqrt{N}}, \frac{24r^{100}}{\sqrt{N}}\right].$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — множество точек, дополнительное ко всем этим сегментам.

ЛЕММА 3. *Вероятность того, что точка x принадлежит множеству $\mathfrak{B}$, будет $\ll r^{-5000}$.*

Доказательство. В силу (32) можно в представлении (31) положить $|\alpha| \in \left[\Delta_0, \frac{\pi}{10z_0}\right]$. Тогда из (30) будет следовать

$$\int_{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_0} dH_j(x) \ll \frac{r^{50}}{\Delta_0^2 z_0^2 N} \ll r^{-5000},$$

что в сочетании с (32) доказывает лемму.

12. Мы видим, что структура закона $H_j(x)$ близка к «решеточной» — вероятность того, что

$$|x - x_{\nu j}| > \Delta_0 = \frac{r^{100}}{z_0\sqrt{N}} \quad (j = 1, 2, \ldots, N_2)$$

весьма мала. Сумма дисперсий законов $H_j(x)$ не превосходит T_N^2. Поэтому возможно выбрать из них $N_3 \geqslant \frac{N_2}{r}$ законов под условием:

$$d_j^2 \leqslant \frac{T_N^2}{N}\left(1 + \frac{2}{r}\right).$$

По предыдущему выбору числа N_2 имеем также

$$d_j^2 \geqslant c_1^2 \cdot \frac{T_N^2}{N} \tag{33}$$

и по неравенству Чебышева

$$\int_{|x|>r^5} dH_j(x) \ll r^{-10}. \tag{34}$$

В силу (34) можно считать существенными лишь те особые точки $x_{\nu j}$, для которых $\left|\frac{2\nu\pi}{z_0}\right| \leqslant r^5$.

Докажем теперь лемму, имеющую важное значение для последующего.

ЛЕММА 4. *Для каждого $j \leqslant N_3$ существуют по крайней мере две особые точки $x_{\nu j}$ под условием*

$$\left|\frac{2\pi\nu}{z_0}\right| \leqslant r^5, \qquad \int_{|x - x_{\nu j}| \leqslant \Delta_0} dH_j(x) \geqslant r^{-25} \quad (j \leqslant N_3), \tag{35}$$

причем хотя бы для одной из них

$$|x_{\nu j}| \geqslant 100\,\Delta_0. \tag{36}$$

Доказательство. Из леммы 3 и неравенства (34) заключаем, что существует хоть одна точка $x_{\nu j}$ под условием (35). Если она только одна, то даже

$$\int\limits_{|x-x_{\nu j}|\leqslant\Delta_0} dH_j(x) > 1 - \frac{1}{r}.$$

Но тогда

$$|x_{\nu j}| \geqslant 100\,\Delta_0.$$

В самом деле, будь это не так, мы получили бы

$$\int\limits_{|x|\leqslant 200\Delta_0} dH_j(x) > 1 - \frac{1}{r},$$

что противоречило бы условию маловероятности окрестности нуля для закона $F_j(x)$. Имеем:

$$H_j(x) = F_j\left(x \cdot \frac{S_N}{T_N}\right).$$

Получилось бы, что для закона $F_j(x)$

$$P_r\left\{|x| \leqslant \frac{200\Delta_0 S_N}{T_N}\right\} > 1 - \frac{1}{r}.$$

Но $S_N < c_1\sqrt{N}$, $\Delta_0 = \frac{r^{100}}{\sqrt{N}}$, так что

$$\frac{200\Delta_0 S_N}{T_N} \ll \frac{200 c_1 r^{100}}{T_N} \ll \frac{1}{T_N^{1-\eta_0/2}},$$

и наше неравенство противоречит (7). Итак, $|x_{\nu j}| \geqslant 100\Delta_0$.

Если наши исходные величины X_j—симметрические (случай теорем I и II), то, так как расстояние соседних точек $x_{\nu j} \geqslant \frac{2\pi}{z_0} > 2\pi r^{-7} > 2\Delta_0$, получаем, что точке $x_{\nu j}$ с $|x_{\nu j}| \geqslant 100\Delta_0$ должна отвечать вторая, симметрично расположенная точка.

В противном случае обращаемся к условию (12) теорем III и IV. Из того факта, что для закона $F_j(x)$ должно быть во всяком случае

$$P_r\{x > 0\} > \frac{1}{4}, \quad P_r\{x < 0\} > \frac{1}{4},$$

следует, что такие же неравенства должны иметь место и для закона $H_j(x)$. Отсюда, в силу леммы (3) и неравенства (34), выводим существование точки $x_{\nu j}$ под условием (35) и притом такой, что если она единственна, то сегмент $|x - x_{\nu j}| \leqslant \Delta_0$ должен содержать как положительные, так и отрицательные числа. Но это противоречило бы неравенству $|x_{\nu j}| \geqslant 100\Delta_0$, так что таких точек по крайней мере две, что доказывает лемму.

13. ЛЕММА 5. *Пусть D_l есть минимальное расстояние между точками ν_l и ν_{l+1}, отвечающими особым точкам $x_{\nu j}$ леммы 4. Тогда*

$$\frac{\pi D_l}{z_0 T_N} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}}\left(1 + \frac{1}{\Psi_8(N)}\right). \tag{37}$$

Иначе лемму можно формулировать так: *половина минимального рас-*

стояния между особыми точками x_{ν_j} леммы 4 не превосходит

$$\frac{T_N}{\sqrt{N}}\left(1+\frac{1}{\Psi_8(N)}\right).^*$$

Доказательство. Возьмем один из законов $H_j(x)$ и отметим для него особые точки леммы 4:

$$x_{\nu_j}^{(l)}=\frac{2\pi\nu_l}{z_0}+\frac{\vartheta_j}{z_0},\qquad \left|\frac{2\pi\nu_0}{z_0}\right|\leqslant r^5,\qquad \int\limits_{|x-x_{\nu_j}|\leq\Delta_0} dH_j(x)\geqslant r^{-25}.$$

Для дисперсии d_j^2, согласно леммам 3 и 4 и в силу того, что $\frac{1}{z_0}\ll 1$, имеем

$$\frac{T_N}{N}\left(1+\frac{2}{r}\right)\geqslant d_j^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2dH_j(x)\geqslant\int\limits_{|x|\leq r^5}x^2dH_j(x)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_l\int\limits_{|x-x_{\nu_j}^{(l)}|\leq\Delta_0}x^2dH_j(x)=\sum_l a_{\nu_l}(x_{\nu_j}^{(l)})^2+R_j,\qquad |R_j|\ll\frac{r^{-10}}{z_0}\ll r^{-10},$$

где

$$a_{\nu_l}=\int\limits_{|x-x_{\nu_j}^{(l)}|\leq\Delta_0}dH_j(x). \tag{38}$$

Заметим далее, что если один из участков $|x-x_{\nu_j}^{(l)}|\leqslant\Delta_0$ охватывает 0 или вообще находится внутри сегмента $|x|\leqslant 100\,\Delta_0$, то, как это следует из доказательства леммы 4, соответствующее число a_{ν_0} будет малым:

$$a_{\nu_0}<\frac{1}{\Psi_4(N)}. \tag{39}$$

Далее, в силу (34) и леммы 3, получим

$$\sum_l a_{\nu_l}\geqslant 1-\theta_j,\qquad \theta_j\ll r^{-4},$$

откуда, согласно (39),

$$\sum_{l\neq 0}a_{\nu_l}>1-\frac{1}{\Psi_9(N)}. \tag{40}$$

Возьмем теперь ту половину оси OX, где находится наиболее удаленная от O из двух ближайших к O точек $x_{\nu_j}^{(l)}$; если D_j — минимум расстояний $\nu_{l+1}-\nu_l$, то отвечающее этой точке число

$$x_{\nu_j}^{(l)}=\frac{2\pi\nu_l}{z_0}+\frac{\vartheta_j}{z_0}$$

будет по абсолютной величине $>\frac{1}{2}\frac{2\pi D_j}{z_0}=\frac{\pi D_j}{z_0}$.

По условиям (12) и (13) теорем III и IV для этой полуоси Ξ будем иметь

$$\sum_{\substack{\text{по }\Xi\\ l\neq 0}}a_{\nu_l}>\frac{1}{2}-\frac{1}{\Psi_{10}(N)}, \tag{41}$$

---

* Таким образом, (37) связывает L_N с гипотетическим числом z_0.

$$\int_{x\in\mathfrak{S}} x^2\, dH_j(x) \leqslant \frac{1}{2}\frac{T_N^2}{N}\left(1+\frac{2}{r}\right). \tag{42}$$

Отсюда, по предыдущим неравенствам

$$\frac{1}{2}\frac{T_N^2}{N}\left(1+\frac{2}{r}\right) \geqslant \left(\frac{\pi D_j}{z_0}\right)^2 \sum_{\substack{\text{по } \mathfrak{S} \\ l\neq 0}} a_{\nu_l} + R_j, \quad |R_j| \leqslant r^{-3}$$

и, в силу (41),

$$\left(\frac{\pi D_j}{z_0}\right)^2 \leqslant \frac{T_N^2}{N}\left(1+\frac{1}{\Psi_{11}(N)}\right), \quad \frac{\pi D_j}{z_0} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}}\left(1+\frac{1}{\Psi_{11}(N)}\right),$$

что доказывает лемму 5.

14. ЛЕММА 6. *Пусть* $\delta_0 = \frac{r^{10000}}{\sqrt{N}}$. *Тогда, если z удалена от всех точек вида* $\frac{mz_0}{D_j}$ $(m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ *более, чем на* δ_0, *то имеем*

$$|f_j(z)| < 1 - \frac{r^{100}}{\sqrt{N}}$$

для значений $z \in \left[\frac{1}{24}, z^7\right]$ *или* $r \in \left[-r^7, -\frac{1}{24}\right]$.

Доказательство. Пусть это неверно; тогда найдется z под условием:

$$z \in \left[\frac{1}{24}, r^7\right], \qquad z = \frac{mz_0}{2D_j} + \delta, \qquad \frac{z_0}{2D_j} \geqslant |\delta| \geqslant \delta_0 = \frac{r^{10000}}{\sqrt{N}},$$

$$f_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, dH_j(x) = e^{i\varphi}(1-\mu), \quad \mu < \frac{r^{100}}{N}. \tag{43}$$

Отсюда, как в (30), получим

$$2\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{zx}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) dH_j(x) < \frac{r^{100}}{N}.$$

Пусть

$$x_1 = \frac{2\pi\nu_1}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0} \text{ и } x_2 = \frac{2\pi\nu_2}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0}$$

— две особые точки леммы 4, притом такие, что $\nu_2 - \nu_1 = D_j$. Из (43) имеем

$$\int_{|x-x_1|\leqslant\Delta_0} \sin^2\left(\frac{zx}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) dH_j(x) + \int_{|x-x_2|\leqslant\Delta_0} \sin^2\left(\frac{zx}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) dH_j(x) < \frac{r^{100}}{N}. \tag{44}$$

Прежде всего мы докажем, что

$$\left|\sin\left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\right| < \frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}, \quad \left|\sin\left(\frac{zx_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\right| < \frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}. \tag{45}$$

Рассмотрим сначала

$$\int_{|x-x_1|\leqslant\Delta_0} \sin^2\left(\frac{zx}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) dH_j(x).$$

Положим

$$x = x_1 + \gamma, \quad |\gamma| \leqslant \Delta_0 = \frac{r^{100}}{\sqrt{N}}.$$

Имеем:

$$\sin\left(\frac{z(x_1+\gamma)}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=\sin\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}=1-\frac{\gamma^2}{8}+\ldots,\quad \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma^3}{48}+\ldots,$$

так, что величина $\sin^2\left(\frac{zx}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)$ отличается от

$$\sin^2\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\sin\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\gamma$$

на величину, меньшую $c_5\Delta_0^2-c_5\frac{r^{10000}}{N}$. Здесь возможны два случая:

1) $\left|\sin\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right|<4\Delta_0$. В этом случае первое из неравенств (45) доказано.

2) $\left|\sin\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right|\geqslant 4\Delta_0>2\sin\gamma$. Тогда

$$\sin^2\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\sin\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\gamma>\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

По предыдущему,

$$\sin^2\left(\frac{zx}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)>\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)-c_5\frac{r^{10000}}{N},$$

поэтому, из (44) заключаем:

$$\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\int\limits_{|x-x_1|\leqslant\Delta_0}dH_j(x)<2c_5\frac{r^{10000}}{N}.$$

Но, по условию леммы 4,

$$\int\limits_{|x-x_1|\leqslant\Delta_0}dH_j(x)\geqslant r^{-25},$$

откуда

$$\sin^2\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)<4c_5\frac{r^{10025}}{N},\qquad\left|\sin\left(\frac{zx_1}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right|<\frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}.$$

Аналогично доказывается и второе из неравенств (45). Мы имеем, таким образом, два неравенства:

$$\left|\sin\left[\left(\frac{mz_0}{D_j}+\delta\right)\left(\frac{\pi\nu_1}{z_0}+\frac{\vartheta_j}{2z_0}\right)-\frac{\varphi}{2}\right]\right|<\frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}$$

и

$$\left|\sin\left[\left(\frac{mz_0}{D_j}+\delta\right)\left(\frac{\pi\nu_2}{z_0}+\frac{\vartheta_j}{2z_0}\right)-\frac{\varphi}{2}\right]\right|<\frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}.$$

Отсюда выводим: существуют такие целые числа k_1 и k_2, для которых

$$\left(\frac{mz_0}{D_j}+\delta\right)\left(\frac{\pi\nu_1}{z_0}+\frac{\vartheta_j}{2z_0}\right)-\frac{\varphi}{2}=k_1\pi+\theta_1,$$

$$\left(\frac{mz_0}{D_j}+\delta\right)\left(\frac{\pi\nu_2}{z_0}+\frac{\vartheta_j}{2z_0}\right)-\frac{\varphi}{2}=k_2\pi+\theta_2,$$

где $|\theta_1|$ и $|\theta_2|<c_6\frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}$. Вычитая первое равенство из второго и учитывая, что $\nu_2-\nu_1=D_j$, найдем

$$\delta\cdot\frac{\pi D_j}{z_0}=(k_2-k_1-m)\pi+\theta_3=n\pi+\theta_3,$$

где n — целое число и $|\theta_3| < 2c_6 \frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}$. Отсюда

$$\delta = \frac{nz_0}{D_j} + \theta_4, \quad |\theta_4| < c_6 \frac{r^{1007}}{\sqrt{N}}. \tag{46}$$

Но $|\delta| < \frac{z_0}{2D_j}$, следовательно $n = 0$ и $\delta = \theta_4$. Однако, по условию леммы, $|\delta| > \delta_0 = \frac{r^{10000}}{\sqrt{N}}$, что противоречит (46). Лемма доказана.

Мы видим, насколько существенно наличие по крайней мере двух особых точек типа леммы 4. При существовании лишь одной особой точки лемма 5, на которой основано все последующее, была бы неверна.

15. Предыдущие вычисления верны для каждого из наших законов $H_j(x)$ $(j \leqslant N_3)$, где $N_3 \geqslant \frac{N}{r}$. Для каждого из них существует свое число D_j — минимальная разность $\nu_{l+1} - \nu_l$ чисел ν_l, характеризующих особые точки. По лемме 4 имеем

$$\left|\frac{2\pi\nu_l}{z_0}\right| \leqslant r^5,$$

откуда

$$|\nu_l| \leqslant \left|\frac{z_0 r^5}{2\pi}\right| < r^{12}.$$

Поэтому существует по крайней мере $N_4 \geqslant \frac{N_3}{r^{12}} \geqslant \frac{N}{r^{13}}$ законов $H_j(x)$ $(j \leqslant N_4)$, у которых соответствующие числа $D_j = D$ совпадают. В силу леммы 6 при

$$z = \frac{mz_0}{D} + \delta, \quad |\delta| \geqslant \delta_0 \tag{47}$$

$$|f_j(z)| < 1 - \frac{r^{100}}{N} \quad (j \leqslant N_4). \tag{48}$$

ЛЕММА 7. *Для точек* $z \in \left[\frac{1}{24}, r^7\right]$ *под условием* (47) *имеем*

$$\left|\prod_{j=1}^{N} f_j(z)\right| < e^{-r^2}. \tag{49}$$

Доказательство. В произведение (49) войдут N_4 функций $f_j(z)$ под условием (48). Модули остальных х. ф. не превосходят 1. Так как $N_4 \geqslant \frac{N}{r^{13}}$, то (49) следует из (48).

16. Вернемся к основному интегралу I_1' (п. 9):

$$I_1' = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{24}}^{r^7} \frac{e^{-ixT_N z}}{z} - f_N(z)\, g_B(zT_N)\, dz, \tag{50}$$

где $f_N(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \cdots f_N(z)$. Мы видим, что на участке интегрирования по z функция $\overline{f}_N(z)$ будет мала по модулю:

$$|\overline{f}_N(z)| < e^{-r^2} \tag{51}$$

за возможным исключением сегментов длины $2\delta_0$, описанных вокруг точек $z = \frac{mz_0}{D}$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Эти сегменты играют в данной зада-

че роль «интегралов 1 класса» задач аддитивной теории чисел И. М. Виноградова. I_1'' ведет себя, разумеется, так же, как I_1'.

17. В силу леммы 7, мы можем написать:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\frac{1}{24} \leq |z| r \leq r^7} \int_{\left|z - \frac{mz_0}{D}\right| \leq \delta_0} \frac{e^{-ixT_N z}}{z} \overline{f}_N(z)\, g_B(z)\, dz + R_2, \tag{52}$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad R_2 \ll e^{-\frac{r^2}{2}}. \tag{53}$$

Заметим, что здесь

$$|m| \leq Dr^7 < r^{20}. \tag{54}$$

ЛЕММА 8. *Пусть* ξ_1 *и* ξ_2 — *два числа такие, что* $\xi_2 - \xi_1 = np_N$, *где* $p_N = \frac{2\pi D}{z_0 T_N}$, *а* n — *целое число* $\leq \frac{1}{\sqrt{\delta_0}}$. *Тогда*

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} I_1\, dx \ll np_N L_N r^{-10}. \tag{55}$$

Доказательство. Обратимся к формуле (52), выберем какое-либо из чисел m и рассмотрим

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} dx \int_{\left|z - \frac{mz_0}{D}\right| \leq \delta_0} \frac{e^{-ixT_N z}}{z} \overline{f}_N(z)\, g_B(z)\, dz =$$

$$= \int_{\left|z - \frac{mz_0}{D}\right| \leq \delta_0} \frac{e^{-i\xi_2 T_N z} - e^{-i\xi_1 T_N z}}{-iz^2 T_N} \cdot \overline{f}_N(z)\, g_B(z)\, dz.$$

Модуль этого выражения не превосходит

$$\frac{2\delta_0}{z_0^2 T_N} \sup_{\left|z - \frac{mz_0}{D}\right| \leq \delta_0} \left| e^{(\xi_2 - \xi_1) T_N z i} - 1 \right|.$$

Далее,

$$(\xi_2 - \xi_1)\, T_N zi = \frac{n \cdot 2\pi D}{z_0 T_N} \cdot T_N \left(\frac{mz_0}{D} + \delta\right) i = 2\pi mni + \theta_5 i,$$

где $|\theta_5| \ll \delta_0^{\frac{1}{2}}$, так что

$$\left| e^{(\xi_2 - \xi_1) T_N z i} - 1 \right| \ll \delta_0^{\frac{1}{2}}.$$

В самом деле, по лемме 5, $\frac{\pi D}{z_0 T_N} < \frac{2}{\sqrt{N}}$, а по лемме 2, $T_N < \sqrt{N}$. Поэтому модуль нашего интеграла будет

$$\ll \frac{2}{z_0 \pi} \cdot \frac{\pi}{z_0 T_N} \delta_0^{\frac{3}{2}} \ll np_N L_N r^{-100},$$

так как

$$L_N \geq \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \delta_0 = \frac{r^{10000}}{\sqrt{N}}.$$

Далее, количество чисел m не превосходит r^{20}, что и дает (55).

18. Теперь мы изучим

$$I_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t| \leqslant \Psi_5(N)} \frac{e^{-itx}}{t} \left[\bar{\varphi}_N\left(\frac{t}{s_N}\right) - g(t) \right] g_B(t)\, dt. \quad (56)$$

Имеем:

$$\bar{\varphi}_N\left(\frac{t}{S_N}\right) = \varphi_1\left(\frac{t}{S_N}\right) \cdots \varphi_N\left(\frac{t}{S_N}\right).$$

Разлагая х. ф. $\varphi_j\left(\frac{t}{S_N}\right)$ в ряд Маклорена, получим при $|t| < \Psi_5(N)$

$$\varphi_j\left(\frac{t}{S_N}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{t}{S_N}x} dF_j(x) = 1 - \frac{\sigma_j^2}{2S_N^2} t^2 - \frac{i\alpha_{3j}}{6S_N^3} t^3 -$$

$$- \frac{it^3}{6S_N^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta_j x} - 1)\, x^3\, dF_j(x),$$

где α_{3j} — третий момент, $\theta_j = \theta_j(t)$, $|\theta_j| < \frac{\Psi_5 N}{S_N}$.

Далее,

$$\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{t^3}{6S_N^3} \int\limits_{-\infty} e^{i\theta_j x} x^3\, dF_j(x) \right|^2 \leqslant \frac{t^6}{N^{\frac{1}{2}} S_N^3} \sum_{j=1}^{N} \beta_{3j} \leqslant \frac{L_N |t|^3}{N^{\frac{1}{2}}}, \quad (57)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{t^2}{2} \frac{\sigma_j^2}{S_N^2} \right)^2 \leqslant t^4 \cdot \max_j \frac{\sigma_j}{S_N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_j^3}{S_N^3}.$$

Но $\sigma_j^3 \leqslant \beta_{3j}$ [см. (²)], откуда для любого $j \leqslant N$

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_j^3}{S_N^3} \leqslant L_N, \quad \frac{\sigma_j}{S_N} \leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \beta_{3j}}{S_N} = L_N^{\frac{1}{3}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{t^2}{2} \frac{\sigma^2}{S_N^2} \right)^2 < t^4 L_N^{\frac{4}{3}}. \quad (58)$$

Из (57) и (58), учитывая, что $|t|^6 < (\Psi_5(N))^6 < L_N^{-\frac{1}{6}}$, находим

$$\sum_{j=1}^{N} \ln \varphi_j\left(\frac{t}{S_N}\right) = -\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{6} \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_{3j}}{S_N^3} - \frac{it^3}{6S_N^3} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta_j x} - 1)\, x^3\, dF_j(x) + R(t),$$

$$|R(t)| < (t^2 + t^4)\, L_N^{\frac{4}{3}}. \quad (59)$$

Далее,

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta_j x} - 1)\, x^3\, dF_j(x) \right| \leqslant \frac{1}{\Psi_{12}(N)} \beta_{3j} + R_j^{(N)},$$

$$R_j^{(N)} = \int\limits_{|x| \geqslant \Psi_3(N)} |x|^3\, dF_j(x).$$

В силу (9),

$$\frac{1}{B_{3N}} \sum_{j=1}^{N} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta_j x} - 1)\, x^3\, dF_j(x) \right| \leqslant \frac{1}{\Psi_2(N)} + \frac{1}{\Psi_{12}(N)}. \quad (60)$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{N} \ln \varphi_j\left(\frac{t}{S_N}\right) = -\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{6}\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_{3j}}{S_N^3} + R_1(t), \tag{61}$$

$$|R_1(t)| < (t^2 + |t|^3 + t^4)\frac{L_N}{\Psi_{13}(N)}.$$

Отсюда легко выводим:

$$\prod_{j=1}^{N} \varphi_j\left(\frac{t}{S_N}\right) = g(t)\left(1 - \frac{it^3}{6}\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_{3j}}{S_N^3}\right) + R_2(t), \tag{62}$$

$$|R_2(t)| \ll (t^2 + |t|^3 + t^4)\frac{L_N}{\Psi_{13}(N)}.$$

Заметим, что при $|t| \leqslant \Psi_5(N) < r^3$

$$|g_B(t) - 1| \ll \frac{(\Psi_5(N))^2}{T_N r^{10}} \ll L_N r^{-5}.$$

Отсюда, полагая

$$\Lambda_N = \frac{1}{S_N^3}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{3j},$$

имеем

$$I_0 = \frac{\Lambda_N}{12\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t^3 e^{-ixt - \frac{t^2}{2}}dt + R_3, \quad R_3 \ll \frac{L_N}{\Psi_{14}(N)}.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^3 e^{-ixt-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2),$$

то

$$I_0 = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)\Lambda_N + R_3, \quad R_3 \ll \frac{L_N}{\Psi_{14}(N)}. \tag{63}$$

В условиях теорем I и II, когда величины X_j распределены симметрически, имеем $\Lambda_N = 0$, $I_0 = R_3$. Кроме того, очевидно, $|\Lambda_N| \leqslant L_N < \frac{1}{\Psi_1(N)}$.

19. Возвращаясь к п. 10, заметим, что $\bar{f}_N(-z)$ комплексно сопряжена с $\bar{f}_N(z)$. Поэтому, для случая 1), п. 10, учитывая (22), (24), (27), (28) и (62), находим в условиях теорем I и II

$$|\tilde{P}_N(x)| = |\tilde{F}_N(x) - \tilde{G}(x)| \ll \frac{L_N}{\Psi_{15}(N)}.$$

Если $|x| \leqslant M$, то при достаточно большом N получим

$$|\tilde{P}_N(x)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{L_N}{\Psi_{16}(N)} \quad (|x| \leqslant M;\ N > N_0(M)).$$

Применяя к этому неравенству лемму 1, легко выведем

$$|\bar{P}_N(x)| < \frac{L_N}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 + \frac{1}{r}\right)\frac{1}{\Psi_{17}(x)} \quad (|x| < M;\ N > N_0(M)),$$

что полностью покрывает собой содержание теорем I и II.

В условиях теорем III и IV, применяя очевидный аналог леммы 1 к функции

$$\widetilde{Q}_N(x) = (\overline{F}_N(x) - G(x) - H_N(x)) * G_B(x),$$

получим

$$|Q_N(x)| \leqslant \frac{L_N}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{1}{\Psi_{17}(N)} \quad (|x| \leqslant M;\ N > N_0(M)),$$

что покрывает собой содержание теорем III и IV.

Таким образом, случай 1) п. 10 сразу приводит к нужным результатам. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать лишь случай 2) п. 10 и принимать, что указанное там число z_0 существует.

Мы будем также делать выводы в условиях теорем I и II; выводы для теорем III и IV будут совершенно аналогичны с заменой $P_N(x)$ и $\widetilde{P}_N(x)$ на $Q_N(x)$ и $\widetilde{Q}_N(x)$.

20. ЛЕММА 9. *Существует число q_N под условиями*

$$\left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right) L_N \leqslant q_N \leqslant 2\left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right) L_N, \tag{64}$$

такое, что для любого x

$$\left| \int_x^{x+q_N} \widetilde{P}_N(x)\, dx \right| \ll q_N L_N \frac{1}{\Psi_{18}(N)}. \tag{65}$$

Доказательство. Обратимся к лемме 8. Участвующее там число $p_N = \frac{2\pi D}{z_0 T_N}$, в силу леммы 5 (неравенство (37)), не превосходит $\frac{2}{\sqrt{N}}\left(1 + \frac{1}{\Psi_8(N)}\right)$. Отсюда, согласно оценкам для z_0 и D, получим $T \quad > \sqrt{N}(\ln N)^{-100}$, а по лемме 2, $L_N \geqslant \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Если теперь p_N не превосходит половины количества $2L_N\left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right)$, то возможно подобрать целое n так, чтобы $q_N = np_N$ удовлетворяло (64). При этом будет $n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta_0}}$, так как $T_N > N^{\frac{1}{2}}(\ln N)^{-100}$, $L_N \geqslant \frac{1}{\sqrt{N}}$, $\delta_0 = \frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}$, так что np_N удовлетворяет условиям леммы 8. Используя лемму 8, (22), (24), (27), (28) и (62), получим (65).

ЛЕММА 10. *Если q_N — число леммы 9, то на всяком сегменте $[x, x + q_N]$ существует ξ такое, что*

$$|\widetilde{P}_N(\xi)| \ll L_N \cdot \frac{1}{\Psi_{19}(N)}. \tag{66}$$

Доказательство следует из непрерывности $\widetilde{P}_N(x)$ и неравенства (65).

ЛЕММА 11. *Если $\xi_2 - \xi_1 = np_N$, где $p_N = \frac{2\pi D}{z_0 T_N}$ — число из леммы 8, и $n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta_0}}$, то*

$$|\widetilde{P}(\xi_2) - \widetilde{P}(\xi_1)| \ll \frac{L_N}{\Psi_{20}(N)}. \tag{67}$$

Доказательство. В силу (22), (24), (27), (28) и (62), достаточно изучить поведение I_1 [см. (52)].

Рассмотрим для какого-либо m из (52) разность

$$\int\limits_{\left|z-\frac{mz_0}{D}\right|\leqslant\delta_0} \frac{e^{-i\xi_2 T_N z}-e^{-i\xi_1 T_N z}}{z} f_N(z)\, g_B(z)\, dz.$$

Изучая

$$|e^{-i\xi_2 T_N z}-e^{-i\xi_1 T_N z}|=|e^{(\xi_2-\xi_1)T_N zi}-1|,$$

находим, как и в доказательстве леммы 6, что модуль нашего интеграла будет $\ll L_N r^{-100}$ и что количество чисел m не превосходит r^{20}; это приводит нас к (67).

Заметим, что эта лемма указывает нам на своеобразную периодичность $\widetilde{P}_N(x)$ с точностью до $\frac{L_N}{\Psi_{20}(N)}$. Периодом будет число $p_N=\frac{2\pi D}{z_0 T_N}$.

Объединяя результаты лемм 8, 10 и 11, мы можем сказать:

Внутри всякого сегмента $[x, x+q_N]$ найдется такое число ξ, что

$$|P(\xi+np_N)|\leqslant\frac{L_N}{\Psi_{21}(N)} \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots;\quad |n|\leqslant\delta_0^{-\frac{1}{2}}). \tag{68}$$

В частности, можно взять $np_N=q_N$ под условиями (64).

Далее, имеем

$$\int\limits_{\xi}^{\xi+np_N}\overline{P}_N(x)\,dx\ll np_N L_N\frac{1}{\Psi_{21}(N)}. \tag{69}$$

ЛЕММА 12. *Пусть* $|x|<M$. *Тогда*

$$|\widetilde{P}_N(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}L_N(1+\varepsilon'_N(M)), \tag{70}$$

где $\varepsilon'_N(M)\to0$ *при* $N\to\infty$ *равномерно для всех* $\{X_j\}$, *допустимых условиями теорем* I *и* II.

Доказательство. Докажем сперва вспомогательное предложение. Пусть $A(x)$—монотонная неубывающая непрерывная функция, а $B(x)=kx+b$—линейная функция, причем $0\leqslant k\leqslant1$. Пусть для некоторого ξ и $p>0$ известно, что

$$A(\xi)=B(\xi),\quad A(\xi+p)=B(\xi+p),\quad \int\limits_{\xi}^{\xi+p}[A(x)-B(x)]\,dx=0.$$

Тогда

$$|A(x)-B(x)|\leqslant\frac{p}{2}k\quad(\xi\leqslant x\leqslant\xi+p). \tag{71}$$

Для доказательства обратимся к фиг. 1. Пусть (71) неверно, и при $x=\xi_0$ имеем

$$|A(\xi_0)-B(\xi_0)|>\frac{p}{2}k.$$

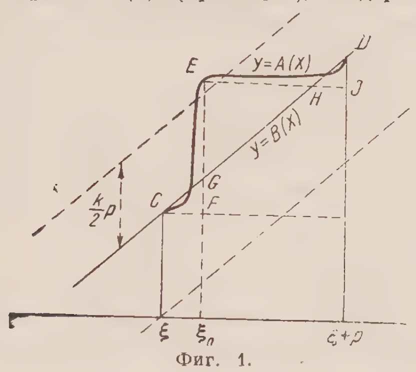
Пусть, например,

$$A(\xi_0)-B(\xi_0)>\frac{p}{2}k.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество точек x, для которых $A(x) \geqslant B(x)$, $\mathfrak{B}$ — дополнительное множество в $[\xi, \xi+p]$. Мы видим из фиг. 1, что, в силу монотонности $A(x)$, треугольник GEH должен полностью лежать между графиками $A(x)$ и $B(x)$. Его площадь $> \frac{kp^2}{4}$, так что

$$\int_{\mathfrak{A}} [A(x)-B(x)]\,dx > \frac{kp^2}{4}.$$

С другой стороны, в силу той же монотонности $A(x)$, части ее графика, лежащие ниже графика $B(x)$ (при $x \in \mathfrak{B}$), содержатся внутри ряда



Фиг. 1.

треугольников типа CGF и HDJ, общая площадь которых, очевидно, не превосходит $\frac{kp}{2}\cdot\frac{p}{2}=\frac{kp^2}{4}$. Таким образом,

$$\int_{\mathfrak{A}} [A(x)-B(x)]\,dx > -\int_{\mathfrak{B}} [A(x)-B(x)]\,dx,$$

что противоречит условию леммы.

Далее, если заменить условия этого предложения следующими: вместо p ввести последовательность чисел $q_N \to 0$, а вместо $A(x)$ — последовательность $A_N(x)$ под условиями:

$$A_N(x)=B(x)+o(q_N), \quad A_N(x+q_N)=B(x+q_N)+o(q_N),$$
$$\int_{\xi}^{\xi+q_N} [A_N(x)-B(x)]\,dx = o(q_N^2),$$

то это сведется к тому, что в нашем чертеже будут допущены вариации кривой $A(x)$, бесконечно малые сравнительно с $p=q_N$. Неравенство (71) примет в этом случае вид:

$$|A_N(x)-B(x)| \leqslant \frac{q_N}{2}k(1+o(1)) \text{ при } N\to\infty. \tag{72}$$

Мы можем теперь обратиться к (68) и (69) и взять $A_N(x)=\widetilde{F}_N(x)$, а q_N — под условиями (64). Выберем ξ так, чтобы $x\in[\xi, \xi+q_N]$ и положим

$$B(x)=G(\xi)+G'(\xi)(x-\xi)=G(\xi)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}(x-\xi).$$

Тогда, в силу (72),

$$|\widetilde{F}_N(x) - B(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot \frac{q_N}{2}(1 + \varepsilon''_N(M)), \quad |x - \xi| \leqslant q_N,$$

где $\varepsilon''_N(M)$ — число того же типа, что $\varepsilon'_N(M)$. Далее, легко подсчитываем, что

$$|B(x) - \widetilde{G}(x)| \ll \frac{L_N}{\Psi_{22}(N)}, \quad |e^{-\frac{\xi^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}| \ll L_N,$$

$$\frac{q_N}{2} \leqslant L_N\left(1 + \frac{1}{\Psi_3(N)}\right),$$

откуда

$$\widetilde{F}_N(x) - \widetilde{G}(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} L_N(1 + \varepsilon'_N(M)),$$

что и доказывает (70).

21. Из (70), на основании леммы 1, следует теорема I. Так же доказывается и теорема III:

$$|Q_N(x)| < L_N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + \varepsilon_N(M)) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant M.$$

22. Остается доказать замечание к теореме I о роли симметрической схемы Бернулли и теоремы II и IV.

Замечание о роли схемы Бернулли, для которой $F_j(x)$ имеет точками роста лишь -1 и 1 со скачками $\frac{1}{2}$, следует из равенства, доказанного например, в ([4]), стр. 54:

$$\widetilde{F}_N(x) - G(x) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi N}} Q_1\left(\frac{x\sqrt{N}}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad Q_1(x) = [x] - x + \frac{1}{2}.$$

При этом надо учесть, что в точках разрыва $\overline{F}(x)$ мы полагаем

$$\overline{F}_N(x) = \frac{\overline{F}_N(x+0) + \overline{F}_N(x-0)}{2}.$$

23. Согласно лемме 10, на всяком сегменте $[x, x + q_N]$ существует ξ такое, что

$$|\widetilde{P}(\xi)| \ll \frac{L_N}{\Psi_{19}(N)}, \tag{66}$$

где $\Psi_{19}(N) < r^{0,1}$.

Обращаясь к теореме II, мы хотим вывести существование чисел, аналогичных ξ, для $P_N(x)$. Для этого нужно иметь возможность применить лемму I.

ЛЕММА 13. *Если ξ — число под условием* (66), *то в сегменте* $[\xi, \xi + q_N]$ *найдется* ζ *такое, что*

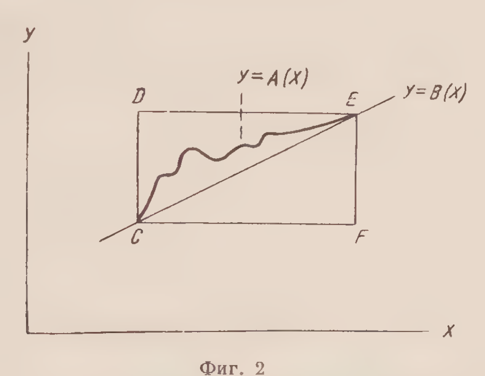
$$|\widetilde{P}_N(x)| \ll \frac{L_N}{\Psi_{23}(N)}, \; x \in \left[\zeta - \frac{q_N}{2}, \; \zeta + \frac{q_N}{2}\right]. \tag{73}$$

Доказательство. Докажем сперва вспомогательное предложение. Пусть $A(x)$ — непрерывная неубывающая функция, $B(x) = kx + b$ — линейная функция, $P(x) = A(x) - B(x)$, $0 \leqslant k \leqslant 1$. Пусть $P(\xi) = P(\xi + q_N) = 0$. Тогда найдется сегмент $\left[\zeta - \frac{q_N}{2}, \zeta + \frac{q_N}{2}\right] \subset [\xi, \xi + q_N]$, такой, что на этом сегменте

$$|P(x)| \ll \frac{q_N}{r^{\frac{1}{2}}}. \tag{74}$$

Рассмотрим множество нулей $P(x)$ в $[\xi, \xi + q_N]$. Это будет замкнутое множество. Если не существует промежутка свободного от нулей длины $> \frac{q_N}{r^{\frac{2}{3}}}$, то, в силу монотонности $A(x)$, легко выводим, что

$|P(x)| \ll \frac{q_N}{r^{\frac{2}{3}}}$ во всем сегменте $[\xi, \xi + q_N]$, так что (74) верно.



Фиг. 2

Пусть, теперь, между нулями $P(x)$ существует промежуток длины $l \geqslant \frac{q_N}{r^{\frac{2}{3}}}$. Тогда, как видно из фиг. 2, график $A(x)$ лежит либо весь в треугольнике CDE, либо весь в треугольнике CEF. В первом случае за искомую точку ζ можно взять $x_2 - \frac{2q_N}{r}$ (см. фиг. 2), во втором случае можно взять $\zeta = x_1 + \frac{2q_N}{r}$. Замечая, что

$$\tilde{P}_N(\xi) \ll \frac{q_N}{\Psi_{24}(N)}$$

[см. (64)] и что, в силу (67),

$$\tilde{P}_N(\xi + \gg q_N) | \frac{q_N}{\Psi_{24}(N)},$$

мы переходим от доказательства вспомогательного предложения к дока-

зательству леммы 13 совершенно так же, как это было сделано в доказательстве леммы 12.

24. ЛЕММА 14. *В каждом сегменте* $[x, x+q_N]$ *можно отыскать число* ζ_0, *такое, что, полагая*

$$\zeta_\nu = \zeta_0 + \nu q_N \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; |\nu| < \Psi_{25}(N)),$$

получим

$$|P_N(\zeta_\nu)| < L_N \frac{1}{\Psi_{26}(N)}.$$

Это — первая часть теоремы II о «локальной решетке прижатия законов».

Доказательство. За число ζ_0 можно взять число ζ из леммы 13. Так как, согласно лемме 13,

$$|\tilde{P}_N(\zeta_0+\rho) \ll| L_N \frac{1}{\Psi_{23}(N)}, \quad |\rho| \leqslant \frac{q_N}{r},$$

то, по лемме 1,

$$|P_N(\zeta_0)| \ll L_N \frac{1}{\Psi_{23}(N)}.$$

Далее, в силу леммы 11, при $|\nu| < \Psi_{28}(N)$ будем иметь

$$|\tilde{P}_N(\zeta_0+\nu q_N+\rho)| \ll L_N \cdot \frac{1}{\Psi_{23}(N)} + \frac{|\nu| L_N}{\Psi_{20}(N)} \ll \frac{L_N}{\Psi_{27}(N)},$$

откуда, по лемме 1, снова заключаем, что

$$|P_N(\zeta_0 + q_N \cdot \nu)| \ll L_N \frac{1}{\Psi_{26}(N)}$$

при $|\nu| \leqslant \Psi_{25}(N)$.

25. Остается доказать вторую часть теоремы II: для любого x с $|x| \leqslant M$ имеем

$$\int_x^{x+q_N} P_N(x)\,dx \ll q_N L_N \cdot \frac{1}{\Psi_6(N)}. \tag{11}$$

Это следует из леммы 9, с помощью следующей леммы:

ЛЕММА 15.

$$\int_x^{x+q_N} (P_N(x) - \tilde{P}_N(x))\,dx \ll L_N \cdot \frac{q_N}{r}.$$

Доказательство. Имеем

$$\tilde{P}_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_N(x-y) f_B(y)\,dy, \quad f_B(y) = \sqrt{\frac{B}{2\pi}} e^{-\frac{B}{2}y^2}, \quad B = L_N^{-2} r^{10}.$$

Отсюда

$$\int_x^{x+q_N} (P_N(x) - \tilde{P}_N(x))\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_B(y)\,dy \left\{ \int_x^{x+q_N} (P_N(x) - P_N(x-y))\,dx \right\}.$$

При $|y| > Y = L_N r^{-2}$ имеем

$$f_B(y) < e^{-r^3}, \quad \int_Y^{\infty} f_B(y)\,dy \ll e^{-r^2}.$$

Поэтому

$$\left|\int_{x}^{x+q_N}(P_N(x)-\tilde{P}_N(x))\,dx\right| < \int_{-Y}^{Y} f_B(y)\,dy\left\{\int_{x}^{x+q_N}(P_N(x)-P_N(x-y))\,dx\right\}+R,$$

$$|R|\ll e^{-r^2}.$$

Далее, в силу теоремы I, при $|x|\leqslant M$

$$|P_N'(x)|\ll L_N;$$

откуда

$$\int_{x}^{x+q_N} P_N(x)\,dx-\int_{x}^{x+q_N} P_N(x-y)\,dx=$$

$$=-\int_{x}^{x+y} P_N(x)\,dx-\int_{x+q_N}^{x+q_N+y} P_N(x)\,dx \ll YL_N=L_N\frac{L_N}{r^2}\ll L_N\cdot\frac{q_N}{r^2}.$$

Этим лемма доказана.

26. Доказательство теоремы IV совершенно аналогично. Роль $P_N(x)$ и $\tilde{P}$ (x) играют $Q_N(x)$ и $\tilde{Q}_N(x)$.

Поступило
18. X. 1946.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cramer H., On the composition of elementary errors, Skand. Aktuariëntidskrift, 1928.

[2] Cramer H., Random variables and probability distributions, 1937.

[3] Berry A. C., The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates, Trans. Amer. Math. Soc., 49 (1941), 122—136.

[4] Esseen C. G., Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace—Gaussian law, Acta Mathematica, 77 (1945), 1—125.

U. V. LINNIK. ON THE ACCURACY OF THE APPROXIMATION TO THE GAUSS DISTRIBUTION BY SUMS OF INDEPENDENT VARIABLES

SUMMARY

The present paper is a research in the direction of the work by A. C. Berry and C. G. Esseen [(3) and (4) in the list of references]. The conditions imposed upon the independent variables $X_1, X_2, \ldots, X_N, \ldots$ are more restrictive that in (3) and (4), but the obtained results are much more precise. We consider a sequence of independent variables $X_1, X_2 \ldots, X_N, \ldots$, with the distribution functions $F_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, N)$, the mathematical expectations $E(X_j)=0$ and the finite dispersions σ_j^2.

Let $S_N^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_N^2 \neq 0$ and let $\overline{F}_N(x)$ denote the distribution functions of the normalized sum $Z_N = \frac{X_1 + \cdots + X_N}{S_N}$. Let $\Psi_0(N)$, $\Psi_1(N), \ldots$ be a sequence of arbitrarily choosed and fixed functions tending to infinity as slowly as we please.

The variables X_j are supposed to satisfy the following conditions:

I)
$$S_N^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_N^2 < C_1 N,$$
$$\sigma_j^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_j(x) \geqslant c_1^2, \tag{1}$$

where C_i and c_i are positive constants. Exceptions for certain j's are admissible; the number of such exceptional j's not exceeding N cannot be greater than $\frac{N}{\Psi_0(N)}$. If L_N denotes the Liapounoff ratio

$$L_N = \frac{1}{S_N^3} \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dF_j(x)$$

we have

$$L_N \leqslant \frac{1}{\Psi_1(N)}. \tag{2}$$

II)
$$\frac{1}{A_{3N}} \sum_{j=1}^{N} R_j^{(N)} \leqslant \frac{1}{\Psi_2(N)},$$

where

$$R_j^{(N)} = \int_{|x| > \frac{S_N}{\Psi_3(N)}} |x|^3 dF_j(x). \tag{3}$$

III)
$$\int_{|x| \leqslant L_N^{1-\eta_0}} dF_j(x) \leqslant \frac{1}{\Psi_4(N)} \quad (j \leqslant N), \tag{4}$$

where exceptions may occur for at most $\frac{N}{\Psi_0(N)}$ j's. Under these conditions the following theorems take place.

THEOREM 1. *If the variables X_j are moreover symmetrically distributed $(F_j(x) = 1 - F_j(-x))$ then for any fixed M and for $|x| \leqslant M$ we have*

$$\frac{|F_N(x) - G(x)|}{L_N} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + \varepsilon_N(M)), \tag{5}$$

where $\varepsilon_N(M)$ depends only on N, M, as well as on the choice of, $\Psi_1, \ldots, \Psi_4$, and $\varepsilon_N(M) \to 0$ for $N \to \infty$. (Thus, $\varepsilon_N(M) \to 0$ uniformly with respect to all admissible systems of X_j's).

The main interest of the estimate (5) is that for the symmetrical Bernoullian scheme («pitch and toss»):

$$F_j(x)=0 \ (x<-1), \quad F_j(x)=\frac{1}{2}\,(-1<x<1),$$
$$F_j(x)=1 \ (x>1), \qquad L_N=\frac{1}{\sqrt{N}}$$

there exist an infinite sequence of points $x_\nu\,(\nu=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ such that $x_{\nu+1}-x_\nu=o(1)$ as $N\to\infty$, $x_\nu\to\pm\infty$ as $\nu\to\pm\infty$ and

$$\frac{|\overline{F}_N(x_\nu)-G(x_\nu)|}{L_N}>\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1-\varepsilon_N),$$

where $\varepsilon_N\to 0$ as $N\to\infty$ and $x\leqslant M$.

Thus, under the conditions I), II), III) the Bernoullian scheme, roughly speaking, is that differing most from the normal distribution.

THEOREM II. *Under the conditions of theorem* I *there exist a sequence of points* $\zeta_{-n}^{(N)}, \zeta_{-n+1}^{(N)}, \ldots, \zeta_0^{(N)}, \zeta_1^{(N)}, \ldots, \zeta_l^{(N)}$ *such that*

$$\zeta_{\nu+1}^{(N)}-\zeta_\nu^{(N)}=q_N, \quad |M-\zeta_l^{(N)}|\leqslant q_N, \qquad |-M-\zeta_{-n}^{(N)}|\leqslant q_N,$$

where

$$\left(1+\frac{1}{\Psi_5(N)}\right)L_N\leqslant q_N\leqslant 2\left(1+\frac{1}{\Psi_5(N)}\right)L_N$$

and

$$|\overline{F}_N(\zeta_\nu^{(N)})-G(\zeta_\nu^{(N)})|\leqslant\varepsilon'_N L_N, \tag{6}$$

where $\varepsilon'_N\to 0$ *as* $N\to\infty$ *uniformly with respect to* $\{X_j\}$.

Moreover, for $|x|<M$ *we have*

$$\int_x^{x+q_N}(\overline{F}_N(x)-G(x))\,dx\leqslant c_2 q_N L_N\frac{1}{\Psi_6(N)}\,. \tag{7}$$

Hence, there exist a «lattice» of equi-distant $\zeta_\nu^{(N)}$, where the difference of laws is much smaller than in the general case.

It should be remarked that theorem I is a simple geometrical consequence of (6), (7) and of the fact that distribution functions are monotonic. If our variables $\{X_j\}$ are not symmetrically distributed, but the following properties take place $\left(\frac{N}{\Psi_0(N)}\text{ exceptions being admitted}\right)$:

IV) $$\int_{x>0}dF_j(x)=\frac{1}{2}\quad(j\leqslant N),$$

V) $$\int_{x>0}x^2\,dF_j(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,dF_j(x)\quad(j\leqslant N)$$

and if

$$H_N(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)\,\Lambda_N, \quad \Lambda_N = \frac{1}{S_N^3} \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} x^3\, dF_j(x)$$

then (5), (6) and (7) are valid if we put $\bar{F}_N(x) - G(x) - H_N(x)$ instead of $\bar{F}_N(x) - G(x)$.

The method of investigation is that of characteristic functions, but to obtain more precision, the study of the product of a large number of characteristic functions is carried through by means of certain ideas introduced by I. M. Vinogradow in the additive theory of numbers — namely, the particular classification of values of independent variables (intervals of I and II class) and the «smoothing» of trigonometrical sums.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 139–180 Série mathématique

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНАМИ В СРЕДНЕМ ФУНКЦИИ $|a-x|^s$

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе изучается асимптотическое поведение наилучшего приближения функции $|a-x|^s$ многочленами в среднем на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

§ 1. Введение

Благодаря исследованиям С. Н. Бернштейна (см. список литературы), в настоящее время хорошо известны асимптотические свойства наилучшего приближения многочленами функции $|a-x|^s$, являющейся простейшей функцией, имеющей алгебраическую особенность.

Эта работа посвящена подобным исследованиям наилучшего приближения функции $|a-x|^s$ многочленами в среднем.

Под наилучшим приближением многочленами степени n интегрируемой функции $f(x)$ в среднем на сегменте $[c, d]$ мы подразумеваем минимум

$$E_n(f; c, d)_L = \min_{P_n} \int_c^d |f(x) - P_n(x)|\, dx, \tag{1.1}$$

распространенный на всевозможные многочлены

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

степени n.

Нетрудно видеть, сделав соответствующую подстановку, что, как и в случае обычных равномерных приближений, для любых вещественных a, c и d всегда можно найти такие вещественные числа μ и α, что

$$E_n(|a-x|^s;\ c, d)_L = \mu E_n(|\alpha - x|^s;\ -1;\ +1)_L$$

и, таким образом, свойства $E_n(|a-x|^s; c, d)_L$ будут известны, если известны свойства

$$E_n(|a-x|^s;\ -1,\ +1)_L = E_n(|a-x|^s)_L \tag{1.2}$$

при любых a и s.

Мы даем асимптотические выражения $E_n(|a-x|^s)_L$ при любом вещественном a и любом вещественном s, для которых $E_n(|a-x|^s)_L$

имеет смысл, иначе говоря, для которых функция $|a-x|^s$ интегрируема на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Я хочу остановиться на тех соображениях, которые побудили меня выполнить эту работу.

Можно показать, что известная теорема Бернштейна, выражающая на языке наилучших приближений $E_n(f)$ необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $f(x)$, вещественная на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, была регулярной в некотором эллипсе, имеющем фокусами точки -1, $+1$, сохраняется без изменения, если в ее формулировке обычное наилучшее приближение $E_n(f)$ заменить на наилучшее приближение $E_n(f)_L$ в среднем.

Отсюда следует, подобно тому, как это имеет место в случае равномерных приближений, что все функции f, отличающиеся от $(a-x)^s$ $(a>1)$ на функцию, регулярную внутри эллипса, проходящего через точку $z=a$ с фокусами -1 и $+1$, и на нем имеют наилучшее приближение $E_n(f)_L$ на отрезке $(-1, +1)$, асимптотически равное $E_n(|a-x|^s)_L$.

В случае $|a|<1$ $(s>-1)$ функции $|a-x|^s$ оказываются характерными представителями некоторых классов неаналитических функций. Например, если s — целое нечетное и $f(x)$ имеет разрывную производную порядка s ограниченной вариации на $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то асимптотическое выражение $E_n(f)_L$ существенно выражается через константу

$$M_s = \lim_{n\to\infty} n^{s+1} E_n(|x|^s)_L$$

[см. ([3a])], эффективно выражаемую в виде некоторого двойного интеграла.

Случай $|a|<1$, $-1<s<0$ представляет специальный интерес в силу того, что он находится вне рамок той области, где можно оперировать равномерными приближениями.

Наряду с приближениями вида (1.2) я рассматриваю также наилучшие приближения на интервале в среднем с весом $r(x)$

$$E_{n,\,r(x)}(f)_L = \min_{P_n} \int_{-1}^{+1} \left| |a-x|^s - P_n(x) \right| r(x)\,dx, \tag{1.3}$$

где функция $r(x)$ удовлетворяет некоторым условиям.

Случай $a \geqslant 1$, которому посвящены §§ 6—10, самый простой. Функция $(a-x)^s$ в этом случае является абсолютно монотонной на интервале $-1<x<1$, т. е. имеет всюду сохраняющую на этом интервале знак производную любого порядка. Поэтому многочлен $P_n^*(x)$, осуществляющий наилучшее приближение (1.3), на основании теоремы Бернштейна (см. § 2), в то же самое время интерполирует функцию $(a-x)^s$ в нулях многочлена $R_{n+1}(x)$ степени $n+1$, наименее уклоняющегося от нуля в смысле

$$\min_{P_n} \int_{-1}^{+1} |x^{n+1} + P_n(x)|\, r(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} |R_{n+1}(x)|\, r(x)\,dx.$$

Вследствие этого, применяя теорию вычетов, можно написать

$$(a-x)^s - P_n^*(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(a-z)^s\,dz}{(z-x)\,R_{n+1}(z)},$$

где C — замкнутый контур, содержащий внутри все нули $R_{n+1}(x)$ и вне — точку a, и вопрос сводится к асимптотической оценке полученного интеграла.

В §§ 6—10 даются асимптотические выражения $E_n((a-x)^s)_L$ при произвольном s (за исключением, естественно, целого положительного) и $a>1$ в случаях $r(x)\equiv 1$ и $r(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Случай $|a|<1$, которому посвящены §§ 3—5, более трудный. В этом случае функция $|a-x|^s$ не является абсолютно монотонной, и теорема Бернштейна к ней не применима. Однако эта теорема оказывается справедливой здесь, так сказать, асимптотически.

Рассматривая сначала случай веса $r(x)\equiv 1$, которому соответствует многочлен

$$R_{n+1}(x) = \frac{\sin(n+2)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

я доказываю, что если точка a определяется равенством

$$a = a_l = \cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+2},$$

то многочлен $P_n^*(x)$, интерполирующий функцию $|a-x|^s$ $(s>-1)$ в нулях $R_{n+1}(x)$, является асимптотически наилучшим в среднем для этой функции. Благодаря этому удается получить асимптотическое выражение $E_n(|a-x|^s)_L$ в случае $a=a_l$, а затем мы освобождаемся от этого ограничения.

В случае $|a|<1$ (§ 5) между наилучшими приближениями в среднем функции $|a-x|^s$ для различных a и различных весов $r(x)$ устанавливается весьма простая связь, именно доказывается асимптотическое равенство

$$E_{n,\,r(x)}(|a-x|^s)_L \approx r(a)\,(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}\,E_n(|x|^s)_L \quad (n\to\infty)$$

в предположении, что $r(x)>\lambda>0$, $r(x)$ непрерывна при $x=a$ и функция $|r(x)|^q$ $\left(q>\frac{3}{2}\right)$ интегрируема на $(-1,\ +1)$.

При переходе от веса $r(x)\equiv 1$ к произвольному весу $r(x)$ существенную роль играют две теоремы, аналогичные соответствующим предложениям С. Н. Бернштейна [см. ([1c]), следствие 1 и теорема II].

Первая из них утверждает, что существует последовательность многочленов $P_n(x)$ таких, что для всякого $\delta>0$

$$E_n(|a-x|^s)_L \approx \int\limits_{-1}^{+1} \big||a-x|^s - P_n(x)\big|\,dx \approx \int\limits_{|a-x|<\delta} \big||a-x|^s - P_n(x)\big|\,dx \quad (n\to\infty),$$

в то время как

$$\left(\int\limits_{|a-x|>\delta} ||a-x|^s - P_n(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = o(E_n(|a-x|^s)_L) \qquad (n\to\infty),$$

$$(1\leqslant p<3)$$

а вторая, — что для любого $\varepsilon>0$ и любого многочлена $P_n(x)$, для которого $\int\limits_{-1}^{1}|P_n(x)|\,dx\leqslant M$, где M — заданная константа, при достаточно больших n имеет место неравенство

$$\int\limits_{-1}^{+1}||a-x|^s - P_n(x)|\,dx > (1-\varepsilon)\,E_n(|a-x|^s)_L.$$

Эти теоремы дают возможность обобщить полученные результаты на случай функций, имеющих в ряде точек особенности типа $|a-x|^s$. Именно, с помощью этих теорем доказывается, что если

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m}A_k|a_k-x|^s \qquad (s>-1,\ -1<a_k<1),$$

то

$$E_{n,\,r(x)}(f)_L \approx \sum_{k=1}^{m}|A_k|\,E_{n,\,r(x)}(|a_k-x|^s) \quad (n\to\infty).$$

Это утверждение является аналогичным соответствующей теореме С. Н. Бернштейна ([1c]) и может быть распространено на случай функции $f(x)$, имеющей счетное число особенностей [см. ([3a])].

§ 2. Общие теоремы

В этом параграфе приводится несколько общих теорем и следствий из них, на которых базируются дальнейшие рассмотрения. Первые две из них являются известными и исходят от Коркина, Золотарева и С. Н. Бернштейна.

Пусть $r(x)$ — положительная непрерывная и интегрируемая в интервале $-1<x<1$ функция (вес).

ТЕОРЕМА А [см. ([1e]), введение]. *Существует единственный многочлен $R_n(x)$ степени n, обращающий в минимум интеграл*

$$\min_{a_k}\int\limits_{-1}^{+1}|x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|\,r(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{+1}|R_n(x)|\,r(x)\,dx \qquad (2.1)$$

при варьировании коэффициентами a_k. При этом нули $R_n(x)$ все различны и находятся в интервале $-1<x<1$.

Например, при $r(x)\equiv 1$

$$R_n(x)=\frac{1}{2^n}\,\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

и при $r(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$R_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}}\cos n \arccos x.$$

Пусть $H^{(n)}$ есть класс функций f, непрерывных на сегменте $-1<x<1$ и удовлетворяющих условию:

Если многочлен $P_{n-1}(x)$ совпадает с $f(x)$ в n различных точках интервала $-1<x<1$, то разность $f(x)-P_{n-1}(x)$ меняет знак в этих точках и только в них.

Например, класс функций, имеющих производную порядка n, не равную нулю и сохраняющую знак на интервале $-1<x<1$, есть класс $H^{(n)}$.

ТЕОРЕМА В (Бернштейна). *Если функция $f\in H^{(n)}$, то наилучший в среднем на интервале $(-1, +1)$ с весом $r(x)$ многочлен $P^*_{n-1}(x)$ степени $n-1$ — единственный и одновременно является совпадающим с $f(x)$ в нулях многочлена $R_n(x)$, удовлетворяющего условиям теоремы* 1 [см. (1e), введение].

ТЕОРЕМА С. *Пусть вес $r(x)$ есть четная функция и $s>-1$. Наилучший в среднем с весом $r(x)$ на интервале $-1<x<1$ многочлен степени ниже n для функции $|x|^s$ $(s>-1)$ определяется:*

при n четном как многочлен степени $n-2$, совпадающий с $|x|^s$ в нулях определенного в теореме А *многочлена $R_n(x)$;*

при n нечетном как многочлен степени $n-1$, совпадающий с $|x|$ в нулях $R_{n+1}(x)$.

Доказательство. При $s<n$ четном (целом) теорема очевидна. В дальнейшем этот случай исключим из рассмотрения.

Пусть n — четное; тогда нули $R_n(x)$ очевидно расположены симметрично относительно $x=0$. Построим многочлен степени $n-1$, совпадающий с $|x|^s$ в этих нулях. Вследствие упомянутой симметрии и четности функций $|x|^s$ и $r(x)$ фактически это будет многочлен $P^*_{n-2}(x)$ степени $n-2$ и притом четный.

Как известно, система функций

$$1, x^2, x^4, \ldots, x^{n-2}, x^s$$

удовлетворяет правилу Декарта, в силу которого разность

$$x^s-P^*_{n-2}(x)=x^s-a_0-a_1x^2-\ldots-a_{\frac{n-2}{2}}x^{n-2}$$

не может иметь на положительной оси x больше чем $\frac{n}{2}$ нулей с учетом их кратности. А так как эта разность обращается в нуль в точках, где $R_n(x)=0$, то она в этих точках меняет знак и только в них.

Таким образом,

$$\operatorname{sign}\{|x|^s-P^*_{n-2}(x)\}=\pm\operatorname{sign}R_n(x)=q(x), \tag{2.2}$$

и так как имеет место равенство

$$\int_{-1}^{+1} q(x)P_{n-2}(x)r(x)\,dx=0 \tag{2.3}$$

для всех многочленов $P_{n-2}(x)$ степени $n-2$ [см. (b) стр. 213, следствие 1], то $P^*_{n-2}(x)$ есть наилучший многочлен.

При n нечетном утверждение теоремы вытекает из того, что вследствие четности $|x|^s$ и $r(x)$ наилучшие многочлены для $|x|^s$ степеней $n-1$ и n тождественно совпадают.

Дадим точные выражения для наилучших приближений $|x|^s$ в среднем в предположении, что s — целое нечетное число при $r(x) \equiv 1$ и $r(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Случай $r(x) \equiv 1$. Вследствие теоремы С очевидно, что при нечетном n [см. (2.2) и (2.3)]

$$E_{n-3}(|x|^s)_L = E_{n-2}(|x|^s)_L = \left|\int_{-1}^{+1} |x|^s \operatorname{sing} \sin n \arccos x \, dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^{\pi} |\cos\theta|^s \sin\theta \operatorname{sign} \sin n\theta \, d\theta\right| = 2\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^s \sin\theta \operatorname{sign} \sin n\theta \, d\theta\right| =$$

$$= \frac{1}{2^{s-2}}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{s-1}{2}} C_s^{\frac{s-1}{2}-l} \cos(2l+1)\theta \sin\theta \operatorname{sign} \sin n\theta \, d\theta\right| =$$

$$= \frac{1}{2^{s-1}}\left|\sum_{l=0}^{\frac{s-1}{2}} C_s^{\frac{s-1}{2}-l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2l+2)\theta - \sin 2l\theta) \operatorname{sign} \sin n\theta \, d\theta\right|$$

и так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2r\theta \operatorname{sign} \sin n\theta \, d\theta = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+r}}{2r}\left(\frac{1}{\cos\frac{r\pi}{2}} - 1\right) (r > 0),$$

то

$$E_{n-3}(|x|^s)_L = E_{n-2}(|x|^s)_L =$$

$$= \frac{1}{2^s}\left|\sum_{l=0}^{\frac{s-1}{2}} (-1)^l C_s^{\frac{s-1}{2}-l} \left\{\frac{1}{l+1}\left(\frac{1}{\cos\frac{(l+1)\pi}{n}} - 1\right) + \frac{1}{l}\left(\frac{1}{\cos\frac{l\pi}{n}} - 1\right)\right\}\right|, \qquad (2.4)$$

где при $l = 0$ второй член в фигурных скобках надо считать равным нулю.

Случай $r(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Вследствие теоремы С и равенств (2.2) и (2.3), при n четном

$$E_{n-2,(1-x^2)^{-1/2}}(|x|^s)_L = E_{n-1,(1-x^2)^{-1/2}}(|x|^s)_L = \left|\int_{-1}^{+1} \frac{|x|^s \operatorname{sign} \cos n \arccos x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}\right| =$$

$$= 2\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^s \operatorname{sign} \cos n\theta \, d\theta\right| = \frac{1}{2^{s-2}}\left|\sum_{l=0}^{\frac{s-1}{2}} C_s^{\frac{s-1}{2}-l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2l+1)\theta \operatorname{sign} \cos n\theta \, d\theta\right| =$$

$$= \frac{1}{2^{s-2}} \left| \sum_{l=0}^{\frac{s-1}{2}} (-1)^l C_s^{\frac{s-1}{2}-l} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{1}{\cos\frac{(2l+1)\pi}{2n}} - 1 \right] \right|, \tag{2.5}$$

Примечание. Функция $|a-x|^s$ при $a > 1$ очевидно имеет производную любого порядка, сохраняющую знак на интервале $-1 < x < 1$. Поэтому эта функция принадлежит к классу $H^{(n)}$, каково бы ни было n, и к ней применима теорема В.

§ 3. Асимптотическое выражение $E_n(|a-x|^s)_L$ в случае $|a| < 1$

ТЕОРЕМА 1. *Если* $|a| < 1$ *и* $s > -1$ *(исключая s четное), то имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n(|a-x|^s)_L = \frac{M_s(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+1}}\right) =$$

$$= (1-a^2)^{\frac{s+1}{2}} E_n(|x|^s)_L + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right), \tag{3.1}$$

$$M_s = \frac{8\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{\pi} \int_0^\infty |\cos v| \int_0^\infty \frac{u^{s-1}\,du}{(v^2+u^2)(e^u+e^{-u})}\,dv,$$

справедливое равномерно относительно a *из сегмента* $|a| \leq \eta$, *где* η — *произвольное число, удовлетворяющее неравенству* $0 < \eta < 1$.

При $s = 1, 3, 5, \ldots$ *нечетном целом*

$$M_s = \frac{8s!}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{s+2}}. \tag{3.2}$$

Теорема 1 является следствием следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть* $P_{n-2}(x)$ — *многочлен степени* $n-2$, *совпадающий с функцией* $|a-x|^s$ *в нулях* $x_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ *многочлена*

$$R_{n-1}(x) = \frac{\sin n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.3}$$

степени $n-1$ *и пусть* $a = \cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ $(1 \leq l < n-1)$, *где* l — *целое число. Тогда имеет место асимптотическое равенство*

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L = \int_{-1}^{+1} \left| |a-x|^s - P_{n-2}(x) \right| dx + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right) =$$

$$= \frac{M_s(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right) \tag{3.4}$$

равномерно относительно a, *удовлетворяющих неравенству* $|a| \leq \eta < 1$.

При $a = \cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+2}$ (l — целое) теорема 1 содержится в лемме.

Покажем, что из леммы 1 следует теорема 1 также и при произвольном a. В самом деле, пусть

$$\cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+2}=a'<a<a''=\cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+2}. \tag{3.5}$$

Очевидно,

$$a''-a'=O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.6}$$

Подберем число $k>1$ так, чтобы точка a делила отрезок $(-1, k)$ в том же отношении, в каком точка a' делит отрезок $(-1, 1)$:

$$(1+a):(k-a)=(1+a'):(1-a');$$

тогда

$$1+k=\frac{2(1+a)}{1+a'}. \tag{3.7}$$

Пусть, далее,

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1+k}{2}=\frac{1+a}{1+a'}<\frac{1}{1-\frac{\pi}{n}}<1+\frac{\alpha}{} \quad (\alpha>0) \tag{3.8}$$

— отношение длин этих отрезков. Точка μa делит отрезок $(-\mu, \mu k)$ (длины 2) в отношении $(1+a'):(1-a')$ и, таким образом, три точки $-\mu$, μa, μk с помощью сдвига переходят соответственно в точки -1, a', 1.

Отсюда, обозначая через $E_n(f;\, a,\, b)_L$ наилучшее приближение в среднем функции f на сегменте $[a, b]$, получим такую цепь соотношений:

$$E_n(|a-x|^s)_L=E_n(|a-x|^s;-1,+1)_L\leqslant E_n(|a-x|^s;-1,k)_L=$$
$$=\frac{1}{\mu^s}E_n(|\mu a-\mu x|^s;-1,k)_L=\frac{1}{\mu^{s+1}}E_n(|\mu a-y|^s;-\mu,\mu k)_L=$$
$$=\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]E_n(|a'-y|^s;-1,1)_L=\frac{M_s(1-a'^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+1}}+O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right). \tag{3.9}$$

Рассуждая аналогично, будем иметь

$$E_n(|a-x|^s)_L\geqslant\frac{M_s(1-a''^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+1}}+O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right) \tag{3.10}$$

и, следовательно, принимая во внимание, что $a'-a''=O\left(\frac{1}{n}\right)$, получим равенство (3.1) для произвольного a.

Примечание 1. Проследив полученную цепь соотношений (3.9) в обратном порядке, легко установить, что если для многочлена $P_n(x)$ имеет место

$$\int_{-1}^{+1}\left||a'-x|^s-P_n(x)\right|dx=\frac{M_s(1-a'^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+1}}+O\left(\frac{\ln n}{n^{s+1}}\right),$$

то для многочлена

$$P_n^*(x)=\frac{1}{\mu_s}P_n(\mu(x-a)+a') \qquad \left(a-a'=O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{3.11}$$

справедливо аналогичное равенство

$$\int_{-1}^{+1} \big| |a-x|^s - P_n^*(x) \big| \, dx = \frac{M_s (1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right).$$

Примечание 2. То обстоятельство, что равенство

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L = \int_{-1}^{+1} \big| |a-x|^s - P_{n-2}(x) \big| \, dx + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right)$$

доказывается нами при специальном значении $a = \cos\left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$, является существенным. Можно было бы показать, что при произвольном a оно перестает быть верным.

Примечание 3. Справедливо следующее равенство:

$$M_s = \frac{8}{\pi}\Gamma(s+1) + O(\Gamma(s)) \quad (s > 1). \tag{3.12}$$

Доказательство. Из очевидного неравенства

$$\left|\frac{1}{e^u} - \frac{1}{e^u + e^{-u}}\right| = \frac{e^{-u}}{e^u (e^u + e^{-u})} \leqslant e^{-3u} \quad (u \geqslant 0),$$

а также неравенства

$$\int_0^\infty |\cos v| \int_0^\infty \frac{u^{s+1} e^{-3u}}{u^2 + v^2} \, du \, dv \leqslant \int_0^1 \int_0^\infty \frac{u^{s+1} e^{-3u}}{u^2+v^2} \, du \, dv +$$

$$+ \int_1^\infty \int_0^\infty \frac{u^{s+1} e^{-3u}}{u^2+v^2} \, du \, dv \leqslant \int_0^\infty u^{s-1} e^{-3u} du + \int_1^\infty \frac{dv}{v^2} \int_0^\infty u^{s+1} e^{-3u} du =$$

$$= \frac{\Gamma(s)}{3^s} + \frac{\Gamma(s+2)}{3^{s+2}} = O(\Gamma(s))$$

получим

$$M_s = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty |\cos v| \int_0^\infty \frac{u^{s+1} du}{(u^2+v^2)(e^u + e^{-u})} \, dv =$$

$$= \frac{8}{\pi} \int_0^\infty |\cos v| \int_0^\infty \frac{u^{s+1} e^{-u} du}{u^2 + v^2} \, dv + O(\Gamma(s)) =$$

$$= \frac{8}{\pi} \int_0^\pi |\cos t| \int_0^\infty u^{s+1} e^{-u} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{u^2 + (k\pi + t)^2} \, du \, dt + O(\Gamma(s)). \tag{3.13}$$

Покажем теперь справедливость равенства

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{u^2 + (k\pi + t)^2} = \frac{1}{2u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \quad (u > 0), \tag{3.14}$$

имеющего место равномерно относительно t из сегмента $0 \leqslant t \leqslant \pi$. В самом деле, функция $f(x) = [u^2 + (x+t)^2]^{-1}$ при любом $u > 0$ и t из сегмента $[0, \pi]$ монотонно убывает; отсюда, принимая во внимание, что для $x > 0$

$$f(x) \leqslant f(0) = \frac{1}{u^2 + t^2} \leqslant \frac{1}{u^2},$$

получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{u^2+(k\pi+t)^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dx}{u^2+(x+t)^2}+O\left(\frac{1}{u^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2u}-\frac{1}{\pi u}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{u}+O\left(\frac{1}{u^2}\right)=\frac{1}{2u}+O\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

равномерно относительно t, так как

$$\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{u}\right|\leqslant\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{u}<\frac{c}{u},$$

где c — константа.

Таким образом, в силу неравенства

$$\left|\int_0^{\infty}u^{s+1}e^{-u}O\left(\frac{1}{u^2}\right)du\right|<c\int_0^{\infty}u^{s-1}e^{-u}du=c\Gamma(s),$$

из (3.13) и (3.14) следует

$$M_s=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos t|\,dt\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\infty}u^se^{-u}du+O(\Gamma(s))=\frac{8}{\pi}\Gamma(s+1)+O(\Gamma(s))$$

и равенство (3.12) доказано.

Равенство (3.2) можно получить как следствие из (2.4) и (3.1). Заметим для этого, что в разложении

$$E_n(|x|^s)_L=a_0+a_1\frac{1}{n}+a_2\frac{1}{n^2}+\ldots$$

по степеням $\frac{1}{n}$, вследствие (3.1)

$$a_0=a_1=\ldots=a_s$$

и, таким образом,

$$E_n(|x|^s)_L\approx\frac{a_{s+1}}{n^{s+1}}=\frac{M_s}{n^{s+1}}\quad(n\to\infty).$$

Но, с другой стороны, это разложение можно фактически осуществить, воспользовавшись формулой (2.4) и приняв во внимание, что

$$\frac{1}{\cos z}=2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{2k+1}}\right)z^{2k}.$$

В результате получим (s — нечетное целое)

$$\frac{M_s}{n^{s+1}}=\frac{a_{s+1}}{n^{s+1}}=\frac{1}{n^{s+1}}\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{s+2}}\sum_{l=0}^{\frac{s-1}{2}}(-1)^lC_s^{\frac{s-1}{2}-l}[(l+1)^s+l^s]$$

и так как

$$\sum_{l=0}^{\frac{s-1}{2}}(-1)^lC_s^{\frac{s-1}{2}}[l+1)^s+l^s]=s!=\Gamma(s+1),$$

то

$$M_s=\Gamma(s+1)\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{s+2}}\quad(s=1,3,5,\ldots).$$

§ 4. Доказательство леммы 1

Рассмотрим функцию комплексного переменного z

$$f(z) = \mu\,(z-a)^s, \tag{4.1}$$

где

$$\mu = 1 + \frac{i\,(1-\cos \pi s)}{\sin \pi s} \quad \text{при} \quad s \quad \text{нецелом} \tag{4.2}$$

и

$$\mu = \mu(z) = 1 - \frac{2i}{\pi} \ln (z-a) \text{ при } s \text{ нечетном целом.} \tag{4.3}$$

Если функцию $f(z)$ рассматривать в связной области плоскости z, не содержащей $z=a$, в предположении, что $(z-a)^s$ вещественно для вещественных $z>a$ и что $\ln 1 = 0$, то легко убедиться в справедливости равенства

$$\operatorname{Re} f(x) = |a-x|^s \quad (s \text{ — не есть четное число}), \tag{4.4}$$

где x вещественно, а $\operatorname{Re} f$ обозначает вещественную часть f.

Пользуясь этим*, проинтерполируем функцию $f(z)$ при помощи (комплексного) многочлена $P^*_{n-2}(z)$ степени $n-2$ и тогда его вещественная часть $P_{n-2}(z)$ (при z вещественном) автоматически будет интерполировать в тех же узлах интерполяции функцию $|a-x|^s$.

Будем предполагать, что

$$a = \cos\left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} = \cos \alpha \quad (0 \leqslant a \leqslant \eta < 1), \tag{4.5}$$

где l — некоторое целое число, удовлетворяющее неравенству $1 \leqslant l \leqslant n-1$.

Построим в плоскости $z = x+iy$ гиперболу

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin\alpha}\right)^2 = 1$$

и обозначим через Γ ее часть (полуветвь), выходящую из точки $z=a$ и идущую для $x>0$, $y>0$ в бесконечность. Точки $z \in \Gamma$ определяются равенствами

$$z = x+iy = \cos(\alpha - i\beta) = a \operatorname{ch}\beta + i\sqrt{1-a^2}\operatorname{sh}\beta \quad (0 \leqslant \beta < \infty). \tag{4.6}$$

Пусть G есть область плоскости z, ограниченная контуром C, состоящим из:

1) двух бесконечно близких к Γ и идущих с обеих сторон от Γ кривых Γ_1 и Γ_2;

---

* Этот прием я почерпнул из работы И. И. Ибрагимова [2], в которой изучается равномерное наилучшее приближение $x\,|x|^s$.

2) окружности h бесконечно малого радиуса с центром в точке a;

3) окружности H бесконечно большого радиуса с центром в точке $z=0$.

Тогда, если $P^*_{n-2}(z)$ есть многочлен степени $n-2$, совпадающий с $f(z)$ в нулях $R_{n-1}(z)$, то, вследствие регулярности $f(z)$ в G, получим, пользуясь теорией вычетов,

$$\varphi_*(x)=f(x)-P^*_{n-2}(x)=\frac{R_{n-1}(x)}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(z)\,dz}{(z-x)\,R_{n-1}(z)}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1). \tag{4.7}$$

Так как асимптота кривой Г расположена под углом α к положительной оси x, то, в силу сделанных предположений, при вычислении $f(z)$ надо считать, что аргумент ω числа $z-a$, где z—точка нижнего края Г, изменяется в пределах $\alpha<\omega<\frac{\pi}{2}$. Поэтому при s нецелом

$$f(z)=\begin{cases}\mu\,|z-a|^s e^{i\omega s} & \text{нижний край Г},\\ \mu\,|z-a|^s e^{i(\omega-2\pi)s} & \text{верхний край Г},\end{cases} \tag{4.8}$$

и при s целом (нечетном)

$$f(z)=\begin{cases}\left[1-\frac{2i}{\pi}(\ln|z-a|+i\omega)\right]|z-a|^s e^{i\omega s} & \text{нижний край Г},\\ \left[1-\frac{2i}{\pi}(\ln|z-a|+i(\omega-2\pi)\right]|z-a|^s e^{i\omega s} & \text{верхний край Г}.\end{cases} \tag{4.9}$$

Заметим еще, что имеет место равенство (s нецелое)

$$\mu\,(e^{-2\pi i s}-1)\,e^{i\frac{\pi}{2}s}=-4i\sin\frac{\pi s}{2}.$$

Таким образом, если принять во внимание, что интеграл (4.7), взятый по окружностям h и H, в пределе обращается в нуль, то при любом рассматриваемом s

$$\varphi_*(x)=-\frac{2R_{n-1}(x)}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_\Gamma\frac{|z-a|^s e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s}}{(z-x)\,R_{n-1}(z)}\,dz, \tag{4.10}$$

где z пробегает кривую Г от a до ∞.

Положим еще

$$\varphi_*(x)=-\frac{R_{n-1}(x)\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi}I^*_n\quad(I^*_n=I^*_n(x)). \tag{4.11}$$

Так как

$$\begin{aligned}z-a&=a(\operatorname{ch}\beta-1)+i\sqrt{1-a^2}\operatorname{sh}\beta,\\ z-x&=a\operatorname{ch}\beta-x+i\sqrt{1-a^2}\operatorname{sh}\beta,\\ dz&=i\sin(\alpha-i\beta)\,d\beta,\\ \sin(\alpha-i\beta)&=\sin\alpha\operatorname{ch}\beta-i\cos\alpha\operatorname{sh}\beta,\\ \sin^2(\alpha-i\beta)&=\sin^2\alpha\operatorname{ch}^2\beta-\cos^2\alpha\operatorname{sh}^2\beta-2i\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta,\end{aligned}$$

$$R_{n-1}(z)=\frac{\sin n(\alpha-i\beta)}{\sin(\alpha-i\beta)}=\frac{\sin\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi-ni\beta\right]}{\sin(\alpha-i\beta)}=(-1)^l\frac{\operatorname{ch}n\beta}{\sin(\alpha-i\beta)},$$

то

$$I_*^* = (-1)^l\, 2i \int_0^\infty \frac{\{2a^2(1-\operatorname{ch}\beta)+\operatorname{sh}^2\beta\}^{\frac{s}{2}} (a\operatorname{ch}\beta - x - i\sqrt{1-a^2}\operatorname{sh}\beta)\,\Phi(\alpha,\beta)\, e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s}}{[a(\operatorname{ch}\beta - x)^2 + (1-a^2)\operatorname{sh}^2\beta]\operatorname{ch} n\beta}\, d\beta,$$

где

$$\Phi(\alpha,\beta) = \sin^2\alpha\operatorname{ch}^2\beta - \cos^2\alpha\operatorname{sh}^2\beta - i2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta.$$

После подстановки

$$\sigma = e^\beta, \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = d\beta \quad (1 \leqslant \sigma < \infty),$$

получим

$$I_*^* = \frac{i(-1)^l}{2^{s-1}} \int_1^\infty \frac{\Psi(\sigma,a)\,[a(\sigma^2+1) - 2\sigma x - \sqrt{1-a^2}(\sigma^2-1)]\, e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s}}{\{[a(\sigma^2+1)-2\sigma x]^2 + (1-a^2)(\sigma^2-1)^2\}\,\sigma^{2+s}(\sigma^n+\sigma^{-n})}\, d\sigma,$$

где

$$\Psi(\sigma, a) = \{(\sigma^2-1)^2 - 4a^2\sigma(\sigma-1)^2\}^{\frac{s}{2}}\{(1-a^2)(\sigma^2+1)^2 + a^2(\sigma^2-1)^2 - \\ - ia\sqrt{1-a^2}\,2(\sigma^4-1)\}.$$

Полагая, далее,

$$\sigma = 1 + \frac{u}{n},$$

будем иметь

$$I_*^* = \frac{i(-1)^l}{2^{s-1}n} \int_0^\infty \frac{\mu(u)\,\nu(x,u)\,\lambda(u)\, e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s}}{\zeta(x,u)\,\eta(u)\,\xi(x)}\, du, \tag{4.12}$$

где функции, стоящие под знаком интеграла, определяются нижеследующими равенствами. При этом в них (и в дальнейшем) $p(u)$ обозначает некоторую функцию, вообще говоря, комплексную и зависящую от a, x и n, определенную на положительной оси и не превышающую по модулю некоторый многочлен $q(u)$ для $0 \leqslant a \leqslant \eta < 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Многочлен $q(u)$ зависит только от u.

$$\mu(u) = \left\{\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^2 - 1\right]^2 - 4a^2\left(1+\frac{u}{n}\right)\frac{u^2}{n^2}\right\}^{\frac{s}{2}} =$$

$$= \frac{u^s}{n^s}\left[4(1-a^2) + 4(1-a^2)\frac{u}{n} + \frac{u^2}{n^2}\right]^{\frac{s}{2}} = 2^s(1-a^2)^{\frac{s}{2}}\frac{u^s}{n^s}\left(1+\frac{p(u)}{n}\right)^{\frac{s}{2}}$$

и так как $p(u)$ здесь положительно, то при любом s

$$\left(1+\frac{p(u)}{n}\right)^{\frac{s}{2}} - 1 = \frac{p(u)}{n}\frac{s}{2}\left(1+\frac{\theta p(u)}{n}\right)^{\frac{s}{2}-1} = \frac{p(u)}{n} \quad (0 < \theta < 1):$$

следовательно,

$$\mu(u)=2^s(1-a^2)^{\frac{s}{2}}\frac{u^s}{n^s}\left(1+\frac{p(u)}{n}\right),$$

$$\nu(x,u)=a\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^2+1\right]-2\left(1+\frac{u}{n}\right)x-i\sqrt{1-a^2}\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^2-1\right]=$$
$$=2(a-x)\left(1+\frac{u}{n}\right)-i\sqrt{1-a^2}\,\frac{2u}{n}+\frac{u^2}{n^2}p(u),$$

$$\lambda(u)=(1-a^2)\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^2+1\right]^2+a^2\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^2-1\right]^2-$$
$$-i2a\sqrt{1-a^2}\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^4-1\right]=4(1-a^2)+(1-a^2)\frac{8u}{n}-$$
$$-i\,\frac{8a\sqrt{1-a^2}\,u}{n}+\frac{u^2}{n^2}p(u),$$

$$\eta(u)=\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^n+\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n}\right]^{-1},$$

$$\zeta(x,u)=\left\{a\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^2+1\right]-2\left(1+\frac{u}{n}\right)x\right\}^2+$$
$$+(1-a^2)\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^2-1\right]^2=4(a-x)^2\left(1+\frac{u}{n}\right)^2+$$
$$+4(1-ax)\frac{u^2}{n^2}\left[1+\frac{u}{n}+\frac{1}{4(1-ax)}\frac{u^2}{n^2}\right],$$

что влечет

$$\frac{1}{\zeta(x,u)}=\frac{1+\frac{p(u)}{n}}{4\left\{(a-x)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}\right\}} \tag{4.13}$$

(принять во внимание, что $|1-ax|\geqslant 1-a\geqslant 1-\eta>0$);

$$\frac{1}{\xi(u)}=\frac{1}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^{2+s}}=1+\frac{p(u)}{n}, \tag{4.14}$$

$$\omega=\arg(z-a)=\operatorname{arc\,tg}\delta\quad(\operatorname{tg}\alpha<\delta<\infty),$$
$$\delta=\operatorname{tg}\alpha\,\frac{\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta-1}=\operatorname{tg}\alpha\,\frac{2n+u}{u},$$
$$\omega-\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{\delta}+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)=-\frac{u}{2n\operatorname{tg}\alpha}+O\left(\frac{u^2}{n^2}\right),$$
$$e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s}=1-\frac{usi}{2n\operatorname{tg}\alpha}+O\left(\frac{u^2}{n^2}\right) \tag{4.15}$$

равномерно относительно a из сегмента $0\leqslant a\leqslant\eta<1$.

$$i\nu(x,u)\lambda(u)=\frac{8u\sqrt{1-a^2}}{n}(a^2-2ax+1)+i\left[8(1-a^2)(a-x)+\right.$$
$$\left.+\frac{u}{n}p_1(u)\right]+\frac{up(u)}{n^2}, \tag{4.16}$$

где $p_1(u)$ — вещественная и $p(u)$ — комплексная функции, по модулю не превышающие некоторого многочлена.

$$\operatorname{Re}\left\{i\nu(x,u)\lambda(u)e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s}\right\}=\frac{4u}{n}\sqrt{1-a^2}\,\{2(a^2-2ax+1)+a(a-x)su\}+$$
$$+\frac{4u}{n}\sqrt{1-a^2}\,\{2(1-a^2)+4a(a-x)+a(a-x)su\}+\frac{up(u)}{n^2}=$$
$$=\frac{8u}{n}\left[(1-a^2)^{\frac{s}{2}}\{1+(a-x)p(u)\}+\frac{p(u)}{n}\right]$$

и так как функции ξ, μ, η, ζ вещественны, то

$$I_n(x) = \operatorname{Re} I_n^* = \Psi_1^{(n)}(x) + \Psi_2^{(n)}(x) + \Psi_3^{(n)}(x), \tag{4.17}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1^{(n)}(x) &= \frac{4(1-a^2)^{\frac{s+3}{2}}(-1)^l}{n^{s+2}} \int_0^\infty \frac{u^{s+1}du}{\left\{(a-x)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}\right\}\eta(u)}, \\ \Psi_2^{(n)}(x) &= \frac{a-x}{n^{s+2}} \int_0^\infty \frac{u^{s+1}p(u)\,du}{\left\{(a-x)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}\right\}\eta(u)}, \\ \Psi_3^{(n)}(x) &= \frac{1}{n^{s+3}} \int_0^\infty \frac{u^{s+1}p(u)\,du}{\left\{(a-x)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}\right\}\eta(u)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

При этом в формуле (4.18) $p(u)$ обозначает вещественную функцию, по абсолютной величине не превышающую на вещественной оси некоторый многочлен (не зависящий от a, n и x).

Из наших рассуждений следует, что если $P_{n-2}(x)$ есть многочлен степени $n-2$, интерполирующий функцию $|a-x|^s$ $\left(a=\cos\alpha=\cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right)$ в нулях $R_{n-1}(x)$, то

$$|a-x|^s - P_{n-2}(x) = -\frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi} R_{n-1}(x) I_n(x) \tag{4.19}$$

и, следовательно,

$$\int_{-1}^{+1} \left||a-x|^s - P_{n-2}(x)\right| dx = \frac{\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{\pi} \int_0^\pi |\sin n\theta I_n(\cos\theta)|\, d\theta =$$

$$= \frac{\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{\pi} \int_0^\pi |\cos n(\theta-\alpha) I_n(\cos\theta)|\, d\theta. \tag{4.20}$$

Для сокращения дальнейших выкладок рассмотрим интеграл

$$S_n(x) = [A + B(a-x)] \int_0^\infty \frac{u^{s+1} p_*(u)\, du}{\left\{(a-x)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}\right\}\eta(u)}, \tag{4.21}$$

где $p_*(u)$ — определенно выбранная функция, не превышающая многочлен.

Интегралы, стоящие в правых частях равенств (4.18), являются с точностью до множителя вида cn^{-q} частными случаями $S_n(x)$ соответственно: первый при $A=1$, $B=0$, $p_*(u)\equiv 1$, второй при $A=0$, $B=1$ и третий при $B=0$.

Покажем, прежде всего, что при $x=\cos\theta$

$$\frac{1}{(a-x)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}} = \frac{1+O(\theta-\alpha)}{\sin^2\alpha\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}} \tag{4.22}$$

равномерно относительно θ и α, принадлежащих к интервалам $0<\theta<\pi$ и $\frac{\pi}{2}>\alpha>\alpha_*=\arccos\eta>0$ и остальных переменных u и n.

В самом деле, для рассматриваемых α и θ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\cos\alpha-\cos\theta}{\theta-\alpha}\right|=\frac{2\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\sin\frac{\theta+\alpha}{2}}{\theta-\alpha}>\frac{2}{\pi}\sin\frac{\theta+\alpha}{2}>\frac{2}{\pi}\sin\frac{\alpha_*}{2}=k>0.$$

Поэтому в формуле

$$(a-x)^2=\sin^2\alpha\,(\theta-\alpha)^2\,[1+(\theta-\alpha)\,\psi(\theta)],$$

где $\psi(\theta)$ — некоторая ограниченная функция, выражение, стоящее в квадратных скобках, будет превышать для $0<\theta<\pi$, $\alpha_*<\alpha<\frac{\pi}{2}$ некоторую положительную константу k_1.

Отсюда, принимая во внимание, что $1-ax>0$, будем иметь

$$\left|\frac{1}{(a-x)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}}-\frac{1}{\sin^2\alpha\,(\theta-\alpha)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}}\right|<$$

$$<\frac{\sin^2\alpha\,|\theta-\alpha|^3\,\psi(\theta)\,|}{\sin^2\alpha\,(\theta-\alpha)^2\,k_1\left\{\sin^2\alpha\,(\theta-\alpha)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}\right\}}<\frac{c\,|\theta-\alpha|}{\sin^2\alpha\,(\theta-\alpha)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}}. \quad (4.23)$$

Далее, имея в виду, что

$$1-ax>\mu>0,\quad 1-ax=1-a^2+a\,(a-x)=\sin^2\alpha+(\theta-\alpha)\,\psi_1(\theta),$$

где $\psi_1(\theta)$ — ограниченная функция, получим

$$\left|\frac{1}{\sin^2\alpha\,(\theta-\alpha)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}}-\frac{1}{\sin^2\alpha\left[(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right]}\right|<$$

$$<\frac{|\theta-\alpha|\,|\,\psi_1(\theta)\,|\frac{u^2}{n^2}}{\mu\frac{u^2}{n^2}\sin^2\alpha\left[(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right]}<\frac{c\,|\theta-\alpha|}{\sin^2\alpha\left[(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right]}. \quad (4.24)$$

Теперь равенство (4.22) есть непосредственное следствие неравенств (4.23) и (4.24).

Следовательно, равенство (4.21) после подстановки $x=\cos\theta$, учитывая, что $a-x=\cos\alpha-\cos\theta=O(\theta-\alpha)$, можно записать так:

$$S_n(\cos\theta)=\frac{A+O(\theta-\alpha)}{1-a^2}\int_0^\infty\frac{u^{s+1}\,p_*(u)\,du}{\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}\eta(u)}. \quad (4.25)$$

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$h_n(\theta)=\frac{1}{n}\int_0^\infty\frac{u^\lambda e^{-u}\,du}{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}}\quad(\lambda>0,\ 0<\alpha<\pi).$$

Тогда имеют место неравенства

$$H_n=\int_0^\pi|\cos n\,(\theta-\alpha)|\,h_n(\theta)\,d\theta<K\quad(n=1,2,\ldots), \quad (4.26)$$

$$\int_0^\pi|\cos n\,(\theta-\alpha)|\,|\theta-\alpha|\,h_n(\theta)\,d\theta<\frac{K\ln n}{n}, \quad (4.27)$$

где K — константа, не зависящая от n.

Справедливость леммы, очевидно, сохраняется, если в ней u^λ заменить произвольным многочленом, не имеющим свободного члена.

Доказательство. Сделаем подстановку $n(\theta-\alpha)=v$; тогда

$$H_n=\int\limits_{-n\alpha}^{n(\pi-\alpha)}|\cos v|\int\limits_0^\infty\frac{u^\lambda e^{-u}\,du}{v^2+u^2}\,dv<2\int\limits_0^\infty|\cos v|\int\limits_0^\infty\frac{u^\lambda e^{-u}\,du}{v^2+u^2}\,dv.$$

Внутренний интеграл существует для всякого $v>0$, так как существует интеграл

$$\int\limits_0^\infty u^\lambda e^{-u}\,du=\Gamma(\lambda+1).$$

Чтобы убедиться в существовании интеграла по переменной v, представим его в виде суммы

$$\frac{1}{2}H_n=g_1^{(\lambda)}+g_2^{(\lambda)},$$

где

$$g_1^{(\lambda)}=\int\limits_0^1|\cos v|\left\{\int\limits_0^1+\int\limits_1^\infty\frac{u^\lambda e^{-u}\,du}{v^2+u^2}\right\}dv<\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{u^\lambda e^{-u}\,du}{v^2+u^2}\,dv+\Gamma(\lambda+1)=$$
$$=g_*^{(\lambda)}+\Gamma(\lambda+1),$$

$$g_2^{(\lambda)}=\int\limits_1^\infty|\cos v|\int\limits_0^\infty\frac{u^\lambda e^{-u}\,du}{v^2+u^2}\,dv<\int\limits_1^\infty\frac{dv}{v^2}\,\Gamma(\lambda+1)=\Gamma(\lambda+1);$$

$$\int\limits_0^1\frac{u^\lambda e^{-u}\,du}{v^2+u^2}<C\int\limits_0^1\frac{u^\lambda\,du}{u^2+v^2}<Cv^{\lambda-1}\int\limits_0^{\frac{1}{v}}\frac{t^\lambda\,dt}{1+t^2}<$$

$$<Cv^{\lambda-1}\left(\int\limits_0^1 t^\lambda\,dt+\int\limits_1^{\frac{1}{v}}t^{\lambda-2}\,dt\right)=C\left(\frac{v^{\lambda-1}}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda-1}(1-v^{\lambda-1})\right).$$

Отсюда

$$g_*^{(\lambda)}<C\int\limits_0^1\left\{\frac{v^{\lambda-1}}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda-1}(1-v^{\lambda-1})\right\}dv=C\left(\frac{1}{1+\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)<C_1\Gamma(\lambda+1)$$

при $\lambda>\lambda_0>0$ и существование интеграла доказано. Кстати, мы получили неравенство

$$\int\limits_0^\infty|\cos v|\int\limits_0^\infty\frac{u^\lambda e^{-u}\,du}{v^2+u^2}\,dv<C\Gamma(\lambda+1), \qquad (4.28)$$

где C не зависит от $\lambda\geqslant\lambda_0>0$.

Далее, имеем

$$\int_0^{\pi} |\cos n(\theta-\alpha)|\,|\theta-\alpha|\,h_n(\theta)\,d\theta = \frac{1}{n}\int_{-n\alpha}^{n(\pi-\alpha)} |t\cos t| \int_0^{\infty} \frac{u^{\lambda}e^{-u}\,du}{t^2+u^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left\{\int_{-1}^{+1} dt + \Gamma(\lambda+1)\left(\int_1^{n\alpha}\frac{dt}{t} + \int_1^{n(\pi-\alpha)}\frac{dt}{t}\right)\right\} <$$

$$< \frac{1}{n}\left(c_1 + c_2\ln n\alpha + c_3 \ln n(\pi-\alpha)\right) < \frac{K\ln n}{n},$$

что дает (4.27).

Продолжая доказательство теоремы, заметим, что из неравенства

$$\left|\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n} - e^{-u}\right| < \frac{cu^2}{n}e^{-u},$$

которое имеет место во всяком случае при $0 < n < \sqrt{n}$, для функции

$$\eta(u) = \left(1+\frac{u}{n}\right)^{n} + \left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n}$$

вытекает

$$\left|\frac{1}{\eta(u)} - \frac{1}{e^{u}+e^{-u}}\right| = \left|\frac{\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n} - e^{-u}}{1+\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-2n}} + e^{-u}\left(\frac{1}{1+\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-2n}} + \frac{1}{1+e^{-2u}}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{cu^2e^{-u}}{n} + e^{-u}\left|e^{-2u} - \left(1+\frac{u}{n}\right)^{-2n}\right| \leqslant \frac{e^{-u}u^2}{n}\left(c+2c_1e^{-u}\right) < \frac{c_2u^2}{n}\cdot\frac{1}{e^{u}+e^{-u}}$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{\eta(u)} = \frac{1+\frac{p(u)}{n}}{e^{u}+e^{-u}}\quad (0 < u < \sqrt{n}). \tag{4.29}$$

Из (4.25) следует при $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

$$S_n(\cos\theta) = \frac{A + O(\theta-\alpha)}{1-a^2}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{u^{s+1}p_*(u)\,du}{\left\{(\theta-\alpha)^2 + \frac{u^2}{n^2}\right\}\eta(u)} + O(2^{-n^{\lambda}}). \tag{4.30}$$

В самом деле, пусть $q_*(u)$ — многочлен степени r с положительными коэффициентами такой, что $|p_*(u)| < q_*(u)$. Тогда, если $h > r+s+2$, то

$$\left|\int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{u^{s+1}p_*(u)\,du}{\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}\eta(u)}\right| < n\int_{\sqrt{n}}^{\infty}\frac{u^{s+1}q_*(u)\,du}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^{h}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{n-h}} <$$

$$< n^2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-h}}\int_{n^{-\frac{1}{2}}}^{\infty}\frac{(vn)^{s+1}q_*(vn)\,dv}{(1+v)^{h}} <$$

$$< \frac{1}{2^{n^{\lambda}}}\int_0^{\infty}\frac{v^{s+1}q_*(v)}{(1+v)^{h}}\,dv = \frac{C}{2^{n^{\lambda}}}\quad \left(0<\lambda<\frac{1}{2}\right), \tag{4.31}$$

если n достаточно велико.

Далее, из (4.29) следует

$$S_n(\cos\theta)=\frac{A+O(\theta-\alpha)}{1-a^2}\int_0^{\sqrt{n}}\frac{u^{s+1}p_*(u)\left(1+\frac{p(u)}{n}\right)}{\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}(e^u+e^{-u})}+O(2^{-n^\lambda})=$$

$$=\frac{A+O(\theta-\alpha)}{1-a^2}\int_0^{\infty}\frac{u^{s+1}p_*(u)\left(1+\frac{p(u)}{n}\right)du}{\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}(e^u+e^{-u})}+O(2^{-n^\lambda}). \tag{4.32}$$

Применяя лемму 2, получим

$$S_n(\cos\theta)=\frac{A}{1-a^2}\int_0^{\infty}\frac{u^{s+1}p_*(u)\,du}{\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}(e^u+e^{-u})}+\varepsilon_n(\theta), \tag{4.33}$$

где $\varepsilon_n(\theta)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_0^{\pi}|\cos n(\theta-\alpha)\,\varepsilon_n(\theta)|\,d\theta<C\ln n. \tag{4.34}$$

Таким образом, из обозначений (4.18) и (4.21), в силу (4.33) и (4.34), следует, что

$$\Psi_1^{(n)}(\cos\theta)=\frac{4(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}(-1)^l}{n^{s+2}}\int_0^{\infty}\frac{u^{s+1}\,du}{\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}(e^u+e^{-u})}+\varepsilon_n(\theta), \tag{4.35}$$

$$\int_0^{\pi}|\cos n(\theta-\alpha)\,\varepsilon_n(\theta)|\,d\theta<\frac{C\ln n}{n^{s+2}},$$

$$\int_0^{\pi}|\cos n(\theta-\alpha)\,\Psi_2^{(n)}(\cos\theta)|\,d\theta<\frac{C\ln n}{n^{s+2}}, \tag{4.36}$$

$$\Psi_3^{(n)}(\cos\theta)=\frac{1}{n^{s+3}}\cdot\frac{1}{1-a^2}\int_0^{\infty}\frac{u^{s+1}p(u)\,du}{\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}(e^u+e^{-u})}+\varepsilon_n'(\theta),$$

$$\int_0^{\pi}|\cos n(\theta-\alpha)\,\varepsilon_n'(\theta)|\,d\theta<\frac{C\ln n}{n^{s+3}},$$

откуда, по лемме,

$$\int_0^{\pi}|\cos n(\theta-\alpha)\,\Psi_3^{(n)}(\cos\theta)|\,d\theta<\frac{C}{n^{s+2}}. \tag{4.37}$$

Следовательно, из (4.17) и (4.20) будем иметь

$$\int_{-1}^{+1}\big||a-x|^s-P_{n-2}(x)\big|\,dx=$$

$$=\frac{4(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+2}}\cdot\frac{\left|\sin n\frac{\pi s}{2}\right|}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos n(\theta-\alpha)|\int_0^{\infty}\frac{u^{s+1}\,du\,d\theta}{\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}(e^u+e^{-u})}+O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right)=$$

$$= \frac{4\,(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+1}} \cdot \frac{\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{\pi} \int\limits_{-n\alpha}^{n(\pi-\alpha)} |\cos v| \int\limits_0^\infty \frac{u^{s+1}\,du\,dv}{(v^2+u^2)(e^u+e^{-u})} + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right) =$$

$$= \frac{8\,(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{\pi} \cdot \frac{1}{n^{s+1}} \int\limits_0^\infty |\cos v| \int\limits_0^\infty \frac{u^{s+1}\,du\,dv}{(v^2+u^2)(e^u+e^{-u})} + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right) \quad (4.38)$$

и мы доказали второе равенство (3.4) леммы 1.

Нам осталось доказать первое равенство (3.4). Для этого заметим, что, в силу (4.17) и (4.18), можно написать

$$|x-a|^s - P_{n-2}(x) = \alpha_n(x) + \beta_n(x), \quad (4.39)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n(x) &= -\frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi} R_{n-1}(x)\,\Psi_1^{(n)}(x), \\ \beta_n(x) &= -\frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi} R_{n-1}(x)\,[\Psi_2^{(n)}(x) + \Psi_3^{(n)}(x)] \end{aligned}\right\} \quad (4.40)$$

и притом, вследствие (4.36) и (4.37)

$$\int\limits_{-1}^{+1} |\beta_n(x)|\,dx = O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right). \quad (4.41)$$

Из первого равенства (4.18) видно, что $\Psi_1^{(n)}(x)$ сохраняет знак для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и, следовательно, $\alpha_n(x)$ меняет знак только в нулях $R_{n-1}(x)$:

$$\operatorname{sign}\alpha_n(x) = \operatorname{sign}\sin n \arccos x. \quad (4.42)$$

Но

$$\int\limits_{-1}^{+1} x^k \operatorname{sign}\sin n\arccos x\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \quad (4.43)$$

откуда [см. ([3b]), стр. 213, следствие 1]

$$\int\limits_{-1}^{+1} |\alpha_n(x)|\,dx = E_{n-2}(|a-x|^s - P_{n-2}(x) - \beta_n(x))_L =$$

$$= E_{n-2}(|a-x|^s)_L + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right); \quad (4.44)$$

с другой стороны,

$$\int\limits_{-1}^{+1} |\alpha_n(x)|\,dx = \int\limits_{-1}^{+1} \Big|\,|a-x|^s - P_{n-2}(x)\Big|\,dx + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right). \quad (4.45)$$

Таким образом,

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L = \int\limits_{-1}^{+1} \Big|\,|a-x|^s - P_{n-2}(x)\Big|\,dx + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right) \quad (4.46)$$

и лемма 1 полностью доказана.

§ 5. Дальнейшие обобщения теоремы 1

В этом параграфе теорема 1 обобщается по двум направлениям. С одной стороны, она доказывается для наилучших приближений функции $|a-x|^s$ в среднем с весом $r(x)$, подчиняющимся некоторым условиям, а с другой, дается асимптотическое выражение $E_{n,r(x)}(f)_L$ дл функции f более общего вида,—имеющей особенности типа $|a-x|^s$ в конечном числе точек интервала $(-1, +1)$ *.

Теоремы 2, 3 и 4 аналогичны соответствующим теоремам С. Н. Бернштейна [см. ([1c])], причем теоремы 3 и 4 аналогичны не только по формулировке, но и по методу доказательства.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $s>-1$, $-1<a<1$. *Существует последовательность многочленов* $P_{n-2}(x)$ $(n=2, 3, \ldots)$, *обладающих следующим свойством:*

Каково бы ни было $\delta>0$, *имеет место асимптотическое равенство*

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L \approx \int\limits_{a-\delta}^{a+\delta} ||a-x|^s - P_{n-2}(x)|\,dx \quad (n\to\infty). \tag{5.1}$$

При этом, если $1\leqslant p<3$, *то*

$$\left(\int\limits_{|x-a|>\delta} \Big||x-a|^s - P_{n-2}(x)\Big|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = o\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right) = \\ = o\left(E_{n-2}(|a-x|^s)_L\right) \quad (n\to\infty). \tag{5.2}$$

Доказательство. При $a=\cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ этим свойством обладает интерполяционный многочлен $P_{n-2}(x)$, фигурирующий в лемме 1 (§ 3). Действительно, в этом случае, если $|a-x|^s>\delta$, то выражение, стоящее в фигурных скобках правых частей (4.18), ограничено снизу числом δ^2, а потому

$$|I_n(x)| < \frac{c}{n^{s+2}} \int\limits_0^\infty \frac{u^{s+1}p(u)\,du}{\eta(u)}, \quad \eta(u) = \left(1+\frac{u}{n}\right)^n + \left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n}, \tag{5.3}$$

где $p(u)$—функция, по абсолютной величине не превышающая многочлен. Но, в силу (4.29),

$$\left|\int\limits_0^{\sqrt{n}} \frac{u^{s+1}p(u)\,du}{\eta(u)}\right| < \left|\int\limits_0^{\sqrt{n}} \frac{u^{s+1}p_1(u)\,du}{e^u+e^{-u}}\right| < \int\limits_0^\infty u^{s+1}|p_1(u)|\,e^{-u}\,du < \infty \tag{5.4}$$

и, в силу (4.31),

$$\left|\int\limits_{\sqrt{n}}^\infty \frac{u^{s+1}p(u)\,du}{\eta(u)}\right| < \int\limits_{\sqrt{n}}^\infty \frac{u^{s+1}|p(u)|\,du}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} < \frac{c}{2^{n^\lambda}} \quad \left(0<\lambda<\frac{1}{2}\right), \tag{5.5}$$

следовательно,

$$|I_n(x)| < \frac{c_1}{n^{s+2}}, \tag{5.6}$$

* Обобщение на бесконечное (счетное) число точек [см. ([3a])].

откуда, если принять во внимание, что [см. (4.19)]

$$\left| |a-x|^s - P_{n-2}(x) \right| = \left| \frac{R_{n-1}(x)}{\pi} \sin\frac{\pi s}{2} I_n(x) \right|, \quad R_{n-1}(\cos\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \tag{5.7}$$

следует

$$\left(\int\limits_{|x-a|>\delta} \left| |x-a|^s - P_{n-2}(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{C}{n^{s+2}} \int\limits_{|x-a|<\delta} |R_{n-1}(x)|^p dx <$$

$$< \frac{C}{n^{s+2}} \left(\int\limits_0^{\pi} \frac{|\sin n\theta|^p}{|\sin\theta|^{p-1}} d\theta \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.8}$$

Но

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{|\sin n\theta|^p}{|\sin\theta|^{p-1}} d\theta = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin n\theta|^p}{|\sin\theta|^{p-1}} d\theta < 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin n\theta|^p}{\theta^{p-1}} d\theta =$$

$$= 2n^{p-2} \int\limits_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|^p}{u^{p-1}} du, \tag{5.9}$$

$$\int\limits_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|^p}{u^{p-1}} du < \begin{cases} \int\limits_0^{\infty} \frac{|\sin u|^p}{u^{p-1}} du < \infty \quad (2 < p < 3), \\ \int\limits_0^{1} \frac{|\sin u|^p}{u^{p-1}} du + \int\limits_1^{n\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u^{p-1}} = \begin{cases} O(\ln n), & p=2, \\ O(n^{2-p}), & 1 \leqslant p < 2, \end{cases} \end{cases} \tag{5.10}$$

что влечет (5.2), и так как $P_{n-2}(x)$ удовлетворяет условию леммы 1, то из равенства (5.2) при $p=1$ следует (5.1).

Если теперь a—произвольное фиксированное число ($|a|<1$), то подбираем ближайшую к a точку $a' = \cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ ($a'<a$) и тогда многочлен $P^*_{n-2}(x)$, определяемый равенством (3.11) (см. § 3, примечание 1), будет обладать нужным свойством.

ЛЕММА 3. *Пусть* $0<\eta<1$. *Существуют константы* C *и* ν *такие, что при*

$$0 \leqslant s \leqslant n^{\lambda}, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}, \quad |a| \leqslant \eta, \tag{5.11}$$

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L < \frac{C\Gamma(s+\nu)\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{n^{s+1}}. \tag{5.12}$$

Доказательство. Достаточно убедиться в справедливости (5.2) при $a=\cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$, где l—целое число. Отсюда будет следовать (5.12) при произвольном a. Действительно, если a—произвольное число, для которого $0 \leqslant a \leqslant \eta$, то подберем в качестве a' самое большее число вида $\cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$, не превышающее a. Рассуждая, как в § 3

[см. (3.7) — (3.9)], получим, вследствие (5.11),

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L \leqslant \frac{1}{\mu^{s+1}} E_{n-2}(|a'-x|^s)_L < \left(1+\frac{a}{n}\right)^{s+1} E_{n-2}(|a'-x|^s)_L <$$
$$< \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^\lambda+1} E_{n-2}(|a'-x|^s)_L < C_1 E_{n-2}(|a'-x|^s)_L,$$

где C_1 — константа. Далее, для $0 \leqslant |a| \leqslant \eta$

$$\left(\frac{1-a'}{1-a^2}\right)^{\frac{s+1}{2}} < \left(\frac{1-a'}{1-a}\right)^{\frac{s+1}{2}} < \left(\frac{1-a+\frac{\pi}{n}}{1-a}\right)^{\frac{s+1}{2}} \leqslant \left(1+\frac{\pi}{(1-\eta)n}\right)^{\frac{s+1}{2}} =$$
$$= \left(1+\frac{\pi}{(1-\eta)n}\right)^{\frac{n^\lambda+1}{2}} \leqslant C_2,$$

где C_2 — константа.

Из полученных двух неравенств и из того, что неравенство (5.4) верно при $a=a'$, вытекает справедливость (5.4) для любого a с $|a|<\eta$ (с другой константой C).

Итак, пусть $a=\cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$. Обратимся к формулам (4.12)—(4.15). Среди функций, находящихся под знаком интеграла в (4.12), только $\mu(u)$, $\xi(u)$ и $e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s}$ зависят от s. При этом $\mu(u)$, как видно из ее определения, удовлетворяет неравенству

$$|\mu(u)| < \frac{u^s}{n^s}\left(4+\frac{4u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^{\frac{s}{2}} = \frac{u^s}{n^s}\left(2+\frac{u}{n}\right)^s$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\mu(u)}{\xi(u)}\right| < \frac{2^s u^s}{n^s}\frac{\left(1+\frac{u}{2n}\right)^s}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^{s+2}} < \frac{2^s u^s}{n^s}.$$

Формулу (4.6) можно еще записать так:

$$i\nu(x,u)\lambda(u) = \frac{u}{n}p_1(u) + ip_2(u),$$

где $p_1(u)$ и $p_2(u)$ — вещественные функции, не превышающие (равномерно относительно x) по абсолютной величине некоторые многочлены *. В таком случае

$$H(u) = \operatorname{Re}\{i\nu(x,u)\lambda(u)e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s}\} =$$
$$= \frac{u}{n}p_1(u)\cos\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s - p_2(u)\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s, \tag{5.13}$$

и так как

$$\left|\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s\right| \leqslant \left|\omega-\frac{\pi}{2}\right|s < \frac{Cus}{n},$$

где C — константа, не зависящая от s, то

$$H(u) = \frac{u}{n}(p_1(u) + sp_2(u)).$$

---

* В наших рассуждениях p, p_1, p_2, ... не обязательно обозначают раз навсегда определенные функции.

Если принять во внимание, что функции μ, ξ, η, ζ вещественны, то из (4.12), вследствие сделанных замечаний, будет следовать неравенство

$$|I_n(x)| = |\operatorname{Re} I_n^*(x) < \frac{1}{2^{s-1}n}\int_0^\infty \left|\frac{\mu(u)}{\xi(u)}\right| \frac{\left|\operatorname{Re} i\nu(x,u)\lambda(u)e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)s}\right|}{\zeta(x,u)\xi(u)}\,du <$$

$$< \frac{C}{n^{s+2}}\int_0^\infty \frac{u^{s+1}(\bar q_1(u)+s\bar q_2(u))\,du}{\left\{(a-x)^2+(1-ax)\frac{u^2}{n^2}\right\}\eta(u)},$$

где C — константа, а $\bar q_1$ и $\bar q_2$ — многочлены с положительными коэффициентами, не зависящие от a, n и s ($|a|\leqslant\eta$, $s>0$).

Далее, полагая $x=\cos\theta$, $a=\cos\alpha$ и имея в виду, что $0\leqslant\theta$, $\alpha<\pi$, $\alpha>\arccos\eta$, получим

$$|I_n(\cos\theta)| < [\text{см. } (4.22)] < \frac{C_1}{n^{s+2}}\int_0^\infty \frac{u^{s+1}(\bar q_1(u)+s\bar q_2(u))}{\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}\eta(u)}\,du <$$

$$< (\text{см. } [4.29)] < \frac{C_1}{n^{s+2}}\left(\int_0^{\sqrt{n}} \frac{u^{s+1}(q_1(u)+sq_2(u))\,e^{-u}\,du}{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\sqrt{n}}^\infty \frac{u^{s+1}(q_1+sq_2)\,du}{\left\{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}\eta}\right),$$

где C_1 — константа, а q_1 и q_2 — некоторые многочлены с положительными коэффициентами.

Но, предполагая, что q_1 и q_2 имеют степень не выше r, получим

$$\int_{\sqrt{n}}^\infty \frac{u^{s+1}(q_1+sq_2)\,du}{\left\{(\theta-\mu)^2+\frac{u^2}{n^2}\right\}\eta(u)} < n\int_{\sqrt{n}}^\infty \frac{u^{s+1}(q_1(u)+sq_2(u)\,du}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} =$$

$$= n^{s+2}\int_{n^{-\frac{1}{2}}}^\infty \frac{v^{s+1}[q_1(nv)+sq_2(nv)]}{(1+v)^n}\,dv = n^{s+2+r}\int_{n^{-\frac{1}{2}}}^\infty \frac{v^{s+1}[q_1(v)+sq_2(v)]}{(1+v)^n}\,dv <$$

$$< n^{s+2+r}\int_{n^{-\frac{1}{2}}}^\infty \frac{q_1(v)+sq_2(v)}{(1+v)^{n-s-1}}\,dv < C_1(1+s)n^{s+2+r}\int_{n^{-\frac{1}{2}}}^\infty \frac{dv}{(1+v)^{n-s-r-1}} =$$

$$= \frac{C_1(1+s)n^{s+2+r}}{(n-s-2-r)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-s-2-r}} < \frac{C_2(1+s)2^s n^{s+2+r}}{(n-s-2-r)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} <$$

$$< C_3 2^s\frac{n^{n^\lambda}}{2^{\sqrt{n}}} = C_3 2^s\frac{2^{n^\lambda \ln n}}{2^{\sqrt{n}}} < C_4 2^s < C_5\Gamma(s). \qquad (5.14)$$

Из (5.5) и (5.6) следует

$$|I_n(\cos\theta)| < \frac{C}{n^{s+2}}\left(\int_0^{\infty} \frac{u^{s+1}[q_1(u)+sq_2(u)]\,e^{-u}\,du}{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}} + \Gamma(s)\right)$$

и на основании (4.20) и (4.28), обозначая через A наибольший коэф-

фициент многочленов q_1 и q_2, получим

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L \leqslant \frac{\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{\pi} \int_0^\pi |\cos n(\theta-\alpha) I_n(\cos\theta)|\, d\theta <$$

$$< \frac{C_1\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{n^{s+1}} \left(\int_0^\infty |\cos v| \int_0^\infty \frac{u^{s+1}(q_1(u)+sq_2(u))\, e^{-u}\, du}{v^2+u^2}\, dv + \Gamma(s) \right) <$$

$$< \frac{C_1\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{n^{s+1}} ((1+s)(r+1)AC\Gamma(s+r+2)+\Gamma(s)) < \frac{C\Gamma(s+\nu)\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{n^{s+1}},$$

где $\nu = r+2$. Этим лемма доказана.

Введем в рассмотрение величину

$$E_n(f;\, c,\, d;\, M)_L = \min_{P_n} \int_c^d |f(x) - P_n(x)|\, dx,$$

где $-1 < c < d < 1$ и минимум распространен на всевозможные многочлены P_n степени n, для которых имеет место

$$\int_{-1}^{+1} |P_n(x)|\, dx \leqslant M, \tag{5.15}$$

где M — заданная константа.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $s > -1$, $-1 < a < 1$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. *Справедливо неравенство*

$$E_n(|a-x|^s;\, a-\delta,\, a+\delta;\, M)_L > (1-\varepsilon)\, E_n(|a-x|^s)_L \tag{5.16}$$

при $n > n_0$, *где* n_0 *достаточно велико.*

Доказательство. Пусть

$$q(x) = \left\{1 - \left(\frac{x-a}{1+|a|}\right)^2\right\}^l, \tag{5.17}$$

$$m = n+2l, \quad l = \left[\frac{n^\rho}{2}\right], \qquad 0 < \rho < \frac{1}{2}.$$

Вследствие неравенства (5.12) и вытекающего из теоремы 1 [см. (3.4)] неравенства

$$E_n(|a-x|^s)_L > \frac{C}{n^{s+1}} \quad (C > 0), \tag{5.18}$$

для $i = 1, 2, \ldots, l$ справедливо

$$E_n(|a-x|^{s+2i})_L < \frac{\lambda_s(s+\nu)(s+\nu+1)\cdots(s+\nu+2i-1)}{n^{2i}}\, E_n(|a-x|^s)_L \tag{5.19}$$

при любом n, где λ_s — константа, зависящая от s.

Отсюда наилучшее приближение $|a-x|^s$ в среднем с весом $q(x)$ [см. (1.3)] удовлетворяет неравенствам

$$E_{n,q(x)}(|a-x|)^s{}_L \geqslant E_m(q(x)|a-x|^s)_L \geqslant$$

$$\geqslant E_m(|a-x|^s)_L \left\{1 - \lambda_s \sum_{i=1}^{l} C_l^i \frac{(s+\nu)\ldots(s+\nu+2i-1)}{(1+|a|)^{2i} m^{2i}}\right\} >$$

$$> E_m(|a-x|^s)_L \left\{1-\lambda_s\left[1+\left(\frac{s+\nu-1+2l}{(1+|a|)\,m}\right)^2\right]^l+\lambda_s\right\} >$$
$$> (1-\varepsilon'_m)\, E_m(|a-x|^s)_L > (1-\varepsilon_n)\, E_n(|a-x|^s)_L, \qquad (5.20)$$

где ε'_m и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. (Последнее неравенство в этой цепи следует из существования $\lim\limits_{n\to\infty} n^{s+1}E_n(|a-x|^s)_L$ и из того, что $n \approx m$.)

Далее, для многочленов $P_n(x)$, удовлетворяющих неравенству (5.15), имеет место

$$\int_{-1}^{c} + \int_{d}^{1} q(x)\,\big|\,|x-a|^s - P_n(x)\big|\,dx < C\left[1-\left(\frac{\delta}{1+|a|}\right)^2\right]^l = o\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right). \qquad (5.21)$$

Если теперь $P^*_n(x)$ есть многочлен, удовлетворяющий (5.15), наилучший в среднем для $|x-a|^s$ в интервале $|x-a|<\delta$, то, имея в виду, что $q(x) \leqslant 1$, получим

$$E_n(|a-x|^s;\, c,\, d;\, M)_L = \int\limits_{|x-a|<\delta} \big|\,|a-x|^s - P^*_n(x)\big|\,dx >$$
$$> \int\limits_{|x-a|<\delta} \big|\,|x-a|^s - P^*_n(x)\big|\,q(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \big|\,|a-x|^s - P^*_n(x)\big|\,q(x)\,dx +$$
$$+ o\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right) > E_{n,q(x)}(|a-x|^s)_L + o\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right) > (1-\varepsilon_n)\,E_n(|a-x|^s)_L \qquad (5.22)$$
$$(\varepsilon_n \to 0 \text{ при } n \to \infty)$$

и теорема доказана.

Введем теперь в рассмотрение вес $r(x)$. При этом пусть функция $r(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $r(x) > \lambda > 0$ для $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

2) существует такое число $q > \frac{3}{2}$, что

$$\left(\int_{-1}^{+1} |r(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = N < \infty;$$

3) функция $r(x)$ непрерывна в точке $x=a$.

Определим наилучшее приближение функции $f(x)$ в среднем с весом $r(x)$ как минимум

$$E_{n,r(x)}(f)_L = \min_{P_n} \int_{-1}^{1} |f(x) - P_n(x)|\,r(x)\,dx, \qquad (5.23)$$

распространенный на всевозможные многочлены P_n степени n. При $r(x) \equiv 1$ мы сохраним прежнее обозначение

$$E_{n,1}(f)_L = E_n(f)_L.$$

Введем в рассмотрение величину

$$E_{n,r(x)}(f;\, c,\, d;\, M)_L = \min_{P_n} \int_{c}^{d} |f(x) - P_n(x)|\,r(x)\,dx, \qquad (5.24)$$
$$E_{n,1}(f;\, c,\, d;\, M)_L = E_n(f;\, c,\, d;\, M)_L,$$

где минимум распространен на всевозможные многочлены P_n степени n, для которых имеет место неравенство

$$\int_{-1}^{+1} |P_n(x)| r(x)\, dx \leqslant M, \tag{5.25}$$

где M — заданная константа.

Справедливы следующие теоремы, которые можно рассматривать как обобщения теорем 1, 2, 3.

ТЕОРЕМА 1'. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L \approx r(a) E_n(|a-x|^s)_L \quad (n \to \infty), \tag{5.26}$$

где $s > -1$, $-1 < a < 1$.

ТЕОРЕМА 2'. *Пусть* $s > -1$, $-1 < a < 1$. *Существует последовательность многочленов* $P_n(x)$, *обладающих следующим свойством:*

Каково бы ни было $\delta > 0$, *имеет место*

$$\int_{|x-a|<\delta} ||x-a|^s - P_n(x)| r(x)\, dx \approx E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L, \tag{5.27}$$

$$\int_{|x-a|>\delta} ||x-a|^s - P_n(x)| r(x)\, dx = o(E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L) = o\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right) \tag{5.28}$$

$$(n \to \infty).$$

ТЕОРЕМА 3'. *Пусть* $s > -1$, $-1 < a < 1$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. *Справедливо неравенство*

$$E_{n,r(x)}(|a-x|^s;\ a-\delta,\ a+\delta;\ M)_L > (1-\varepsilon) E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L \tag{5.29}$$

при $n > n_0$, *где* n_0 *достаточно велико.*

Доказательство теорем 1'—3'. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы для $|x-a| < \delta$ выполнялось

$$r(a)(1-\varepsilon) < r(x) < r(a)(1+\varepsilon),$$

что возможно, так как $r(a) > 0$ и $r(x)$ для $x = a$ непрерывна.

Заметим, что по условию функция $|r(x)|^q$ суммируема на интервале $(-1, +1)$, где $q > \frac{3}{2}$. Поэтому для числа p, удовлетворяющего равенству $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, имеет место $p < 3$.

Пусть $P_n(x)$ — многочлены, подчиняющиеся теореме 3; тогда, используя неравенство Гельдера, будем иметь

$$E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L \leqslant \int_{-1}^{+1} ||a-x|^s - P_n(x)| r(x)\, dx =$$

$$= \int_{|x-a|<\delta} ||a-x|^s - P_n(x)| r(x)\, dx + \int_{|x-a|>\delta} ||a-x|^s - P_n(x)| r(x)\, dx <$$

$$< r(a)(1+\varepsilon) \int_{|x-a|<\delta} ||x-a|^s - P_n(x)|\, dx +$$

$$+ N\left(\int_{|x-a|>\delta} ||a-x|^s - P_n(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < r(a)(1+2\varepsilon) E_n(|a-x|^s)_L \tag{5.30}$$

при $n > n_0$, где n_0 достаточно велико.

С другой стороны, пусть $P_n(x)$ — многочлены, для которых

$$\int_{-1}^{+1} |P_n(x)| r(x) dx \leqslant C, \tag{5.31}$$

где C — константа; тогда, в силу условия 1), наложенного на $r(x)$,

$$\int_{-1}^{+1} |P_n(x)| dx < \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^{+1} |P_n(x)| r(x) dx < \frac{C}{\lambda} = M \tag{5.32}$$

и вследствие теоремы 3 получим

$$\int_{|x-a|<\delta} ||a-x|^s - P_n(x)| r(x) dx > r(a)(1-\varepsilon) \int_{|x-a|<\delta} ||a-x|^s - P_n(x)| dx \geqslant$$
$$\geqslant r(a)(1-\varepsilon) E_n(|a-x|^s; a-\delta, a+\delta; M)_L >$$
$$> r(a)(1-2\varepsilon) E_n(|a-x|^s)_L \tag{5.33}$$

при $n > n_0$, где n_0 достаточно велико.

Так как неравенство (5.33) справедливо для любого многочлена P_n, для которого имеет место (5.31), то

$$E_{n,r(x)}(|a-x|^s; a-\delta, a+\delta; C) > r(a)(1-2\varepsilon) E_n(|a-x|^s)_L \tag{5.34}$$

при n достаточно больших.

Пусть теперь P_n есть многочлен, для которого

$$E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L = \int_{-1}^{+1} ||a-x|^s - P_n(x)| r(x) dx; \tag{5.35}$$

для него при некоторой постоянной C будет выполняться неравенство (5.31) и, следовательно, воспользовавшись (5.33), получим

$$E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L > \int_{|x-a|<\delta} ||a-x|^s - P_n(x)| r(x) dx >$$
$$> r(a)(1-2\varepsilon) E_n(|a-x|^s)_L, \tag{5.36}$$

где n достаточно велико.

Из неравенств (5.30) и (5.36) следует теорема 1':

$$E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L \approx r(a) E_n(|a-x|^s)_L \quad (n \to \infty). \tag{5.26}$$

Далее, если принять во внимание (5.26), то легко видеть, что многочлен $P_n(x)$, фигурирующий в неравенствах (5.30), удовлетворяет теореме 2'.

Наконец, из (5.26) и (5.34) следует теорема 3'.

Таким образом, теоремы 1', 2', 3' доказаны. Собственно говоря, последние две теоремы доказаны при условии, что $\delta > 0$ достаточно мало, но совершенно очевидно, что если эти теоремы верны при $\delta = \delta_1$, то они верны также при $\delta = \delta_2$, $\delta_2 > \delta_1$.

ТЕОРЕМА 4. *Если* $s > -1$, $-1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < 1$ *и*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k |a_k - x|^s,$$

то

$$E_{n,r(x)}(f)_L \approx \sum_{k=1}^{m} |A_k| E_{n,r(x)}(|a_k - x|^s)_L \approx$$

$$\approx \frac{M_s}{n^{s+1}} \sum_{k=1}^{m} |A_k| (1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}} r(a_k) \quad (n \to \infty). \tag{5.37}$$

Доказательство. Окружим точки $a_k (k=1, \ldots, m)$ попарно не пересекающимися интервалами $(a_k-\delta,\ a_k+\delta)$ и подберем к ним многочлены $Q_n^{(k)}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ такие, чтобы многочлены $\frac{1}{A_k} Q_n^{(k)}(x)$ подчинялись теореме 2′ при $a=a_k$ $(k=1, \ldots, m)$; тогда, очевидно,

$$E_{n,r(x)}(f)_L \leqslant \int_{-1}^{+1} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{m} Q_n^{(k)}(x) \right| r(x)\, dx <$$

$$< (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{m} |A_k| E_{n,r(x)}(|a_k - x|^s)_L, \tag{5.38}$$

при $n > n_0$, где n_0 достаточно велико.

С другой стороны, пусть $P_n(x)$ есть наилучший в среднем с весом $r(x)$ многочлен для $f(x)$. Тогда он будет удовлетворять неравенству (5.31) при некотором C. Положим еще

$$P_n(x) = \sum_i{}^{(k)} Q_n^{(i)}(x) + r_n^{(k)}(x) \quad (k=1, \ldots, m), \tag{5.39}$$

где сумма $\sum^{(k)}$ не содержит слагаемого со значком k.

Очевидно,

$$E_{n,r(x)}(f)_L = \int_{-1}^{1} |f(x) - P_n(x)|\, r(x)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{|a_k - x| < \delta} |f(x) - P_n(x)|\, r(x)\, dx \tag{5.40}$$

и при этом, вследствие теорем 2′ и 3′,

$$\int_{|a_k - x| < \delta} |f(x) - P_n(x)|\, r(x)\, dx = \int_{|a_k - x| < \delta} |A_k |a_k - x|^s - r_n^{(k)}(x)|\, r(x)\, dx +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right) > (1-\varepsilon_n) |A_k| E_{n,r(x)}(|a_k - x|^s)_L$$

$$(\varepsilon_n \to 0 \text{ при } n \to \infty), \tag{5.41}$$

так как из того, что для многочленов $P_n(x)$ и $Q_n^{(k)}(x)$ выполняется неравенство (5.31) при некоторой константе C следует, что оно также выполняется для $r_n^{(k)}(x)$ с другой, быть может, константой C_1. Следовательно,

$$E_{n,r(x)}(f)_L > (1-\varepsilon_n) \sum_{k=1}^{m} |A_k| E_{n,r(x)}(|a_k - x|^s)_L \quad (\varepsilon_n \to 0), \tag{5.42}$$

что вместе с (5.38) даст (5.37).

§ 6. Случай $a \geqslant 1$ и произвольного $r(x)$

В случае $a \geqslant 1$, как уже было упомянуто в примечании в конце § 2, наилучшее приближение степени $n-2$ функции $|a-x|^s$ в среднем с весом $r(x)$ осуществляется при помощи многочлена $P_{n-2}(x)$, интерполирующего функцию $(a-x)^s$ в нулях многочлена $R(x)=R_{n-1}(x)$, наименее уклоняющегося от нуля в среднем с весом $r(x)$ (см. теорему А § 2).

Пусть G — область плоскости комплексного переменного z, ограниченная контуром C, состоящим из:

1) окружности H бесконечно большого радиуса, из которой вырезана бесконечно малая дуга, пересекающая положительную полуось x;

2) двух отрезков, идущих от этого выреза по обе стороны оси x к точке $x=a$ и

3) окружности h бесконечно малого радиуса с центром в точке a.

Функция $(a-z)^s$ при $a \geqslant 1$ будет регулярной в области G и потому, применяя теорему вычетов для разности $(a-x)^s$ и ее интерполяционного многочлена $P_{n-2}(x)$, будем иметь выражение

$$\varphi(x)=(a-x)^s-P_{n-2}(x)=\frac{R(x)}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(a-z)^s\,dz}{(z-x)\,R(z)}, \tag{6.1}$$

где C — граница G.

Так как интеграл по окружностям H и h в пределе обращается в нуль, то

$$\varphi(x)=-\frac{R(x)\sin\pi s}{\pi}\int\limits_a^\infty \frac{(z-a)^s\,dz}{(z-x)\,R(z)} \quad (s>-1). \tag{6.2}$$

§ 7. Случай $a=1$, $(x)\equiv 1$

В этом случае формула (6.2) принимает вид

$$\varphi(x)=-R(x)\,\frac{\sin\pi s}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{(z-1)^s\,dz}{(z-x)\,R(z)}, \tag{7.1}$$

где

$$R(z)=\frac{\sin n\arccos z}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{7.2}$$

Положим

$$z=\cos it=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right) \quad (\sigma=e^t).$$

Тогда

$$R(z)=\frac{\sigma^n+\sigma^{-n}}{\sigma-\sigma^{-1}}, \qquad dz=\frac{1}{2}\,\frac{z^2-1}{\sigma^2}\,d\sigma, \qquad z-1=\frac{(\sigma-1)^2}{2\sigma},$$

$$z-x=\frac{\sigma^2+1-2\sigma x}{2\sigma}$$

и, следовательно,

$$\varphi(x)=(1-x)^s-P_{n-2}(x)=-R(x)\,\frac{\sin\pi s}{2^s\pi}\int\limits_1^\infty \frac{(\sigma-1)^{2s+2}(\sigma+1)^2\,d\sigma}{(1+\sigma^2-2\sigma x)\,\sigma^{2+s}(\sigma^n-\sigma^{-n})}=$$

$$=-\frac{R(x)\sin\pi s}{2^s\pi n^{2s+3}}\int_0^\infty\frac{u^{2s+2}\left(2+\frac{u}{n}\right)^2du}{\left[\frac{u^2}{n^2}+2\left(1+\frac{u}{n}\right)(1-x)\right]\left(1+\frac{u}{n}\right)^{2+s}\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n}\right]}.$$

Но, обозначая через $p(u)$ функцию, не превышающую по абсолютной величине на всей положительной оси некоторый многочлен, и полагая $x=\cos\theta$, будем иметь

$$\frac{\left(2+\frac{u}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^{2+s}}=4\left(1+\frac{p(u)}{n}\right),$$

$$\frac{1}{\frac{u^2}{n^2}+2\left(1+\frac{u}{n}\right)(1-x)}=\frac{1+\frac{p(u)}{n}}{\frac{u^2}{n^2}+4\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

где многочлены, которых не превышают функции $|p(u)|$, не зависят от x (или θ).

Таким образом, при $x=\cos\theta$

$$\varphi(x)=-\frac{R(x)\sin\pi s}{2^{s-2}\pi n^{2s+3}}\int_0^\infty\frac{u^{2s+2}\left(1+\frac{p(u)}{n}\right)du}{\left(\frac{u^2}{n^2}+4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n}\right]}.$$

Но

$$\left|\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n}-e^{-u}\right|\leqslant\frac{Cu^2e^u}{n}\quad\text{для}\quad 0<u<\sqrt{n},$$

откуда

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n}=e^{-u}\left(1+\frac{p(u)}{n}\right).$$

Далее,

$$\left|\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-e^u\right|\leqslant\frac{Cu^2e^{-u}}{n},\qquad\left(1+\frac{u}{n}\right)^{2u}-1>2u,$$

$$\frac{1}{e^{2u}-1}<\begin{cases}\frac{C}{ue^{2u}} & 0<u<1,\\ \frac{C}{e^{2u}} & 1<u,\end{cases}$$

откуда

$$\left|\frac{1}{1-\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-2n}}-\frac{1}{1-e^{-2u}}\right|=\left|\frac{e^{2u}-\left(1+\frac{u}{n}\right)^{2n}}{\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^{2n}-1\right](e^{2u}-1)}\right|<$$

$$<\frac{C}{n}<\frac{C_1}{n(1-e^{-2u})}=\frac{p(u)}{n}\cdot\frac{1}{1-e^{-2u}}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{1-\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-2n}}=\frac{1+\frac{p(u)}{n}}{1-e^{-2u}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n}}=\frac{1+\frac{p(u)}{n}}{e^u-e^{-u}}\quad\text{для}\quad 0<u<\sqrt{n}.$$

Вследствие этого, рассуждениями, подобными выводу (4.31), приходим к равенству

$$\varphi(x) = -\frac{R(x)\sin\pi s}{2^{s-2}\pi n^{2s+3}}\int_0^\infty \frac{u^{2s+2}\left(1+\frac{p(u)}{n}\right)du}{\left(\frac{u^2}{n^2}+4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)(e^u-e^{-u})} + O(2^{-n^\lambda})\left(0<\lambda<\frac{1}{2}\right),$$

а в силу неравенства

$$\left|\frac{1}{\frac{u^2}{n^2}+4\sin^2\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\frac{u^2}{n^2}+\theta^2}\right| < C,$$

где C—постоянная, будем иметь

$$E_n(|1-x|^s)_L = \int_{-1}^{+1}|\varphi(x)|\,dx = \int_0^\pi |\varphi(\cos\theta)|\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{|\sin\pi s|}{2^{s-2}\pi n^{2s+3}}\int_0^\pi |\sin n\theta| \int_0^\infty \frac{u^{2s+2}\left(1+\frac{p(u)}{n}\right)du}{\left(\frac{u^2}{n^2}+\theta^2\right)(e^u-e^{-u})}\,d\theta + O\left(\frac{1}{n^{2s+3}}\right) =$$

$$= \frac{|\sin\pi s|}{2^{s-2}\pi n^{2s+3}}\int_0^{n\pi} |\sin v| \int_0^\infty \frac{u^{2s+2}\left(1+\frac{p(u)}{n}\right)du}{(u^2+v^2)(e^u-e^{-u})}\,d\theta + O\left(\frac{1}{n^{2s+3}}\right) =$$

$$= \frac{2^{2-s}}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)n^{2s+2}}\int_0^\infty |\sin v| \int_0^\infty \frac{u^{2s+2}\,du}{(u^2+v^2)(e^u-e^{-u})}\,dv + O\left(\frac{1}{n^{2s+3}}\right), \tag{7.3}$$

так как

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

§ 8. Случай $a=1$, $r(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $s>-\frac{1}{2}$

В этом случае формула (6.2) принимает вид

$$\varphi(x) = (1-x)^s - P_{n-1}(x) = -\frac{R(x)\sin\pi s}{\pi}\int_1^\infty \frac{(z-1)^s\,dz}{(z-x)R(z)},$$

где

$$R(z) = \cos n \arccos z.$$

При помощи тех же подстановок, что и в предыдущем параграфе

$$z = \cos it = \frac{1}{2}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right), \quad \sigma = e^t,$$

придем к следующему выражению:

$$\varphi(x) = -R(x)\frac{\sin\pi s}{2^{s-1}\pi}\int_1^\infty \frac{(\sigma-1)^{2s+1}(\sigma+1)\,d\sigma}{(1+\sigma^2-2\sigma x)\,\sigma^{1+s}(\sigma^n+\sigma^{-n})} =$$

$$= -R(x)\frac{\sin\pi s}{2^{s-1}\pi n^{2s+2}}\int_0^\infty \frac{u^{2s+1}\left(2+\frac{u}{n}\right)du}{\left[\frac{u^2}{n^2}+2\left(1+\frac{u}{n}\right)(1-x)\right]\left(1+\frac{u}{n}\right)^{1+s}\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^n+\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n}\right]} =$$

$$= -R(x)\,\frac{\sin \pi s}{2^{s-2}\pi n^{2s+2}}\int\limits_0^\infty \frac{u^{2s+1}\left(1+\frac{p(u)}{n}\right)du}{\left(\frac{u^2}{n^2}+4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)(e^u+e^{-u})} \qquad (x=\cos\theta)$$

и, следовательно,

$$E_{n,\sqrt{1-x^2}}(|1-x|^s)_L=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{|\varphi(x)|\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\limits_0^\pi|\varphi(\cos\theta)|\,d\theta=$$

$$=\frac{|\sin\pi s|}{2^{s-2}\pi n^{2s+2}}\int\limits_0^\pi|\cos\theta|\int\limits_0^\infty\frac{u^{2s+1}\left(1+\frac{p(u)}{n}\right)du}{\left(\frac{u^2}{n^2}+\theta^2\right)(e^u+e^{-u})}\,d\theta+O\left(\frac{1}{n^{2s+2}}\right)=$$

$$=\frac{2^{2-s}}{\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)}\,\frac{1}{n^{2s+1}}\int\limits_0^\infty|\cos v|\int\limits_0^\infty\frac{u^{2s+1}\,du}{(u^2+v^2)(e^u+e^{-u})}\,dv+O\left(\frac{1}{n^{2s+2}}\right). \qquad (8.1)$$

§ 9. Случай $a>1$, $r(x)\equiv 1$, s — любое (но не целое положительное)

Мы знаем из § 6, что в этом случае отклонение функции $(a-x)^s$ от ее наилучшего в среднем многочлена $P_{n-2}(x)$ степени $n-2$ выражается по формуле (6.1):

$$\varphi(x)=(a-x)^s-P_{n-2}(x)=\frac{R(x)}{2\pi i}\int\limits_C\frac{(a-z)^s\,dz}{(z-x)\,R(z)},$$

$$R(z)=\frac{\sin n\arccos z}{\sqrt{1-z^2}},$$

где в качестве контура C можно взять любой замкнутый контур, содержащий внутри отрезок $(-1,+1)$ и вне — точку $z=a$.

Положим $a=\cos bi$. Подстановка $z=\cos t$ переводит эллипс плоскости z, проходящий через $z=a$ и имеющий фокусами точки $z=\pm 1$, в отрезок $\{t=u+bi, -\pi\leqslant u\leqslant\pi\}$ плоскости t, который мы заменим непрерывным контуром

$$C_1=H_1+\delta_1+h+\delta_2+H_2,$$

состоящим из пяти кусков:

H_1: $u+(b+\varepsilon)i \quad (-\pi\leqslant u\leqslant -\eta)$,
δ_1: $-\eta+vi \quad (b+\varepsilon\geqslant v\geqslant b)$,
h — полуокружность бесконечно малого радиуса η,
δ_2: $\eta+vi \quad (b\leqslant v\leqslant b+\varepsilon)$,
H_2: $u+(b+\varepsilon)i \quad (\eta\leqslant u\leqslant\pi)$.

Таким образом,

$$\varphi(\cos\theta)=\frac{R(\cos\theta)}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{(a-\cos t)^s\,\psi(t,\theta)\,dt}{\sin nt}, \qquad (9.1)$$

где
$$\psi(t,\theta)=\frac{\sin^2 t}{\cos\theta-\cos t}.$$

Функция $\psi(t,\theta)$ аналитическая относительно t и непрерывная относи-

тельно t и θ для $t=u+iv$, $\frac{b}{2}\leqslant v\leqslant\frac{3b}{2}$ и любого вещественного θ, поэтому для этих значений t и θ имеет место

$$|(a-\cos t)^s\psi(t,\theta)|\leqslant M_1, \tag{9.2}$$

где M_1 — константа.

Далее,

$$\frac{1}{\sin nt}=\frac{2i}{e^{int}+e^{-int}}=-2i\sum_{\lambda=0}^{\infty}e^{(2\lambda+1)int} \tag{9.3}$$

и при этом ряд сходится в верхней полуплоскости t.

Очевидно, для $t=u+(b+\varepsilon)i$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{\sin nt}\right|\leqslant M_2e^{-(b+\varepsilon)n}\quad(n=1,2,\ldots), \tag{9.4}$$

из которого, принимая во внимание (9.2), следует, что интеграл, стоящий в правой части (9.1), взятый по отрезкам H_1 и H_2, имеет порядок $e^{-(b+\varepsilon)n}$ равномерно относительно θ.

Нам предстоит исследовать интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(\cos bi-\cos t)^s\,\psi(t,\theta)\,dt}{\sin nt}=$$

$$=-\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_L\psi(t,\theta)(\cos bi-\cos t)^s e^{(2\lambda+1)int}\,dt=-\sum_{\lambda=0}^{\infty}I_{(2\lambda+1)n}(\theta), \tag{9.5}$$

где L — контур, состоящий из бесконечно близких отрезков δ_1, δ_2 и окружности h бесконечно малого радиуса. La Vallée Poussin в своей монографии ([4]) показал, что если функция $\psi(t,\theta)$ аналитическая относительно t и непрерывная относительно t и θ для $|t-bi|<\varepsilon$, $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ и $\psi(bi,\theta)\neq 0$ для $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, то для всех s, исключая $s=0,1,2,\ldots$ имеет место

$$I_k(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_L\psi(t,\theta)(\cos bi-\cos t)^s e^{ikt}=$$
$$=2\psi(bi,\theta)\frac{(\operatorname{sh}b)^s e^{-kb}}{\Gamma(-s)\,k^{s+1}}(1+\varepsilon_k(\theta)),$$

где $\varepsilon_k(\theta)\to 0$ при $k\to\infty$ равномерно относительно θ *.

Отсюда

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}|I_{(2\lambda+1)n}(\theta)|\leqslant c\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{e^{-(2\lambda+1)nb}}{(2\lambda+1)^{s+1}n^{s+1}}=c\,\frac{e^{-2nb}}{n^{s+1}}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{e^{-(2\lambda-1)nb}}{(2\lambda+1)^{s+1}}\leqslant c_1\frac{e^{-2nb}}{n^{s+1}},$$

где c и c_1 — константы, зависящие только от s,

$$I_n(\theta)=2\psi(bi,\theta)\frac{(\operatorname{sh}b)\,e^{-nb}}{\Gamma(-s)\,n^{s+1}}(1+\varepsilon_n(\theta))=$$
$$=\frac{2\,(\operatorname{sh}b)^{2+s}e^{-nb}}{(a-\cos\theta)\,\Gamma(-s)\,n^{s+1}}(1+\varepsilon_n(\theta))\quad(\varepsilon_n(\theta)\to 0)$$

---

* Мы несколько обобщили формулировку этой теоремы, однако доказательство остается прежним.

равномерно относительно θ. Следовательно, интеграл (9.5) равен $-I_n(\theta)$ и

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L=\int_0^\pi|\varphi(\cos\theta)|\sin\theta\,d\theta=\int_0^\pi|\sin n\theta\, I_n(\theta)|\,d\theta=$$

$$=\int_0^\pi\left|\frac{\sin n\theta}{a-\cos\theta}\right|d\theta\,\frac{2(\operatorname{sh}b)^{2+s}e^{-nb}}{\Gamma(-s)\,n^{s+1}}(1+\varepsilon_n(\theta))\qquad(\varepsilon_n\to 0).$$

Но

$$\int_0^\pi\frac{|\sin n\theta|}{a-\cos\theta}d\theta=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin v|\,dv}{a-\cos\frac{v}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi\frac{\sin u\,du}{a-\cos\frac{k\pi+u}{n}}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi\frac{\sin u\,du}{a-\cos\frac{k\pi}{n}}+o(1)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\varphi}{a-\cos\varphi}+o(1)=$$

$$=\frac{4}{\pi\operatorname{sh}b}\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^\infty e^{-mb}\cos m\theta\right)d\theta+o(1)=\frac{2}{\operatorname{sh}b}+o(1).\qquad(9.6)$$

Таким образом, принимая во внимание, что $\operatorname{sh}b=\sqrt{a^2-1}$ и $e^b=\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}b=a+\sqrt{a^2-1}$, будем иметь

$$E_n((a-x)^s)_L=\frac{4(a^2-1)^{\frac{1+s}{2}}(1+\varepsilon_n)}{\Gamma(-s)\,n^{s+1}(a+\sqrt{a^2-1})^{n+2}}\qquad(\varepsilon_n\to 0)\qquad(9.7)$$

(мы заменили n на $n+2$).

§ 10. Случай $a>1$, $r(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, s — любое (но не целое положительное)

В этом случае отклонение функции $(a-x)^s$ от ее наилучшего в среднем многочлена $P_{n-1}(x)$ определяется по формуле

$$\varphi(x)=(a-x)^s-P_{n-1}(x)=\frac{R(x)}{2\pi i}\int_C\frac{(a-z)^s\,dz}{(z-x)\,R(z)},$$

где

$$R(z)=\cos n\arccos z.$$

Отсюда следует

$$\varphi(\cos\theta)=\frac{R(\cos\theta)}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(a-\cos t)^s\,\psi(t,\theta)\,dt}{\cos nt},\qquad(10.1)$$

где кривая C_1 — та же, что в § 7, а

$$\psi(t,\theta)=\frac{\sin t}{\cos\theta-\cos t},$$

Из равенства

$$\frac{1}{\cos nt}=\frac{2}{e^{int}+e^{-int}}=2\sum_{\lambda=0}^\infty(-1)^\lambda e^{(2\lambda+1)int},$$

где ряд сходится в верхней полуплоскости, заключаем, что для $t = u + i(b + \varepsilon)$

$$\left| \frac{1}{\cos nt} \right| < M_1 e^{-n(b+\varepsilon)}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что для тех же t и вещественных θ

$$\left| \frac{\psi(t, \theta)}{(a - \cos t)^s} \right| < M_2,$$

где M_2 — константа, заключаем, что интеграл (10.1) имеет порядок $e^{-n(b+\varepsilon)}$ равномерно относительно θ.

Дальше рассуждаем так же, как в предыдущем параграфе, пользуясь теоремой Vallée Poussin'a. При $a = \cos bi$ и L, имеющем тот же смысл, что и в § 7,

$$\varphi(\cos\theta) \approx \frac{R(\cos\theta)}{2\pi i} \int_L \frac{(a - \cos t)^s \psi(t, \theta)\, dt}{\cos nt} =$$

$$= \frac{R(\cos\theta)}{\pi i} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \int_L (a - \cos t)^s \psi(t, \theta) e^{(2\lambda+1)int}\, dt \approx$$

$$\approx \frac{R(\cos\theta)}{\pi i} \int_L (a - \cos t)^s \psi(t, \theta) e^{int}\, dt \approx$$

$$\approx -2iR(\cos\theta)\psi(bi, \theta) \frac{(\operatorname{sh} b)^s e^{-nb}}{\Gamma(-s) n^{s+1}} = 2R(\cos\theta) \frac{(\operatorname{sh} b)^{s+1} e^{-nb}}{\Gamma(-s)(\cos\theta - a) n^{s+1}}$$

равномерно относительно θ.

Отсюда

$$E_{n-1, \sqrt{1-x^2}}((a - x)^s)_L = \int_{-1}^{+1} \frac{|\varphi(x)|\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^\pi |\varphi(\cos\theta)|\, d\theta \approx$$

$$\approx \frac{2(\operatorname{sh} b)^{s+1} e^{-nb}}{\Gamma(-s) n^{s+1}} \int_0^\pi \frac{|\cos n\theta|}{a - \cos\theta}\, d\theta \approx \frac{4(\operatorname{sh} b)^s e^{-nb}}{\Gamma(-s) n^{s+1}} \quad (n \to \infty),$$

так как с помощью выкладок, подобных (7.7), можно показать, что

$$\int_0^\pi \frac{|\cos n\theta|\, d\theta}{a - \cos\theta} = \frac{2}{\operatorname{sh} b} + o(1).$$

Таким образом (заменяя $n - 1$ на n), получаем

$$E_{n, \sqrt{1-x^2}}((a - x)^s)_L \approx \frac{4(a^2 - 1)^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(-s) n^{s+1} (a + \sqrt{a^2 - 1})^{n+1}}.$$

Поступило
20. VIII. 1946

ЛИТЕРАТУРА

1a Бернштейн С. Н., Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés, Acta Mathematica, 37:1 (1913), 1—57.
1b Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, М. — Л., (1937), 90 — 102.
1c Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении $|x - c|^p$, Доклады Ак. Наук СССР, XVIII, № 7 (1938), 379 — 384.

[1d] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 2 (1938), 169—190.
[1e] Бернштейн С. Н., О многочленах ортогональных в конечном интервале, ДНТВУ, 1937.
[2] Ибрагимов И. И., Об асимптотическом значении наилучшего приближения функций, имеющих вещественную особую точку, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 429—460.
[3a] Никольский С. М., О наилучшем приближении многочленами в среднем функций с особенностями вида $|a-x|^s$, Доклады Ак. Наук СССР, т. LV, № 3 (1947), 195—198.
[3b] Никольский С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 207—256.
[4] L'a Vallée Poussin Ch., Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris (1919), § 93.

S. NIKOLSKY. ON THE BEST APPROXIMATION IN THE MEAN TO THE FUNCTION $|a-x|^s$ BY POLYNOMIALS

SUMMARY

S. Bernstein has studied asymptotic properties of the best approximation by polynomials to $|a-x|^s$—the simplest function having an algebraic singularity.

This paper is devoted to the similar investigation of the best approximation by polynomials to $|a-x|^s$ *in the mean*.

By the best approximation by polynomials of the nth degree to an integrable function $f(x)$ in the mean with the weight $r(x)\geqslant 0$ on the segment $[c, d]$ we mean

$$E_{n,r(x)}(f;\, c,\, d)_L=\min_{P_n}\int_c^d |f(x)-P_n(x)|\, r(x)\,dx$$

where the minimum is taken over all the polynomials

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

of the n degree. We put thereby

$$E_{n,\ x)}(f)_L=E_{n,r(x)}(f;-1,+1)_L$$
$$E_n(f)_L=E_{n,1}(f)_L.$$

The case $a\geqslant 1$ is the simplest. In this case $|a-x|^s$ has derivatives of any order that vanish nowhere in the interval $-1<x<1$. Therefore, by Bernstein's theorem, the polynomial $P_n^*(x)$ which realizes the best approximation $E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L$ interpolates at the same time $|a-x|^s$ at the zeros of the polynomial $R_{n+1}(x)$ of the $(n+1)$th degree which deviates least from zero in the sense that

$$\min_{P_n}\int_{-1}^{+1}|x^{n+1}+P_n(x)|\, r(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}|R_{n+1}(x)|\, r(x)\,dx.$$

Therefore, by the theory of residues,

$$(a-x)^s - P_n^*(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{2\pi i} \int_C \frac{(a-z)^s\,dz}{(z-x)\,R_{n+1}(z)},$$

where C is a closed contour enclosing all zeros of $R_{n+1}(x)$ (they all lie in the interval $-1 < x < 1$), while the point $z = a$ must lie outsides of C. The problem is reduced to asymptotic estimation of the last integral.

Bernstein's theorem cannot be applied to the case $|a| < 1$. It remains, nevertheless, asymptotically true, under some conditions imposed on a.

The following lemma is here essential:

LEMMA 1. *Let $P_{n-2}(x)$ be the polynomial of the* $(n-2)$ th *degree which coincides with $|a-x|^s$ at the zeros*

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

of the polynomial $R_{n-1}(x)$ of the $(n-1)$th degree, where R_{n-1} is defined by (3.3), *and let $a = \cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ $(1 \leqslant l \leqslant n-1)$, where l is an integer ($s > -1$, even values of s excluded). Then we have the asymptotic equalities*

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L = \int_{-1}^{+1} \big|\,|a-x|^s - P_{n-2}(x)\big|\,dx + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right) =$$

$$= \frac{M_s(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right) \tag{3.4}$$

that are fulfilled uniformly in a such that $|a| \leqslant \eta < 1$, where

$$M_s = \frac{8\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{\pi} \int_0^\infty |\cos v| \int_0^\infty \frac{u^{s+1}\,du}{(v^2+u^2)(e^u+e^{-u})}\,dv.$$

For odd integral values of s

$$M_s = \frac{8s!}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{s+2}}. \tag{3.2}$$

THEOREM 1. *If $|a| < 1$ and $s > -1$ (even values of s excluded), then we have the asymptotic equality*

$$E_n(|a-x|^s)_L = \frac{M_s(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right) =$$

$$= (1-a^2)^{\frac{s+1}{2}} E_n(|x|^s)_L + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right) \tag{3.1}$$

that is fulfilled uniformly in a such that $|a| \leqslant \eta < 1$.

Theorem 1 follows from lemma 1. For the inequality (3.5) (see the Russian text) implies (3.6). Further, introducing the notations (3.7) and (3.8), we obtain (3.9); (3.10) can be proved analogously.

Proof of lemma 1 (§ 4). The function (4.1), where μ is defined by (4.3) or by (4.2) according as s is or is not integral, possesses the property (4.4).

We define a according to (4.5) and consider the branch Γ of the hyperbola determined by (4.6) and the domain G of the z-plane bounded by the contour C. The latter consists of 1) two infinitely close curves Γ_1, Γ_2 lying on both sides of Γ, 2) a circle h of infinitesimal radius with center at $z=a$, 3) a circle H of infinite radius with center at $z=0$.

Then, provided $P^*_{n-2}(x)$ is the polynomial of the $(n-2)$th degree which coincides with $f(z)$ at the zeros of $R_{n-1}(x)$, we obtain (4.7), since $f(z)$ is regular in G.

For non-integral or odd integral values of s the function $f(z)$ is defined on the upper and on the lower boundaries Γ by (4.8) and (4.9) respectively. Hence, since the limit of the integral taken over the circles h and H is zero, we obtain (4.10) and (4.11), where $\omega=\arg(z-a)$ $\left(\alpha<\omega<\frac{\pi}{2}\right)$.

Further, replacing z by β and putting $\sigma=e^{\beta}$, $\sigma=1+\frac{u}{n}$ (see (4.11) below), we obtain (4.12), where μ, ν, λ, ... are defined by the formulae written under (4.12). Thereby $p(u)$ denotes a function which depends on u and sometimes on n and x, but does not exceed in absolute magnitude a polynomial not depending on n, x.

Taking the real part $I_n(x)$ of $I^*_n(x)$, we obtain (4.17) and (4.18). In (4.19) the polynomial $P_{n-2}(x)$ interpolates $|x-a|^s$ at the zeros of $R_{n-1}(x)$.

The functions $\Psi_k^{(n)}(x)$ defined by (4.18) are particular cases of the function $S_n(x)$ with suitably chosen A, B and $p_*(u)$ (the latter being not greater than a polynomial).

Then we prove the equality (4.22) holding uniformly in θ and α $\left(\frac{\pi}{2}>\alpha>\alpha_*>0\right)$, in view of which $S_n(x)$ is representable in the form (4.25).

Then we prove inequalities (4.26) and (4.27), where

$$h_n(\theta)=\frac{1}{n}\int_0^{\infty}\frac{u^{\lambda}e^{-u}du}{(\theta-\alpha)^2+\frac{u^2}{n^2}}\quad(0<\alpha<\pi,\ \lambda>0).$$

By means of (4.26), (4.27) and (4.29), we finally prove the equalities (4.33) and (4.34), which imply (4.35), (4.36) and (4.37). Hence follows (4.38), that is the second equality (3.4) in lemma 1.

As to the first equality (3.4), which means that the interpolating polynomial $P_{n-2}(x)$ realizes the (asymptotically) best approximation to $|x-a|^s$ in the mean, it can be proved as follows.

By (4.17) and (4.18), we have (4.39) and (4.40). Thereby (4.41) is fulfilled, in view of (4.36) and (4.37). The first equality (4.18) shows that $\Psi_1^{(n)}(x)>0$ so that $\alpha_n(x)$ changes its sign only at the zeros of

$R_{n-1}(x)$. Hence we obtain (4.42) and, since (4.43) is valid, (4.44), (4.45) and finally (4.46).

§ 5 contains further generalizations of theorem 1 analogous to the corresponding theorems due to S. Bernstein [see his note ([1c])].

THEOREM 2. *Let* $s > -1$, $-1 < a < 1$. *There exists a sequence of polynomials* $P_{n-2}(x)$ $(n = 2, 3, \ldots)$, *possessing the property that, for every* $\delta > 0$ *the asymptotic equality*

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L \approx \int_{a-\delta}^{a+\delta} ||a-x|^s - P_{n-2}(x)|\,dx \quad (n \to \infty) \tag{5.1}$$

takes place; thereby, if $1 \leqslant p < 3$, *then*

$$\left(\int_{|x-a|<\delta} ||x-a|^s - P_{n-2}(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = o\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right) = \\ = o(E_{n-2}(|a-x)|^s)_L \quad (n \to \infty). \tag{5.2}$$

Proof. For $a = \cos\left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ this property is possessed by the interpolating polynomial $P_{n-2}(x)$, occurring in lemma 1 (§ 3). For, if $|a-x|^s > \delta$, then the expression in { } in the right sides of (4.18) is bounded below by δ^2, therefore (5.3) takes place and, in view of (5.4) (see (4.29)) and (5.5), (5.6) is true. In view of (4.19), we have (5.7) and further (5.8), (5.9), (5.10) which imply (5.2). Since $P_{n-2}(x)$ satisfies the condition of lemma 1, (5.1) is true. One can pass to an arbitrary a by means of an argument similar to (3.9).

LEMMA 3. *Let* $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. *There exist constants* C *and* ν *such that*

$$E_{n-2}(|a-x|^s)_L < \frac{C\Gamma(s+\nu)\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|}{n^{s+1}} \tag{5.12}$$

for

$$0 \leqslant s \leqslant n^\lambda, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}, \quad |a| \leqslant \eta. \tag{5.11}$$

To have an idea of the proof note that the double integral entering the principal term of $E_n(|a-x|^s)_L$ in the right side of (3.1) satisfies the inequality (4.28). This is no proof of (5.12), of course, the error term $O\left(\frac{\ln n}{n^{s+2}}\right)$ in (3.1) being determined for fixed, though arbitrary, values of s.

Let $r(x)$ be a sommable function. We put

$$E_{n,r(x)}(f)_L = \min_{P_n} \int_{-1}^{+1} |f(x) - P_n(x)|\,r(x)\,dx, \tag{5.23}$$

$$E_{n,1}(f)_L = E_n(f)_L$$

where the minimum is taken over all polynomials P_n of the nth degree.

Let further for $-1 < c < d < 1$

$$E_{n,r(x)}(f;\, c,\, d;\, M)_L = \min_{P_n} \int_c^d |f(x) - P_n(x)|\, r(x)\, dx, \tag{5.24}$$

$$E_{n,1}(f;\, c,\, d;\, M)_L = E_n(f;\, c,\, d;\, M)_L$$

the minimum here is taken over all polynomials P_n of the nth degree satisfying the inequality

$$\int_{-1}^{+1} |P_n(x)|\, r(x)\, dx \leq M, \tag{5.25}$$

where M is a given constant.

THEOREM 3. *Let* $s > -1$, $-1 < a < 1$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. *We have*

$$E_n(|a-x|^s;\, a-\delta,\, a+\delta;\, M)_L > (1-\varepsilon)\, E_n(|a-x|^s)_L \tag{5.16}$$

for $n > n_0$, *where* n_0 *is sufficiently large.*

Proof. Let $q(x)$ be defined by (5.17). In view of (5.12) and (5.18), we have (5.19), where λ_s is a constant depending on s only.

Hence we obtain the series of inequalities (5.20), the last of which follows from the existence of $\lim n^{s+1} E_n(|a-x|^s)_L$ (see theorem 1), as well as from the relation $n \approx m$.

If the polynomial $P_n(x)$ satisfies the inequality (5.15) then (5.21) is valid for $P_n(x)$. Therefore, if $P_n^*(x)$ is the best polynomial in the sense of (5.24) for $r(x) \equiv 1$, i. e. $P_n^*(x)$ minimalizes the right side of (5.24), then (5.21) is fulfilled.

Now suppose that $r(x)$ is a function satisfying the following conditions:

1) $r(x) > \lambda > 0$ for $-1 \leq x \leq 1$,

2) there exists a $q > \frac{3}{2}$ such that $\left(\int_{-1}^{1} |r(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = N < \infty$,

3) $r(x)$ is continuous at $x = a$.

Under these conditions we have

THEOREM 1′. *The following asymptotic equality is valid*

$$E_{n,\, r(x)}(|a-x|^s)_L \approx r(a)\, E_n(|a-x|^s)_L \quad (n \to \infty), \tag{5.26}$$

where $s > -1$, $-1 < a < 1$.

THEOREM 2′. *Let* $s > -1$, $-1 < a < 1$. *There exists a sequence of polynomials* $P_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *possessing the property: for every* $\delta > 0$

$$\int_{|x-a|<\delta} ||x-a|^s - P_n(x)|\, r(x)\, dx \approx E_{n,\, r(x)}(|a-x|^s)_L, \tag{5.27}$$

$$\int_{|x-a|>\delta} ||x-a|^s - P_n(x)|\, r(x)\, dx = o(E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L) =$$

$$= o\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right) \quad (n \to \infty). \tag{5.28}$$

THEOREM 3′. *Let* $s > -1$, $-1 < a < 1$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. *Then*

$$E_{n,r(x)}(|a-x|^s;\ a-\delta,\ a+\delta;\ M)_L > (1-\varepsilon)\,E_{n,r(x)}(|a-x|^s)_L \quad (5.29)$$

for $n > n_0$, *where* n_0 *is sufficiently large.*

Proof of theorems 1′—3′. Let us choose $\delta > 0$ so as to have $r(a)(1-\varepsilon) < r(x) < r(a)(1+\varepsilon)$ for $|x-a| < \delta$. The number p such that $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ satisfies the inequality $p < 3$. Therefore, by Hölder's inequality, we have for the polynomial $P_n(x)$ satisfying the condition of theorem 2 the relation (5.30) for $n > n_0$ not being sufficiently large.

On the other hand, suppose that (5.31) is valid for $P_n(x)$; this implies (5.32) and, by theorem 3, (5.33) for sufficiently large n. Hence we obtain (5.34).

Now suppose that (5.35) is fulfilled for $P_n(x)$, then (5.31) takes place for some C and, by (5.33), we obtain (5.36) for sufficiently large n.

(5.30) and (5.36) imply theorem 1′ of (5.26); hence we see that the polynomial $P_n(x)$ in (5.30) satisfies theorem 2′. Finally, theorem 3′ follows from (5.26) and (5.34).

THEOREM 4. *If* $s > -1$, $-1 < a_i < 1$, $-1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < 1$ *and*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k\,|x-a_k|^s,$$

then

$$E_{n,r(x)}(f)_L \approx \sum_{k=1}^{m} |A_k|\,E_{n,r(x)}(|x-a_k|^s)_L \approx$$

$$\approx \frac{M_s}{n^{s+1}} \sum_{k=1}^{m} |A_k|\,(1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}}\,r(a_k) \quad (n \to \infty). \qquad (5.37)$$

Proof. Let $(a_k-\delta,\ a_k+\delta)$ be non-overlapping intervals containing the points a_k $(k=1,\ldots,m)$. We choose the polynomials $\frac{1}{A_k}Q_n^{(k)}(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ subject to theorem 2′ for $a=a_k$ $(k=1,\ldots,m)$. Then (5.38) is valid for sufficiently large n_0.

On the other hand, let $P_n(x)$ be the best polynomial for $f(x)$ (in the mean, with the weight $r(x)$). It satisfies the inequality (5.31).

We represent the polynomial in the form (5.39), where the summand with the index k is omitted in $\sum^{(k)}$. Then we obtain (5.40), and in virtue of theorems 2′ and 3′, the inequalities (5.41). Consequently, (5.42) is true.

Note asymptotic expressions (7.3), (8.1), (9.7), (10.2), which are obtained in § 6—10.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 181—196 Série mathématique

Н. С. ЛАНДКОФ

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ*

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе с помощью теоретико-потенциального метода получаются, прежде всего, основные результаты М. В. Келдыша об условиях разрешимости задачи Дирихле и о существовании счетного «разрешающего множества». Затем исследуется вопрос о том, когда разрешимость задачи на данном счетном множестве точек влечет разрешимость в предельной точке этого множества, вводится понятие «квази-изолированной» иррегулярной точки и доказывается, что всякое разрешающее множество содержит все квази-изолированные точки, между тем как всякая иная точка может быть из него исключена.

Значительное место занимает построение примера задачи Дирихле, разрешимой всюду, кроме фиксированной квази-изолированной иррегулярной точки.

Введение

Известно, что функция φ, являющаяся решением обобщенной задачи Дирихле для пространственной области Ω с границей F и граничной функцией $f(Q)$ может иметь разрывы в так называемых иррегулярных точках границы F.

Исследованием характера этих разрывов и установлением критерия непрерывности функции φ занимался впервые М. Келдыш [4]. Применяя метод гармонических мажорант, он установил, что область неопределенности функции φ в иррегулярной точке P границы F лежит по одну сторону от величины $f(P)$.

Затем он выяснил, что колебание функции φ в иррегулярной точке есть, как и само решение φ, линейный функционал от f и, следовательно, по теореме Ф. Рисса может быть представлено интегралом Стильтьеса. Отсюда получается необходимое и достаточное условие для того, чтобы решение φ было непрерывно в точке P. Пользуясь терминологией М. Келдыша, мы будем говорить, что в этом случае задача Дирихле при граничных значениях f *разрешима* в точке P.

---

* Настоящая статья содержит доказательство части результатов, опубликованных в моей заметке в Докладах Ак. Наук СССР т. XXVIII, № 4, (1940), 291—293.

Наконец, М. Келдыш доказал очень интересную теорему о том, что для разрешимости задачи Дирихле во всех точках границы достаточно задать условия разрешимости на некотором счетном множестве иррегулярных точек. Однако характер этих точек и структура этого счетного множества точек, которое мы назовем *разрешающим множеством*, остался невыясненным.

В § 1 настоящей работы будет доказана теорема, которая позволит весьма простым путем получить указанные результаты М. Келдыша*.

В § 2 доказывается существование разрешающего множества, указывается способ его получения и вводится понятие квази-изолированной иррегулярной точки.

В § 3 доказывается основная теорема о том, что разрешающее множество необходимо содержит все квази-изолированные точки, а всякая иная точка может быть из него исключена.

§ 1

Будем рассматривать открытое множество Ω с ограниченной границей F. Множество иррегулярных точек границы будем обозначать через F_I, множество регулярных точек — через F_R. Распределение, получающееся в результате выметания массы 1 из точки P на F, будем называть массой Грина и обозначать через $\mu^P(e)$ [см. (5)].

ТЕОРЕМА I. *Пусть точки P_n $(n=1, 2, \ldots)$ из $\Omega+F$ стремятся к иррегулярной точке P и соответствующие им массы Грина $\mu^{P_n}(e)$ имеют некоторый предел $\nu(e)$. Тогда $\nu(e)$ состоит из массы $m \leqslant 1$, сосредоточенной в точке P, и непрерывного распределения $(1-m)\mu^P(e)$.*

Доказательство. Выясним, прежде всего, какой потенциал порождают массы $\nu(e)$. Потенциал $u_n(M)$ распределения μ^{P_n} равен $\frac{1}{P_nM}$ вне Ω и приблизительно всюду** (à peu près partout) на F. Следовательно, при $n \to \infty$ во всех этих точках $u_n \to \frac{1}{PM}$.

Опишем вокруг P сферу $s(\rho, P)$ радиуса ρ и разобьем каждый потенциал u_n на сумму двух потенциалов $u_n' + u_n''$, соответствующих массам μ^{P_n}, лежащим внутри $s(\rho, P)$ и вне ее (вместе с поверхностью $s(\rho, P)$). Часть массы μ^{P_n}, лежащую внутри $s(\rho, P)$, обозначим через $m_n^\rho \leqslant 1$.

Вследствие ограниченности всех потенциалов, начиная с некоторого, вне $s(\rho, P)$, масса $\nu(e)$ равна нулю на всяком множестве емкости нуль, лежащем вне $s(\rho, P)$. Поэтому, к потенциалам u_n'' применима следующая лемма, доказанная Брело (1):

Пусть распределения $\mu_1, \mu_2, \ldots$ с потенциалами $u_1, u_2, \ldots$ стремятся к распределению μ, причем $\mu=0$ на всяком множестве нулевой емкости. Тогда для потенциала u распределения μ имеем приблизительно всюду

$$u(P) = \underline{\lim}\, u_n(P).$$

* Эта теорема в несколько иной формулировке была независимо доказана О. Фростманом (3).

** Т. е. всюду, за возможным исключением множества нулевой емкости.

Таким образом, u''_n при $n \to \infty$ стремится приблизительно всюду к потенциалу v'', порожденному массами ν, лежащими вне $s(\rho, P)$.

С другой стороны, при достаточно малом ρ, потенциал $u'_n(M)$ в любой точке M, отличной от P, сколь угодно мало отличается от $\frac{m_n^\rho}{PM}$ и, значит, при достаточно большом n, от потенциала v', порожденного массами ν, лежащими внутри $s(\rho, P)$.

Итак, потенциал u_n при $n \to \infty$ стремится приблизительно всюду к потенциалу v масс ν. Поэтому $v(M) = \frac{1}{PM}$ вне Ω и приблизительно всюду на F.

Теперь легко показать, что распределение $\nu(e)$ имеет указанный вид. Действительно, пусть в распределении $\nu(e)$ в точке P сосредоточена масса $m \leqslant 1$. Если мы ее выметем на F_R, то потенциал вне Ω и приблизительно всюду на F не изменится, а всякое множество e на F, не содержащее P, получит дополнительный заряд, равный $m\mu^P(e)$. Сумма $\nu(e) + m\mu^P(e)$ вследствие единственности равна $\mu^P(e)$. Отсюда

$$\nu(e) = (1 - m)\, \mu^P(e).$$

Из этой теоремы без труда получается

ТЕОРЕМА II. (Келдыш). *Пусть $\varphi(M)$ есть решение обобщенной задачи Дирихле для множества Ω с граничными значениями $f(S)$, а P — иррегулярная точка границы. Тогда все предельные значения $\varphi(M)$ в точке P либо больше $f(P)$, либо меньше $f(P)$.*

Доказательство. По формуле Валле-Пуссена [см. ([6])]

$$\varphi(M) = \int_F f(S)\, d\mu^M(S).$$

Пусть a — некоторое предельное значение $\varphi(M)$ в P, а $P_1, P_2, \ldots$ есть последовательность точек из Ω, стремящаяся к P, для которой $\lim_{n\to\infty} \varphi(P_n) = a$. Извлекая из $P_1, P_2, \ldots$ последовательность $P'_1, P'_2, \ldots$, для которой распределения $\mu^{P'_n}(e)$ имеют предел $\nu(e)$, получим

$$a = \lim_{n\to\infty} \int_F f(S)\, d\mu^{P'_n}(S) = \int_F f(S)\, d\nu(S).$$

По теореме I

$$a = mf(P) + (1 - m) \int_F f(S)\, d\mu^P(S) \quad (m \leqslant 1).$$

Отсюда видно, что если

$$\int_F f(S)\, d\mu^P(S) \geqslant f(P),$$

то

$$a \geqslant f(P);$$

если же

$$\int_F f(S)\, d\mu^P(S) \leqslant f(P),$$

то

$$a \leqslant f(P).$$

Следствие. *Условие необходимое и достаточное для разрешимости задачи Дирихле в точке P состоит в том, чтобы*

$$f(P) = \int_F f(S)\, d\mu^P(S).$$

Покажем необходимость. В случае разрешимости $a = f(P)$ и

$$(1-m) f(P) = (1-m) \int_F f(S)\, d\mu^P(S) \quad (m \leqslant 1).$$

Так как, по предположению, точка P иррегулярна, то существует последовательность точек $P_1, P_2, \ldots \to P$, для которой $m < 1$. Поэтому

$$f(P) = \int_F f(S)\, d\mu^P(S).$$

Условие разрешимости может быть сформулировано так:

Для разрешимости задачи Дирихле в точке P необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(P_i) \to f(P)$ *для одной какой-либо иррегулярной последовательности точек* P_i.

Отсюда получается, между прочим, следующий критерий неразрешимости задачи Дирихле в иррегулярной точке P:

Если функция $f(S) \neq const$ *достигает в иррегулярной точке P своей нижней (или верхней) границы на F, то в этой точке P задача Дирихле неразрешима.*

Доказанная теорема и следствие из нее остаются справедливыми, если считать $f(S)$ непрерывной в P, вообще же ограниченной и непрерывной приблизительно всюду. Это следует из того, что формула Валле-Пуссена остается справедливой для таких функций [ср. Брело (2), (1)].

§ 2

Пусть последовательность иррегулярных точек $P_1, P_2, \ldots$ стремится к иррегулярной точке P и задача Дирихле разрешима в каждой точке этой последовательности. Это значит, что

$$f(P_n) = \int_F f(S)\, d\mu^{P_n}(S) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Извлекая последовательность, для которой μ^{P_n} сходятся к предельному распределению, и переходя к пределу, получаем

$$(1-m) f(P) = (1-m) \int_F f(S)\, d\mu^P(S).$$

Поэтому, если $m < 1$, то задача Дирихле будет разрешима и в P. Сомнительный случай представляется, таким образом, тогда, когда «степень иррегулярности» точек P_n неограниченно убывает с приближением к P. В следующем параграфе мы дадим необходимое условие для того, чтобы из разрешимости задачи в точках последовательности

$P_1, P_2 \dots$ следовала разрешимость в предельной точке P. Но уже данное достаточное условие позволяет нам доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА III. *Существует счетное множество D иррегулярных точек, обладающее тем свойством, что какова бы ни была непрерывная* граничная функция $f(S)$, разрешимость задачи Дирихле в точках D влечет за собой разрешимость ее во всех точках границы множества Ω.*

Доказательство. Обозначим через $\mu^P(r)$ величину массы Грина для точки P, лежащую внутри сферы $s(r, P)$, и зафиксируем r так, чтобы часть F, лежащая вне $s(r, P)$, имела всегда положительную емкость. Этого можно достичь, считая множество F приведенным, что не ограничивает общности, ибо на исключенном множестве, состоящем исключительно из иррегулярных точек, можно будет в качестве части разрешающего множества выбрать любое всюду плотное множество.

Пусть I_n $(n = 1, 2, \dots)$ — подмножество иррегулярных точек, для которых $\mu^P(r) \leqslant 1 - \frac{1}{2^n}$ **. Очевидно, $I_n \subset I_{n+1}$ и $F_I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

На каждом множестве I_n определим счетное всюду плотное на нем множество D_n. При этом D_n можно выбирать так, чтобы $D_n \subset D_{n+1}$. Множество $D = \lim\limits_{n\to\infty} D_n$ будет счетным и является искомым разрешающим множеством.

Действительно, пусть условие разрешимости задано во всех точках D. Для любой точки P из F_I найдется такое n, что $P \in I_n$. Выделим из D_n последовательность $P_1, P_2, \dots$, стремящуюся к P, и перейдем в равенстве

$$f(P_n) = \int_F f(S)\, d\mu^{P_n}(S)$$

* Или, более обще, ограниченная и непрерывная приблизительно всюду. Ясно, что в заключении теоремы речь будет итти о всех точках границы, где f непрерывна.

** При некоторых ограничениях, наложенных на границу F, можно доказать, что множества I_n замкнуты. Именно, допустим, что пересечение сферы $s(r, P)$ с F имеет нулевую емкость для всех точек P на F. Фростман (7) доказал, что $\mu^P(e)$, где e есть множество на F, имеющее положительное расстояние до P, является полунепрерывной сверху функцией от P. Возьмем δ настолько малым, что

$$\mu^{P'}[s(r+\delta, P)] - \mu^{P'}[s(r, P')] = \mu^{P'}[s(r+\delta, P)] - \mu^{P'}(r) < \varepsilon$$

при $P'P < \delta$. Тогда

$$1 - \mu^{P'}(r) - [1 - \mu^{P'}[s(r+\delta, P)]] = 1 - \mu^{P'}(r) - \mu^{P'}(e) < \varepsilon,$$

где $e = F - s(r+\delta, P)$ и по Фростману

$$1 - \mu^P(e) - \varepsilon' < 1 - \mu^{P'}(e) < \mu^{P'}(r) + \varepsilon.$$

Отсюда

$$1 - \mu^P(e) < \mu^{P'}(r) + \varepsilon + \varepsilon',$$

но

$$1 - \mu^P(e) = \mu^P[s(r+\delta, P)] > \mu^P(r),$$

поэтому $\mu^P(r) - (\varepsilon + \varepsilon') < \mu^{P'}(r)$ и $\mu^P(r)$ есть функция, полунепрерывная снизу относительно P. Поэтому множество точек, для которых $\mu^P(r) \leqslant k$, замкнуто.

к пределу при $n \to \infty$. Мы получим

$$(1-m) f(P) = (1-m) \int_F f(S) \, d\mu^P(S).$$

В силу того, что $D_n \subset I_n$ и в силу определения I_n мы обнаруживаем, что для предельного распределения распределений μ^{P_n} масса m, концентрирующаяся в P, во всяком случае не превосходит $1 - \frac{1}{2^n}$. Следовательно,

$$f(P) = \int_F f(S) \, d\mu^P(S),$$

и задача Дирихле разрешима в P.

Приведенное доказательство дает, однако, не только существование разрешающего множества D, но и некоторые сведения о характере этого множества.

Прежде всего, при нашем построении D в него попадут все точки, являющиеся изолированными для какого-либо из I_n. Здесь нужно различать два случая. Может случиться, что точка P, будучи изолированной для I_n, перестает быть таковой для I_m при достаточно большом m. В этом случае точка P при изменении конструкции D может в него и не попасть. Тогда достаточно начать построение D не с I_1, а с I_m.

Существенно отличается второй случай, когда точка P является изолированной для всех I_n. Тогда при любой модификации построения D точка P будет принадлежать ему. Действительно, возьмем произвольную числовую последовательность $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > \ldots > 0$, стремящуюся к нулю. Множества I_n иррегулярных точек, для которых $\mu^P(r) \leqslant 1 - \alpha_n$, могут с таким же успехом быть использованы для конструкции D. Легко видеть, однако, что для любого n можно найти такое m, что $I_n \subset I_m$ и $I'_n \subset I_m$. Отсюда следует, что если точка P является изолированной для всех I_n, то она будет изолированной для всех I'_n и обратно.

Эти точки P мы назовем *квази-изолированными иррегулярными точками*. Очевидно, что множество Q_I квази-изолированных иррегулярных точек содержит изолированные в обычном смысле иррегулярные точки.

Квази-изолированные иррегулярные точки можно охарактеризовать еще так: если $P \in Q_I$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек P' границы F внутри сферы $s(\delta, P)$, кроме P, имеет место неравенство

$$\mu^{P'}(r) > 1 - \varepsilon.$$

Покажем, что определение квази-изолированных точек не зависит от r. Заметим, во-первых, что если $P \in Q_I$, а последовательность иррегулярных точек $P_1, P_2, \ldots,$ сходящаяся к P, такова, что соответствующие распределения $\mu^{P_i}(e)$ стремятся к пределу, равному $(1-m)\mu^P(e)$ плюс масса m в P *, то $m = 1$ (такую последовательность для краткости

* Это требование, конечно, не существенно.

будем называть *особенной*). В противном случае, начиная с некоторого i, мы имели бы

$$\mu^{P_i}(r) < (1-m)\,\mu^P(2r) + m < 1-\alpha \qquad (\alpha > 0),$$

что противоречит квази-изолированности P.

Пусть, наоборот, всякая последовательность $P_1, P_2, \ldots$ точек F, стремящаяся к P, является особенной. Тогда P квази-изолирована. Действительно, иначе имелось бы такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $\delta_1 > \delta_2 > \ldots > 0$, стремящаяся к нулю, что внутри каждой сферы $s(\delta_i, P)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ существовала бы точка P_i границы F, отличная от P, для которой $\mu^{P_i}(r) < 1-\varepsilon$. Но эта последовательность $P_1, P_2, \ldots$, стремящаяся к P, создает противоречие с нашим предположением.

§ 3

Возникает вопрос, насколько обязательно присутствие квази-изолированных точек в заданном a priori разрешающем множестве D.

Если P — изолированная точка в обычном смысле, то она обязательно входит в D. Чтобы показать это, мы найдем граничную функцию $f(S)$, удовлетворяющую условию разрешимости во всех точках кроме P. Возьмем сферу $s(\rho, P)$, не содержащую внутри и на границе иррегулярных точек, кроме P, и рассмотрим бесконечную мажорирующую область $\Delta \supset \Omega$, граница которой состоит из части F, лежащей внутри $s(\rho, P)$, и части сферы $s(\rho, P)$, лежащей вне Ω. Положим всюду на границе Δ $f(S) = 1$. Решение задачи Дирихле для области Δ является функцией $\varphi(M)$ непрерывной в замкнутой области $\overline{\Delta}$ за исключением точки P. Если положить $\varphi(P) = 1$, то функция φ будет непрерывна на границе F множества Ω. Решение задачи Дирихле для Ω и этой функции φ совпадает с самой функцией φ всюду, кроме P. В точке P задача будет неразрешима, как это следует из критерия неразрешимости § 1.

Пусть теперь P — квази-изолированная иррегулярная точка. Вопрос, поставленный в начале этого параграфа, тесно связан с нахождением необходимых и достаточных условий для того, чтобы из разрешимости в точках последовательности $P_1, P_2, \ldots$, стремящейся к P, следовала разрешимость в P для всех граничных функций $f(S)$ (непрерывных в P, если речь идет о более широком классе функций; см. конец § 1).

ТЕОРЕМА IV. *Условие необходимое и достаточное для того, чтобы разрешимость задачи Дирихле в точках последовательности $P_1, P_2, \ldots$, стремящейся к P, влекла за собой разрешимость в P, состоит в том, чтобы последовательность $P_1, P_2, \ldots$ была особенной.*

Доказательство. Достаточность была доказана в § 2. Чтобы доказать необходимость, мы, предполагая последовательность $P_1, P_2, \ldots$, особенной, построим граничную функцию $f(S)$, непрерывную в P, так, чтобы имела место разрешимость во всех точках $P_1, P_2, \ldots$ и чтобы задача была неразрешима в P.

Будем исходить из замкнутого множества γ, являющегося пересече

нием внешности Ω с достаточно малой сферой с центром в P и будем считать, что все точки P_1, P_2, ... лежат на γ. Заметим, что:

1° если Q — граничная точка γ и $\varepsilon > 0$, то всегда можно выбрать столь малую сферу s с центром в Q, чтобы

$$\nu^{Q'}_{\gamma - s}(\gamma - s) > \mu^Q(\gamma) - \varepsilon \text{ *}$$

для всех точек Q' из s. Для этого сперва выбираем сферу s' так, чтобы

$$\nu^Q_{\gamma - s'} > \mu^Q(\gamma) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу непрерывности $\nu^Q_{\gamma - s'}$ относительно Q вне $\gamma - s'$, можно окружить Q столь малой сферой $s \subset s'$, что для любой точки Q' из s

$$|\nu^Q_{\gamma - s'}(\gamma - s') - \nu^{Q'}_{\gamma - s'}(\gamma - s')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, значит,

$$\nu^{Q'}_{\gamma - s'}(\gamma - s) > \mu^Q(\gamma) - \varepsilon,$$

если Q' лежит в s. Но так как

$$\nu^{Q'}_{\gamma - s}(\gamma - s) > \nu^{Q'}_{\gamma - s'}(\gamma - s'),$$

ибо $s \subset s'$ (последовательное выметание), то

$$\nu^{Q'}_{\gamma - s}(\gamma - s) > \mu^Q(\gamma) - \varepsilon$$

для любой точки Q' из s.

2° если снова s — сфера с центром в Q, а Q_1 — граничная точка γ, лежащая вне s, то сфера s_1 с центром Q_1 может быть выбрана настолько малой, чтобы

$$\nu^{Q'}_{\gamma - s - s_1}(\gamma - s - s_1) > \nu^{Q'}_{\gamma - s}(\gamma - s) - \varepsilon$$

для любой точки Q' в s. Это следует из того, что масса $\nu^{Q'}_{\gamma - s}(s_1)$, вследствие положительного расстояния от Q' до s_1, стремится к нулю равномерно вместе с емкостью s_1.

Заметим, кроме того, что если сфера s (соответственно s_1), обладает свойством, указанным в 1° (соответственно в 2°), то всякая концентрическая сфера меньшего радиуса тем более обладает им.

Приступим к конструкции. Возьмем последовательность положительных чисел ε_1, ε_2, ..., стремящуюся к нулю. Определим сферу s_1 с центром в P_1 так, чтобы

$$\nu^Q_{\gamma - s_1}(\gamma - s_1) > \mu^{P_1}(\gamma) - \varepsilon_1, \text{ если } Q \in s_1.$$

Сферу s_2 с центром в P_2 выберем так, чтобы

$$s_1 s_2 = 0,$$

$$\nu^Q_{\gamma - s_1 - s_2}(\gamma - s_1 - s_2) > \mu^{P_1}(\gamma) - \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}, \text{ если } Q \in s_1 \text{ (по 2°)},$$

$$\nu^Q_{\gamma - s_2}(\gamma - s_2) > \mu^{P_2}(\gamma) - \varepsilon_2, \qquad \text{если } Q \in s_2,$$

$$\nu^Q_{\gamma - s_2}(s_1) < \mu^{P_2}(s_1) + \varepsilon_2, \qquad \text{если } Q \in s_2 \text{ **}.$$

---

* Внизу указано множество, на которое производится выметание.

** Возможность такого выбора доказывается, как 1°.

Сферу s_3 с центром в P_3 выберем так, чтобы

$$s_3(s_1+s_2)=0,$$

$$\nu^Q_{\gamma-s_1-s_2-s_3}(\gamma-s_1-s_2-s_3) > \mu^{P_1}(\gamma)-\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_1}{2^2}, \quad \text{если } Q\in s_1,$$

$$\nu^Q_{\gamma-s_2-s_3}(\gamma-s_2-s_3) > \mu^{P_2}(\gamma)-\varepsilon_2-\frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \text{если } Q\in s_2,$$

$$\nu^Q_{\gamma-s_3}(\gamma-s_3) > \mu^{P_3}(\gamma)-\varepsilon_3, \quad \text{если } Q\in s_3,$$

$$\nu^Q_{\gamma-s_2-s_3}(s_1) < \mu^{P_2}(s_1)+\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \text{если } Q\in s_2,$$

$$\nu^Q_{\gamma-s_3}(s_1+s_2) < \mu^{P_3}(s_1+s_2)+\varepsilon_3, \quad \text{если } Q\in s_3.$$

Продолжая неограниченно выбор s_i по указанному принципу и обозначив $M=\sum_{i=1}^{\infty} s_i$ (это открытое множество), мы обнаружим, что

$$\left.\begin{array}{ll}
\nu^Q_{\gamma-M}(\gamma-M) > \mu^{P_1}(\gamma)-2\varepsilon_1, & \text{если } Q\in s_1,\\
\nu^Q_{\gamma-M+\gamma s_1}(\gamma-M+s_1) > \mu^{P_2}(\gamma)-2\varepsilon_2, & \text{если } Q\in s_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\nu^Q_{\gamma-M+\gamma\sum_1^{n-1}s_i}\left(\gamma-M+\sum_1^{n-1}s_i\right) > \mu^{P_n}(\gamma)-2\varepsilon_n, & \text{если } Q\in s_n,\\
\dots\dots\dots\dots\dots &
\end{array}\right\} \quad (A)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\nu^Q_{\gamma-M+\gamma s_1}(s_1) < \mu^{P_2}(s_1)+2\varepsilon_2, & \text{если } Q\in s_2,\\
\nu^Q_{\gamma-M+\gamma s_1+\gamma s_2}(s_1+s_2) < \mu^{P_3}(s_1+s_2)+2\varepsilon_3, & \text{если } Q\in s_3,\\
\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\nu^Q_{\gamma-M+\gamma\sum_1^{n-1}s_i}\left(\sum_1^{n-1}s_i\right) < \mu^{P_n}\left(\sum_1^{n-1}s_i\right)+2\varepsilon_n, & \text{если } Q\in s_n,\\
\dots\dots\dots\dots\dots &
\end{array}\right\} \quad (B)$$

Обозначим $\mu^{P_n}(s_i)+2\varepsilon_n=a_n^i$. Чтобы получить величину $\nu_{\gamma-M}(\gamma-M)$, когда Q в s_2, нужно массы $\nu^Q_{\gamma-M+\gamma s_1}(s_1)$ вымести на $\gamma-M$. Так как их величина меньше a_2^1, то, в силу первого неравенства (A), потеря масс при этом выметании будет меньше, чем $a_2^1(1-\mu^{P_1}(\gamma)+2\varepsilon_1)$. Следовательно,

$$\nu^Q_{\gamma-M}(\gamma-M) > \mu^{P_2}(\gamma)-2\varepsilon_2-a_2^1(1-\mu^{P_1}(\gamma)+2\varepsilon_1),$$

когда Q в s_2. Чтобы получить $\nu_{\gamma-M}(\gamma-M)$, когда Q в s_3, нужно массы $\nu^Q_{\gamma-M+\gamma s_1+\gamma s_2}(s_1+s_2)$ вымести на $\gamma-M$. При выметании той части, которая лежит в s_1, потеря масс не превзойдет $a_3^1(1-\mu^{P_1}(\gamma)+2\varepsilon_1)$, а потеря при выметании s_2 будет не больше

$$a_3^2[1-\mu^{P_2}(\gamma)+2\varepsilon_2+a_2^1(1-\mu^{P_1}(\gamma)+2\varepsilon_1)]=$$
$$=a_3^2(1-\mu^{P_2}(\gamma)+2\varepsilon_2)+a_3^2a_2^1(1-\mu^{P_1}(\gamma)+2\varepsilon_1).$$

Общая потеря, таким образом, будет меньше

$$(a_3^1+a_3^2a_2^1)(1-\mu^{P_1}(\gamma)+2\varepsilon_1)+a_3^2(1-\mu^{P_2}(\gamma)+2\varepsilon_2)$$

и

$$\nu^Q_{\gamma-M}(\gamma-M)>\mu^{P_3}(\gamma)-2\varepsilon_3-(a_3^1+a_3^2a_2^1)(1-\mu^{P_1}(\gamma)+2\varepsilon_1)-$$
$$-a_3^2(1-\mu^{P_2}(\gamma)+2\varepsilon_2),$$

когда Q в s_3.

Продолжая последовательно этот подсчет, мы убеждаемся, что при переходе от $\nu^Q_{\gamma-M+\gamma\sum\limits_1^{n-1}s_i}\left(\gamma-M+\sum\limits_1^{n-1}s_i\right)$ к $\nu^Q_{\gamma-M}(\gamma-M)$, когда Q в s_n, потеря масс может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^{n-1}(1-\mu^{P_i}(\gamma)+2\varepsilon_i)A^i_n,$$

где

$$A_n=a^i_n+\sum_{n>k>i}a^k_na^i_k+\sum_{n>k>l>i}a^k_na^l_ka^i_l+\ldots+a^{n-1}_na^{n-2}_{n-1}\ldots a^i_{i+1}.$$

Покажем, что надлежащим выбором величин a^i_n, достижимым возможным уменьшением сфер s_i, можно добиться того, что суммы $\sum\limits_{i=1}^{n-1}A^i_n$ будут равномерно ограничены. Заметим, что для любого $\alpha>0$ и для фиксированной точки P_k сфера s_k может быть выбрана столь малой, что $a^k_n<\alpha$ для всех $n>k$ (число ε_n, фигурирующее в определении a^k_n, можно, в случае необходимости, уменьшить так, чтобы $2\varepsilon_n<\alpha$).

Выпишем несколько первых сумм:

$$A^1_2=a^1_2,$$

$$\sum_{i=1}^{2}A^i_3=a^1_3+a^2_3+a^2_3a^1_2,$$

$$\sum_{i=1}^{3}A^i_4=a^1_4+a^2_4+a^2_4a^1_2+a^3_4+a^3_4a^1_3+a^3_4a^2_3+a^3_4a^2_3a^1_2,$$

$$\sum_{i=1}^{4}A^i=a^1_5+a^2_5+a^2_5a^1_2+a^3_5+a^3_5a^1_3+a^3_5a^2_3+a^3_5a^2_3a^1_2+a^4_5+a^4_5a^3_4+$$
$$+a^4_5a^2_4+a^4_5a^3_4a^2_3+a^4_5a^2_4a^1_2+a^4_5a^3_4a^1_3+a^4_5a^3_4a^2_3a^1_2.$$

Теперь видно, что нужно сделать для ограниченности всех сумм. Заменим s_1 меньшей сферой s'_1 так, чтобы $a^1_n<\alpha<1$ для всех $n>1$. Затем заменим s_2 меньшей сферой s'_2 так, чтобы $a^2_n+a^2_na^1_2<\alpha^2$ для всех $n>2$. Сферу s_3 заменим меньшей сферой s'_3 так, чтобы $a^3_n+a^3_na^1_3+a^3_na^2_3+a^3_na^2_3a^1_2<\alpha^3$ для всех $n>3$ и т. д.

Тогда, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n-1}A^i_n<\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^{n-1}<\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Теперь можно доказать, что потеря масс

$$\sum_{i=1}^{n-1} (1 - \mu^{P_i}(\gamma) + 2\varepsilon_i) A_n^i$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Для любого $\eta > 0$ можно найти такое m, что $1 - \mu^{P_i}(\gamma) + 2\varepsilon_i < \eta$ при $i > m$, так как последовательность $P_1, P_2, \ldots$ — особенная, а $\varepsilon_i \to 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n-1} (1 - \mu^{P_i}(\gamma) + 2\varepsilon_i) A_n^i = \sum_{i=1}^{m} (1 - \mu^{P_i}(\gamma) + 2\varepsilon_i) A_n^i +$$
$$+ \sum_{i=m+1}^{n-1} (1 - \mu^{P_i}(\gamma) + 2\varepsilon_i) A_n^i < \sum_{i=1}^{m} A_n^i + \eta \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Выбирая теперь n достаточно большим, можно достичь того, что $\sum_{i=1}^{m} A_n^i < \eta$ (опять-таки вследствие особенности $P_1, P_2, \ldots$). Окончательно

$$\sum_{i=1}^{n-1} (1 - \mu^{P_i}(\gamma) + 2\varepsilon_i) A_n^i < \eta \frac{1}{1-\alpha}$$

при достаточно большом n, что доказывает утверждение.

Итак, обозначив через M' открытое множество $\sum_{i=1}^{\infty} s_i'$, мы видим, что

$$\left.\begin{array}{ll} \nu^Q_{\gamma-M'}(\gamma - M') > \mu^{P_1}(\gamma) - (\varepsilon_1), & \text{если } Q \in s_1', \\ \nu^Q_{\gamma-M'}(\gamma - M') > \mu^{P_2}(\gamma) - (\varepsilon_2), & \text{если } Q \in s_2', \\ \nu^Q_{\gamma-M'}(\gamma - M') > \mu^{P_3}(\gamma) - (\varepsilon_3), & \text{если } Q \in s_3', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \nu^Q_{\gamma-M'}(\gamma - M') > \mu^{P_n}(\gamma) - (\varepsilon_n), & \text{если } Q \in s_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right\} \qquad (C)$$

где (ε_n) — величина, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$.

После этого доказательство завершается быстро. Во всех граничных точках $\gamma - M'$ зададим граничную функцию равной 1 и рассмотрим решение внешней задачи Дирихле, которое обозначим через $\varphi(Q)$. По формуле Валле-Пуссена

$$\varphi(Q) = \int_{\gamma - M'} d\nu^Q_{\gamma-M'} = \nu^Q_{\gamma-M'}(\gamma - M').$$

Определим теперь на границе F множества Ω граничную функцию $f(Q)$ следующим образом: во всех точках F, не принадлежащих границе $\gamma - M'$, положим

$$f(Q) = \varphi(Q) = \nu^Q_{\gamma-M'}(\gamma - M'),$$

а во всех остальных точках F положим $f(Q) = 1$. $f(Q)$ непрерывна в P, как это следует из неравенств (C) и из того, что $\mu^{P_n}(\gamma) \to 1$ при $n \to \infty$.

Задача Дирихле, очевидно, разрешима во всех точках $P_1, P_2, \ldots$ и неразрешима в P. Последнее следует из критерия неразрешимости § 1.

Изменяя несколько конструкцию предыдущего доказательства, мы получим положительное решение вопроса, поставленного в начале § 3, и докажем теорему:

ТЕОРЕМА V. *Всякое разрешающее множество D содержит множество Q_I квази-изолированных точек.*

Предварительно докажем леммы, аналогичные свойствам 1°, 2° в доказательстве теоремы IV.

ЛЕММА I. *Пусть на границе γ имеется счетное множество e. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество O, заключающее e, что*

$$\nu^Q_{\gamma-O}(\gamma - O) > m - \varepsilon$$

для всякой точки Q из O, где $m = \inf\limits_{Q \in e} \mu^Q(\gamma)$.

Прежде всего, существует такое r, не зависящее от точки $P \in \bar{e}$, что в сфере $s = s(r)$ с центром в P радиуса r

$$\nu^Q_{\gamma-s}(\gamma - s) > m - \varepsilon \quad (Q \in s).$$

В противном случае при данном $\varepsilon > 0$ существует последовательность сфер $s_1, s_2, \ldots$ с центрами в граничных точках $P_1, P_2, \ldots$ и с радиусами, неограниченно убывающими, для которых

$$\nu^Q_{\gamma-s_n}(\gamma - s_n) \geqslant m - \varepsilon \quad (Q \in s_n),$$

причем в большей сфере это не имеет места.

Пусть P — предельная точка $P_1, P_2, \ldots$ Окружим P сферой s, для которой

$$\nu^Q_{\gamma-s}(\gamma - s) > \mu^P(\gamma) - \varepsilon > m - \varepsilon$$

(см. 1° в доказательстве теоремы IV).

При достаточно большом n s_n лежит внутри s и

$$\nu^Q_{\gamma-s_n}(\gamma - s_n) > \nu^Q_{\gamma-s}(\gamma - s) \quad (Q \in s_n).$$

Следовательно, можно увеличить радиус s_n, не нарушив неравенства $\nu^Q_{\gamma-s_n}(\gamma - s_n) \geqslant m - \varepsilon$, что противоречит предположению.

Чтобы построить множество O, отвечающее условиям леммы при данном ε, определим указанным только что образом число r, соответствующее $\frac{\varepsilon}{2}$, и выберем η так, чтобы $\frac{\eta}{r-\eta} < \frac{\varepsilon}{2}$. Окружим каждую точку из e сферой s_i, причем выберем их так, чтобы сумма их радиусов была меньше η. Тогда емкость множества $O = \sum s_i$ будет подавно меньше η.

Далее,

$$\nu^Q_{\gamma-O}(\gamma - O) > \nu^Q_{\gamma-O-s(r)}(\gamma - O - s(r)) \quad (Q \in s_i).$$

Так как расстояние от Q до $O - s(r)$ не меньше $r - \eta$, то

$$\nu^Q_{\gamma-O-s(r)}(\gamma - O - s(r)) > \nu^Q_{\gamma-s(r)}(\gamma - s(r)) -$$

$$- \frac{\eta}{r-\eta} > m - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = m - \varepsilon \quad (Q \in s_i),$$

что и доказывает лемму, ибо s_i — произвольная сфера из O.

ЛЕММА II. *Пусть на границе* γ *имеется счетное множество* e *и окружающее его открытое множество* O. *Пусть, кроме того, дано счетное множество граничных точек* e_1 *на положительном расстоянии от* O. *Тогда существует такое открытое множество* O_1, *заключающее* e_1, *что*

$$\nu^Q_{\gamma-O-O_1}(\gamma-O-O_1)>\nu^Q_{\gamma-O}(\gamma-O)-\varepsilon \quad (Q\in O).$$

Для доказательства достаточно применить то же рассуждение, что и в 2° в доказательстве теоремы IV.

ЛЕММА III. *При условиях леммы II множество* O_1 *можно выбрать так, чтобы*

$$\nu^Q_{\gamma-O_1}(O)<p+\varepsilon \quad (Q\in O_1),$$

где

$$p=\sup_{Q\in e_1}\mu^Q(O).$$

Доказывается эта лемма аналогично лемме I. При данном $\varepsilon>0$ таким же образом обнаруживается существование такого r, не зависящего от положения точки P в $\bar{e}_1$, что

$$\nu^Q_{\gamma-s}(O)<p+\varepsilon \quad (Q\in s),$$

где s — сфера с центром P радиуса r. Затем берем r, соответствующее $\frac{\varepsilon}{2}$, выбираем η так, чтобы $\frac{\eta}{r-\eta}<\frac{\varepsilon}{2}$, и окружаем каждую точку $P_i\in e_1$ сферой s_i так, чтобы сумма радиусов всех s_i была $<\eta$. Обозначим $O_1=\sum s_i$. Тогда

$$\nu^Q_{\gamma-O_1}(O)<\nu^Q_{\gamma-O_1-s(r)}(O)<\nu^Q_{\gamma-s(r)}(O)+\frac{\eta}{r-\eta}<p+\varepsilon \quad (Q\in s_i).$$

Заметим, что множество O, заключающее e, можно выбрать так, чтобы величина p была сколь угодно малой.

ЛЕММА IV. *Пусть* e *означает счетное множество граничных точек* γ *и допустим, что имеется другое счетное множество граничных точек* e_1, *причем* $\bar{e}\bar{e}_1=0$. *Тогда* e *можно окружить таким открытым множеством* $O\,(Oe_1=O)$, *что*

$$\nu^Q_{\gamma-O}(\gamma-O)>m-\varepsilon \quad (Q\in e_1),$$

где

$$m=\inf_{Q\in e_1}\mu^Q(\gamma).$$

Рассмотрим точки e, расстояние которых до e_1 больше $\frac{1}{2}$. Их можно заключить в такое множество сфер O^1, что

$$\nu^Q_{\gamma-O^1}(\gamma-O^1)>m-\frac{\varepsilon}{2} \quad (Q\in e_1).$$

Затем рассматриваем точки из e, расстояние которых до e_1 больше $\frac{1}{2^2}$, но не больше $\frac{1}{2}$, и заключаем их в такое множество сфер O^2, что

$$\nu^Q_{\gamma-O^1-O^2}(\gamma-O^1-O^2)>m-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2^2} \quad (Q\in e_1).$$

Продолжая, мы получим открытое множество $O = O^1 + O^2 + \ldots$, удовлетворяющее условиям леммы.

Доказательство теоремы V. Покажем теперь, как нужно изменить доказательство теоремы IV, чтобы построить граничную функцию, для которой задача Дирихле будет разрешима во всех точках счетного множества D и не будет разрешима в квази-изолированной точке P.

Будем исходить из замкнутого множества γ, являющегося пересечением дополнения к Ω с замкнутой сферой k с центром в P, и предположим, что все точки D лежат на γ. Построим последовательность сфер $k_1, k_2, k_3, \ldots$ концентрических с k, радиусы которых стремятся к нулю, так, чтобы на их поверхностях не было точек D. Тогда D разобьется на счетное множество $e_1, e_1', e_2, e_2', e_3, e_3', \ldots$ счетных множеств, состоящих из точек D, лежащих соответственно между k и k_1, k_1 и k_2, k_2 и k_3, и т. д. При этом

$$\bar{e}_i \bar{e}_k = 0 \quad \text{и} \quad \bar{e}_i' \bar{e}_k' = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k$$

и

$$\bar{e}_k \bar{e}_k' = 0, \quad \bar{e}_k e_k' = 0, \quad e_k \bar{e}_{k-1}' = 0, \quad \bar{e}_k e_{k-1}' = 0.$$

Обозначим еще

$$m_i = \inf_{Q \in \bar{e}_i} \mu^Q(\gamma), \qquad m_i' = \inf_{Q \in \bar{e}_i'} \mu^Q(\gamma).$$

Вследствие квази-изолированности P $m_i \to 1$ и $m_i' \to 1$ при $i \to \infty$.

Леммы I, II, III позволяют точно повторить доказательство теоремы IV, заменяя P_i на e_i (или на e_i'), а сферы s_i—множествами O_i. В результате мы получим открытое множество $M = \sum O_i$, содержащее $e_1 + e_2 + e_3 + \ldots$ (или $e_1' + e_2' + e_3' + \ldots$), причем

$$\left.\begin{array}{ll} \nu^Q_{\gamma - M}(\gamma - M) > m_1 - (\varepsilon_1), & \text{если } Q \in O_1, \\ \nu^Q_{\gamma - M}(\gamma - M) > m_2 - (\varepsilon_2), & \text{если } Q \in O_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \nu^Q_{\gamma - M}(\gamma - M) > m_n - (\varepsilon_n), & \text{если } Q \in O_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right\} \qquad \text{(D)}$$

где $(\varepsilon_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Можно считать, конечно, что $M \cdot (e_1' + e_2' + e_3' + \ldots) = 0$ (соответственно $M \cdot (e_1 + e_2 + e_3 + \ldots) = 0$).

При помощи леммы IV мы можем такой же метод применить для доказательства следующего предложения:

ЛЕММА V. *Счетное множество $e_1 + e_2 + e_3 + \ldots$ можно заключить в такое открытое множество N, не имеющее общих точек с $e_1' + e_2' + e_3' + \ldots$, что если*

$$n_i' = \inf_{Q \in \bar{e}_i'} \nu^Q_{\gamma - N}(\gamma - N),$$

то при $i \to \infty$ $n_i' \to 1$ (не совсем точно это можно выразить так: *после удаления N точка P остается квази-изолированной*).

Действительно, окружим e_1 открытым множеством O_1 так, чтобы

$$O_1 e_1' = 0,$$

$$\nu^Q_{\gamma - O_1}(\gamma - O_1) > m_1' - \varepsilon_1, \quad \text{если} \quad Q \in e_1'.$$

Окружим затем e_2 открытым множеством O_2 так, чтобы

$$O_2(e_1'+e_2')=0,$$

$$\nu^Q_{\gamma-O_1-O_2}(\gamma-O_1-O_2)>m_1'-\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1}{2},\quad \text{если } Q\in e_1',$$

$$\nu^Q_{\gamma-O_2}(\gamma-O_2)>m_2'-\varepsilon_2,\quad \text{если } Q\in e_2',$$

$$\nu^Q_{\gamma-O_2}(O_1)<p_2^1+\varepsilon_2,\quad \text{если } Q\in e_2',$$

где $p_2^1=\sup\limits_{Q\in e_2'}\mu^Q(O_1)$ (ср. лемму III).

Затем окружим e_3 открытым множеством O_3 так, чтобы

$$O_3(e_2'+e_3')=0,$$

$$\nu^Q_{\gamma-O_1-O_2-O_3}(\gamma-O_1-O_2-O_3)>m_1'-\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_1}{2^2},\quad \text{если } Q\in e_1',$$

$$\nu^Q_{\gamma-O_2-O_3}(\gamma-O_2-O_3)>m_2'-\varepsilon_2-\frac{\varepsilon_2}{2},\quad \text{если } Q\in e_2',$$

$$\nu^Q_{\gamma-O_3}(\gamma-O_3)>m_3'-\varepsilon_3,\quad \text{если } Q\in e_3',$$

$$\nu^Q_{\gamma-O_2-O_3}(O_1)<p_2^1+\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_2}{2},\quad \text{если } Q\in e_2',$$

$$\nu^Q_{\gamma-O_3}(O_1+O_2)<p_3^1+p_3^2+\varepsilon_3,\quad \text{если } Q\in e_3',$$

где $p_3^1=\sup\limits_{Q\in e_3'}\mu^Q(O_1)$, а $p_3^2=\sup\limits_{Q\in e_3'}\mu^Q(O_2)$.

Эта конструкция совершенно аналогична конструкции, употребленной при доказательстве теоремы IV, и поэтому доказательство заканчивается так же.

Заметим, что пересечение NM удовлетворяет одновременно условиям (D) и лемме V.

Возьмем теперь множество $N\supset e_1+e_2+e_3+\ldots$, удовлетворяющее условиям леммы V. Тогда множества e_1', e_2', ... можно будет заключить в открытое множество $M'=O_1'+O_2'+O_3'+\ldots$ так, чтобы

$$\nu^Q_{\gamma-N-M'}(\gamma-N-M')>n_1'-(\varepsilon_1),\quad \text{если } Q\in O_1',$$

$$\nu^Q_{\gamma-N-M'}(\gamma-N-M')>n_2'-(\varepsilon_2),\quad \text{если } Q\in O_2',$$

. . . .

$$\nu^Q_{\gamma-N-M'}(\gamma-N-M')>n_n'-(\varepsilon_n),\quad \text{если } Q\in O_n',$$

. . . .

Заменяя, если нужно, M' его подмножеством, мы можем считать его удовлетворяющим условиям леммы V относительно $e_1'+e_2'+\ldots$, т. е. таким, что $n_i\to 1$ при $i\to\infty$, где $n_i=\inf\limits_{Q\in\bar e_i}\nu_{\gamma-M'}(\gamma-M')$. Тогда и $N=$ $=O_1+O_2+\ldots$ можно заменить его подмножеством так, чтобы

$$\nu^Q_{\gamma-M'-N}(\gamma-M'-N)>n_1-(\varepsilon_1),\quad \text{если } Q\in O_1,$$

$$\nu^Q_{\gamma-M'-N}(\gamma-M'-N)>n_2-(\varepsilon_2),\quad \text{если } Q\in O_2,$$

. . . .

$$\nu^Q_{\gamma-M'-N}(\gamma-M'-N)>n_n-(\varepsilon_n),\quad \text{если } Q\in O_n,$$

. . . .

Теперь достаточно положить в граничных точках $\gamma-N-M'$ $f(S)=1$ и решить внешнюю задачу Дирихле, чтобы построить искомую функцию. Теорема доказана.

Харьковский институт математики

Поступило 6. VIII. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Brelot M., Sur le potentiel et les suites de fonctions sous-harmoniques, Comptes Rendus, t. 207, (1938), 836—838.

[2] Brelot M., Familles de Perron et problème de Dirichlet, Acta Szeged, t. IX (1939), 133—153.

[3] Frostman O., Les points irrêguliers dans la théorie du potentiel et le critère de Wiener, Meddelanden fran Lunds Univ. Matem. Sem., Bd 4 (1939), 1—10.

[4] Келдыш М., О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Доклады Ак. Наук СССР, т. XVIII, № 6 (1938), 315—318.

[5] Riesz M., Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, Acta Szeged, t. IX (1938), 116—118.

[6] La Vallée Poussin Ch., Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet, Paris, 1937.

[7] Frostman O., Sur le balayage des masses, Acta Szeged, t. IX (1938), 43—51.

N. LANDKOFF. SUR LA RÉSOLUBILITÉ DU PROBLÈME DE DIRICHLET GÉNÉRALISÉ

RÉSUMÉ

Nous considérons la solution $\varphi(M)$ du problème de Dirichlet généralisé pour un ensemble ouvert Ω dans l'espace à trois dimensions, dont la frontière F est bornée, et la fonction $f(Q)$ donnée sur la F, qui est bornée et continue à peu près partout. Nous dirons que ce problème est résoluble au point irrégulier Q, si la solution $\varphi(M)$ est continue à ce point.

Dans le § 1 nous démontrons le théorème suivant, qui a été obtenu (pour les points intérieurs) indépendement par O. Frostman ([3]).

THÉORÈME I. Supposons que les points $P_1, P_2, \ldots$ de $\Omega + F$ tendent vers le point irrégulier P et les masses de Greeen $\mu^{P_n}(e)$, qui leur correspondent, possèdent une certaine limite $\nu(e)$. Alors $\nu(e)$ est formé d'une masse $m \leqslant 1$ concentrée au point P et de la distribution continue $(1-m)\varphi^P(e)$.

Les résultats dues à M. Keldych ([4]) s'en suivent facilement.

Dans le § 2 nous démontrons le

THÉORÈME III. *Il existe un ensemble dénombrable D de points irréguliers tel que la résolubilité du problème de Dirichlet aux points de D entraîne toujours la résolubilité partout.*

L'existence d'un tel ensemble résolvant D a été decouvert par M. Keldych ([4]). Mais notre démonstration est constructies et permet d'en tirer des propriétés importantes relatives à cet ensemble.

Une suite $P_1, P_2, \ldots$ de points irréguliers, pour laquelle les masses μ^{P_n} convergent et $m=1$, sera dite *singulière*. Si chaque suite de points irréguliers convergeant vers Q est singulière nous appellerons le point Q *quasi-isolé*.

Dans le § 3 nous démontrons deux théorèmes principaux de cet article:

THÉORÈME IV. *Pour que la résolubilité du problème de Dirichlet en tous les points $P_1, P_2, \ldots$ d'une suite tendante vers P entraîne toujours la résolubilité en P, il est nécessaire et suffisant que la suite ne soit pas singulière.*

THÉORÈME V. *Chaque ensemble résolvant D contient tous les points quasi-isolés. Chaque autre point peut être exclu de D.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 197—262 Série mathématique

To the memory of my killed brothers

PAUL TURAN

ON RIEMANN'S HYPOTHESIS*

(*Communicated by* **I. Vinogradov**, *Member of the Academy*)

In this paper we give necessary and sufficient conditions for the validity of the quasi-riemannian hypothesis. The advantage of our conditions over those obtained before consists in the fact that the validity of our conditions can be established by means of estimations for some trigonometrical sums independently of the whole theory of ζ-function.

Chapter I

1.1. More that eighty years ago appeared the celebrated memoir of Riemann ([1]) in which he discovered the wonderful connection between prime-numbers and the roots of the meromorphic function $\zeta(s)$ defined on the complex $s=\sigma+it$-plane for $\sigma>1$ by

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots \tag{1.1.1}$$

As it is well-known this work contained a number of courageous statements with unsufficient proofs; the efforts to complete them have brought such results as the modern theory of integral functions. All of these statements have been proved in the mean-time except one. This statement — the famous riemannian hypothesis — tells that all roots of $\zeta(s)$ in the «critical» strip $0\leqslant\sigma\leqslant1$ lie on the line $\sigma=\frac{1}{2}$. Taking in account Euler's identity valid for $\sigma>1$

$$\zeta(s)=\prod_{p\text{ primes}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \tag{1.1.2}$$

(p denotes throughout this paper the primes) this hypothesis may be formulated as

$$\zeta(s)\neq0\qquad\sigma>\frac{1}{2}. \tag{1.1.3}$$

---

* Some of the results contained in this paper (theorems III and IV) have been presented before the Mathematical Association in Budapest in 7 Febr. 1944. The reading of this paper does not suppose the knowledge of special papers only the fundamental facts of the theory.

This hypothesis is up to now unproved as well as the following weaker one which states that there is a *numerically given* ϑ_1 with $\frac{1}{2} < \vartheta_1 < 1$ such that

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ for } \sigma < \vartheta_1. \tag{1.1.4}$$

1.2. One of the consequences of Riemann's hypothesis, as he observed in essential, refers to the error-term of the prime-number-formula, i. e. to

$$\Delta(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{dv}{\ln v}, \tag{1.2.1}$$

where $\pi(x)$ as usual denotes the number of primes $\leqslant x$. As H. van Koch(2) rigorously proved if Riemann's hypothesis is true then there is a numerical a_1 such that

$$|\Delta(x)| \leqslant a_1 \sqrt{x} \ln^2 x; \tag{1.2.2}$$

as he showed the weaker hypothesis (1.1.4) would give

$$|\Delta(x)| \leqslant a_1 x^{\vartheta_1} \ln^2 x. \tag{1.2.3}$$

In most of the applications of the estimations it would be sufficient to know a *numerically given* ϑ_2 with $\frac{1}{2} \leqslant \vartheta_2 < 1$ and of the property that in the half-plane $\sigma > \vartheta_2$ $\zeta(s)$ has only a finite number of roots. This would of course imply the *existence* of a ϑ_3 with $\frac{1}{2} \leqslant \vartheta_3 < 1$ (*without the numerical value* of this ϑ_3) such that $\zeta(s) \neq 0$ for $\sigma > \vartheta_3$. The hypothesis of the existence of the above ϑ_2 which is a slightly weaker than the hypothesis (1.1.4) we shall call—following L. Kalmér - the quasi-riemannian hypothesis.

As far as I know there are in the literature no methods for attempting this hypothesis without attempting at the same time the hypothesis (1.1.4). To treat this quasi-riemannian hypothesis, to give for it a necessary and sufficient condition with new methods, is the aim of this paper.

1.3. Among the rich literature which deals with the forms (1.1.3) and (1.1.4) of Riemann's hypothesis and is mainly due to H. Bohr, Carlson, Hadamard, Hardy, Landau, Littlewood, Polya, de la Vallée-Poussin, Siegel and recently to Ingham and A. Selberg, I will mention only one kind of papers concerning various arithmetical or function-theoretical criteria for the truth of (1.1.3) or (1.1.4). The most remarkable of these is that of Littlewood(3) which gives as a necessary and sufficient condition for the truth of (1.1.3)

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1/2-\varepsilon} \sum_{n\leq x} \mu(n) = 0 \tag{1.3.1}$$

where $\varepsilon > 0$ is a fixed but arbitrary small number and $\mu(n)$ denotes the well-known Moebius-function ($=0$ if n has at least one quadratic divi-

sor > 1 and $(-1)^r$ if $n = p_1 p_3 \dots p_r$). Similary for the truth of (1.1.4) is necessary and sufficient that

$$\lim_{x \to \infty} x^{-\vartheta_1 - \epsilon} \sum_{n \leq x} \mu(n) = 0. \tag{1.3.2}$$

But the fact is — and this is characteristic for every result in this direction – that we have neither for examining of (1.3.1) nor for that of (1.3.2) any method independent of the theory of the zeta-function.

The necessary and sufficient conditions which I obtained for the truth of the quasi-riemannian hypothesis do not have this disadvantage, it can be treated with the ingenious new methods of Vinogradov ([4]) which are entirely independent of the theory of zeta-function. More exactly I will prove

THEOREM I. *For the truth of the quasi-riemannian hypothesis, i. e. for the existence of a* ϑ_2 *with* $\frac{1}{2} \leqslant \vartheta_2 < 1$ *such that* $\zeta(s) = 0$ *has in the half-plane* $\sigma \geqslant \vartheta_2$ *a finite number of roots, is necessary and sufficient the existence of numerical constants* a_2 *and* a_3 *such that for* $t > 0$,

$$a_2 \leqslant t^{10} \leqslant \frac{N}{2} < N' < N'' \leqslant N \tag{1.3.3}$$

the inequality

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it \ln p} \right| \leqslant a_3 \frac{N e^{23(\ln\ln N)^2}}{\sqrt{t}} \tag{1.3.4}$$

be true.

The inequality (1.3.4) is obviously satisfied for $N > e^{\sqrt{t}}$ since for $N \geqslant 100$

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it \ln p} \right| < \pi(N) < \frac{2N}{\ln N} < \frac{2N}{\sqrt{t}} < \frac{N e^{23(\ln\ln N)^2}}{\sqrt{t}}.$$

In the appendix I will show (corollary I, II, III of theorem XII) how Vinogradov's method leads to the proof of the following inequalities

1. For $-\frac{3}{4} \leqslant \gamma \leqslant 1$ and $e^{16000} \leqslant t^{10} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$ we have

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it \ln^{1+\gamma} p} \right| < \left(7500 + \frac{7}{\sqrt{|\gamma|}}\right) \frac{N e^{23(\ln\ln N)^2}}{\sqrt{|t|}}. \tag{1.3.5}$$

2. For $-\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2}$ and $2e^{e^7} \leqslant t^{10} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$ we have

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it \ln p (\ln\ln p)^{\gamma}} \right| < \left(272 + \frac{32}{\sqrt{|\gamma|}}\right) \frac{N e^{23(\ln\ln N)^2}}{\sqrt{|t|}}. \tag{1.3.6}$$

3. For $2e^{e^7} \leqslant t^9 \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$ we have

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it \ln (p+N)} \right| < \frac{168 N e^{23(\ln\ln N)^2}}{\sqrt{|t|}}. \tag{1.3.7}$$

In chapter IV we will find various results which show that the t-values for which the inequality (1.3.4) holds, are generally «near to each other», i. e. a «procent-theorem» (theorem XI) holds.

1.4. The same method furnishes the following more general

THEOREM II. *For the truth of the quasi-riemannian hypothesis is necessary and sufficient the existence of an* $\alpha \geqslant 2$, $0 < \beta \leqslant 1$ *and* $a_4 = a_4(\alpha, \beta)$, $a_5 = a_5(\alpha, \beta)$ *such that for*

$$a_4 < t^\alpha < \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N \tag{1.4.1}$$

the inequality

$$\Big| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p} \Big| < a_5 \frac{N e^{-\beta (\ln \ln N)^2}}{|t|^3} \tag{1.4.2}$$

be true.

It is obviously sufficient to prove only theorem II.

1.5. These theorems supply no information about the consequences of the inequalities (1.4.1) – (1.4.2) concerning the actual position of the half-plane in which these inequalities assure the truth of the quasi-riemannian hypothesis. For this purpose we state separately two theorems whose combination gives theorem II; the situation is about the same as in the case of the well-known theorem of Hardy and Littlewood relating to the Cesarò - summability of the Fourier—series. These two theorems run as follows.

THEOREM III. *If there exist constants* $\alpha \geqslant 2$, $0 < \beta \leqslant 1$, *and* $a_4 = a_4(\alpha, \beta)$, $a_5 = a_5(\alpha, \beta)$ *such that for*

$$a_4 \leqslant t^\alpha \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N \tag{1.5.1}$$

the inequality

$$\Big| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p} \Big| < a_5 \frac{N e^{-\beta (\ln \ln N)^2}}{|t|^3} \; * \tag{1.5.2}$$

---

* It would be the best possible if we could prove the inequality (1.5.1)—(1.5.2) with $\alpha = 2$, $\beta = 1$. For the similar sum

$$\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln n}$$

this is quite easy to prove. For we have

$$|(n+1)^{1+it} - n^{1+it} - (1+it) n^{it}| = n \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+it} - 1 - \frac{1+it}{n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant n \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+it} - 1 - (1+it) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| + n \sqrt{1+t^2} \left| \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right|;$$

since for $Rz \leqslant 1$, as it is easy to prove, $|e^z - 1 - z| \leqslant |z|^2$, we have

$$|(n+1)^{1+it} - n^{1+it} - (1+it) n^{it}| \leqslant \frac{1+t^2}{n} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{n} < \frac{2(1+t^2)}{n}$$

and summing for $N' \leqslant n \leqslant N''$ if $2 \leqslant 2t^2 \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$

$$\Big| \sum_{N' \leqslant n \leqslant N''} e^{it \ln n} \Big| < \frac{2N}{t} + 2\sqrt{1+t^2} < \frac{4N}{t}$$

holds then the quasi-riemannian hypothesis, holds for the half-plane

$$\sigma \geqslant 1 - e^{-10\frac{\beta^3}{\alpha^2}}; \tag{1.5.3}$$

more exactly there is an $a_6 = a_6(\alpha, \beta, a_5)$ *such that* $\zeta(s) \neq 0$ *for*

$$\sigma \geqslant 1 - e^{-10\frac{\beta^3}{\alpha^2}}, \quad |t| \geqslant a_6.$$

THEOREM IV. *If* $\zeta(s)$ *has in the half-plane* $\sigma \geqslant \vartheta_4 \left(\frac{1}{2} \leqslant \vartheta_4 < 1\right)$. *only a finite number* ν *of roots than for*

$$100^{\frac{1}{1-\vartheta_4}} \leqslant t^{\frac{1}{1-\vartheta_4}} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

the inequality

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p} \right| < a_7 \frac{N \ln^3 N}{t}$$

holds with $a_7 = a_7(\vartheta_4, \nu)$.

The possiblility to find the inverse theorem of theorem III has been suggested by Mr. A. Rényi.

1.6. The half-plane (1.5.3) given in theorem III is far from being the best possible. It is probable that limit of the force of our method is the half-plane $\sigma > 1 - \frac{\beta}{\alpha}$. One of the most essential obstacles of this improvement would be removed if one could prove that for

$$\frac{1}{2} < \sigma_0 < \sigma_0 + \delta \leqslant 1$$

the number of the roots of $\zeta(s)$ in the parallelogram

$$\{\sigma_0 + i(T \pm 1),\ \sigma_0 + \delta + t(T \pm 1)\}$$

divided by $\ln T$ is less than $C(\delta)$, where $\lim_{\delta \to 0} C(\delta) = 0$. Of course the stronger inequality

$$\lim_{T \to \infty} \frac{N(\sigma_0, T+1) - N(\sigma_0, T)}{\ln T} = 0 \tag{1.6.1}$$

valid for $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ would have the same effect; but thisl ast inequality is, as Backlund ([5]) and Littlewood ([6]) showed, equivalent to the unproved conjecture of Lindelöf, i. e. to the relation valid for $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ and any $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to \infty} |t|^{-\varepsilon} |\zeta(\sigma_0 + it)| = 0. \ * \tag{1.6.2}$$

---

* Now the very interesting question arises whether the above mentioned weaker inequality

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{[N(\sigma_0, T+1) - N(\sigma_0 + \delta_1 T + 1)] - [N(\sigma_0, T) - N(\sigma_0 + \delta\, T)]}{\ln T} \leqslant C(\delta), \quad \lim_{\delta \to 0} C(\delta) = 0$$

implies the truth of the Lindelöf-hypothesis or not. I could not settle this question till now.

This means that from Lindelöf's conjecture I can obtain some consequences in the direction of the quasi-riemannian hypothesis, i. e. for the «horizontal distribution» of the roots in the critical strip not only for the «vertical distribution», i. e. for the investigation of $N(\sigma_0, T+1) - N(\sigma_0, T)$. These results give in a certain sense the converse of that theorem of Littlewood [l. c. (3)] which states that the truth of Riemann's conjecture implies that of Lindelöf; a statement whose possibility was about 1930 not quite sure *.

1.7. Theorem III admits a slight, but not unessential refinement. We prove

THEOREM V. *If there are* $\alpha \geqslant 2$, $0 < \beta \leqslant 1$ *and* $a_8 = a_8(\alpha, \beta)$ *such that for*

$$e^{1620\alpha} \leqslant |t|^{\alpha} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N \tag{1.7.1}$$

the inequality

$$\Big|\sum_{N' \leqq p \leqq N''} \cos(t \ln p)\Big| < a_8 \frac{N e^{23(\ln\ln N)^{1}}}{|t|^{\beta}} \tag{1.7.2}$$

holds, then the zeta-funzton hzs a finite number of roots for $\sigma \geqslant 1 - e^{10}\frac{\beta^8}{\alpha^8}$.

The importance of the inequality (1.7.1)—(1.7.2) lies in the fact that we prove quite simply (theorem IX) that this is «often» satisfied, i. e. for any $0 < \lambda < 1$ and

$$3 \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N, \quad t > 0$$

we have

$$\min_{t \leqq x \leqq t + t^{\lambda}} \Big|\sum_{N' \leqq p \leqq N} \cos(x \ln p)\Big| < \frac{4N}{t^{\lambda}}.$$

I did not succeeded in proving a similar inequality for the sum $\sum\limits_{N' \leqq n \leqq N''} e^{it \ln p}$.

1.8. Theorems IV—V are not the most general theorems in this direction I can prove. Landau wrote [(11), p. 369 and (17), p. 564] the following lines: «... Diese Tatsache deutet wiederum auf einen arithmetischen Zusammenhang zwischen den complexen Wurzeln der Zetafunction und den Primzahlen hin. Ich habe aber keine Ahnung worin derselbe besteht...» The first step to this would be the proof that certain primes have an effect only upon certain non-trivial roots and conversely, i. e. to find localisation-theorems. With a further refinement I will prove such theorems. More exactly I show

---

* C. f. the excellent book of Titchmarsh (7). He writes (p. 93): «We have also seen that Lindelöf's hypothesis is true if Riemann's hypothesis is true. The converse deduction however cannot be made». The first step in this direction has been made by A. E. Ingham (8).

THEOREM VI. *Suppose there exist an* $\alpha \geqslant 2$, $0 < \beta \leqslant 1$, $A \geqslant 1$ *and*

$$\tau = \max\left(e^{\frac{64\alpha^2}{\beta^2}},\ e^{1120^2},\ e^{e^{\frac{96}{\beta}[400+81\ln\alpha+\ln(18A+24\alpha)]}}\right) \tag{1.8.1}$$

such that for a $t_0 \geqslant \tau$ *and for every*

$$t_0^\alpha \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' \leqslant N'' \leqslant N \leqslant e^{\ln^2 t_0} \tag{1.8.2}$$

the inequality

$$\left|\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} \cos(t_0 \ln p)\right| \leqslant A\,\frac{N e^{28(\ln\ln N)^3}}{t_0^\beta} \tag{1.8.3}$$

holds. Then $\zeta(s) \neq 0$ *for*

$$t = t_0, \quad \sigma \geqslant 1 - e^{-10}\,\frac{\beta^3}{\alpha^2}. \tag{1.8.4}$$

THEOREM VII. *Let be* $\gamma_1 > 0$, $\frac{1}{2} \leqslant \vartheta_5 < 1$, $\tau_1 \geqslant \max\left(100, 30^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$ *and we suppose that the zeta-function does not vanish in the parallelogram*

$$\sigma \geqslant \vartheta_5, \quad \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_1 + \tau_1^{\gamma_1}.$$

Then we have for every t *for which*

$$\tau_1 + \frac{1}{4}\tau^{\min(1,\gamma_1)} \leqslant t \leqslant \tau_1 + \frac{3}{4}\tau_1^{\gamma_1}$$

and for every N, N', N'' *with*

$$t^{\frac{\min(1,\gamma_1)}{1-\vartheta_5}} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

the inequality

$$\left|\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it\ln p}\right| \leqslant \frac{400}{\min(1,\gamma_1)} \cdot \frac{N\ln^3 N}{t^{\min(1,\gamma_1)}}.$$

With other words, the fact that $\zeta(s)$ vanishes in a certain finite domain D_1 or not depends only upon the primes of another finite domain D_2. Obviously theorems VI and VII contain all of theorems I—V; hence it is sufficient to prove theorems VI and VII. This will be done in chapters II and III.

1.9. As mentioned we shall show in the Appendix how one can get estimations with Vinogradov's method for sums of the form

$$\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it\ln^{1+\gamma} p}$$

if $\gamma \neq 0$. It seems to me that the treatment of the case $\gamma = 0$ needs new devices which are not of purely technical nature. But if $\gamma \neq 0$ it is highly probable that a slightly modified technique will be able to improve the exponent of t on the right side of (1.3.5) to $\frac{1}{2} + \delta$ $(\delta > 0)$ instead of $\frac{1}{2}$. This remark lends a certain interest to the

THEOREM X. *If there can be found fixed numbers* $\alpha \geqslant 2$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $a_9 = a_9(\alpha, \delta) > 100$ *and* $a_{10} = a_{10}(\alpha, \delta)$ *such that*

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it\sqrt{\ln p}} \right| \leqslant a_{10} \frac{N e^{23(\ln \ln N)^2}}{|t|^{\frac{1}{2}+\delta}}$$

for every N, N', N'' *with*

$$a_9 \leqslant |t|^{\alpha} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

then $\zeta(s)$ *has in the half-plane* $\sigma \geqslant 1 - e^{-10} \frac{\beta^3}{\alpha^2}$ *only a finite number of roots* *.

1.10. The most essential new feature of my method is the solution of a question which may be considered as a new problem in the theory of diophantine approximations. It may be characterised by saying that «too many» consecutive power-sums of n fixed complex numbers cannot be simultaneously «too small». A similar problem of diophantine approximations which has been introduced in the theory of zeta-function by H. Bohr may be stated as requiring a lower estimation of the quotient

$$\max_{m_1 < \nu < m_2} \left| \frac{z_1^\nu + \cdots + z_n^\nu}{|z_1|^\nu + \cdots + |z_n|^\nu} \right|,$$

where $z_1, z_2, \ldots, z_n$ are arbitrary fixed complex numbers which do not vanish at the same time. For his purposes e. g. the inequality was

$$\max_{m \leq \nu < m \cdot 5^n} \frac{|z_1^\nu + \cdots + z_n^\nu|}{|z_1|^\nu + \cdots + |z_n|^\nu} \geqslant \frac{1}{2}, \quad m \geqslant 1 \qquad (1.10.1)$$

sufficient. For our purposes this interval is «too large». We shall replace $(|z_1|^\nu + \ldots + |z_n|^\nu)^{\frac{1}{\nu}}$ by $\min_{j=1,\ldots,n} |z_j|$ and sharper by $\max_{j=1,\ldots,n} |z_j|$ which will allow to reduce the interval for the exponent ν to $m \leqslant \nu \leqslant m + n$. So I will prove (see lemma XII) that for $m \geqslant 28n$

$$\max_{m \leqslant \nu \leqslant m+n} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu|^{\frac{1}{\nu}} \geqslant \left\{ \frac{1}{n^3} \left(\frac{n}{e^{26} m} \right)^n \right\}^{\frac{1}{m}} \max_{j=1,2,\ldots,n} |z_j|. \qquad (1.10.2)$$

---

* For a generalized form of this theorem see p. 233.

Comparing this estimation with (1.10.1) the later seems to be of somewhat mean-value character.

It is easy to see that estimations similar to (1.10.2) play also an important part in the general theory of functions. E. g. a slight generalisation of my lemma VIII furnishes a simple proof of the famous gap-theorem of Fabry, which says that if

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{\lambda_\nu} \quad \left(\frac{\lambda_\nu}{\nu}\to\infty,\ \lambda_\nu \text{ integer}\right)$$

has $|z|<1$ as circle of convergence, then this circle is the complete domain of its existence. It seems to me that this way of proof was wanted in the excellent book of Paley and N. Wiener on Fourier-transforms in complex domain and will be suitable to cease the somewhat isolated position which this very interesting theorem has. Some of these results will appear in a note in the Hungarica Mathematica Acta.

My proofs for these lemmas are partly algebraic. In a very special case ($|z_j|=1$, $j=1, 2, \ldots, n$ and other restrictions) Littlewood ([9]) obtained—with quite different, to our case unapplicable method—estimations which are similar to my lemma VIII but weaker. It is perhaps interesting to note that Littlewood arrived to this problem also investigating the distribution of the primes, more exactly the sign of the difference $\pi(x)-\int\frac{dv}{\ln v}$. In a short note which will appear in the Journal of the London Math. Soc. I give, using my method, for lemma VIII generalisations of Littlewood's above quoted theorems in several directions.

1.11. My methods for showing theorems I—VII may be sketched as follows. One of the fundamental ideas is the investigation of the remainder-sum of the Dirichlet-series of the function $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, convergent for $\sigma>1$. The identity

$$\sum_{n>\xi}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=\frac{\xi^{1-s}}{s-1}-\sum_{\rho}\frac{\xi^{\rho-s}}{s-\rho}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{-2n-s}}{s+2n}, \tag{1.11.1}$$

where $\Lambda(n)$ stands for $\ln p_1$ if $n=p_1^{\alpha_1}$, $\alpha_1\geqslant 1$ and 0 if $n\neq p_1^{\alpha_1}$ further $\rho=\sigma_\rho+it_\rho$ runs through the non-trivial roots of $\zeta(s)$ (i. e. for which $0<\sigma_\rho<1$), $\xi>1$, $\xi\neq$ integer and $\sigma>1$, connects the non-trivial roots with prime-numbers. If we suppose that there is a sequence $\rho_1, \rho_2, \ldots, \ldots, \rho_j=\sigma_{\rho_j}+it_{\rho_j}, \ldots$ such that

$$\sigma_{\rho_1}<\sigma_{\rho_2}<\ldots\to 1 \tag{1.11.2}$$

then choosing $s=\sigma+it_{\rho_j}$ and $\sigma>1$ very near to 1 those terms are particularly large in the sum on the right of (1.11.1) for which ρ is «near» to the fixed s. This phenomenon would be stronger if we could replace the factor $\frac{1}{s-\rho}$ by $\frac{1}{(s-\rho)^k}$, k being a large positive integer. We could

obtain this formally by integrating the identity (1.11.1) $(k-1)$-times according to ξ; but difficulties arise from the fact that the series on the right-side of (1.11.1) is neither absolutely nor uniformly convergent. To avoid this difficulty we start, instead of the formula (1.11.1), from the identity

$$\sum_{n \geq x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln \frac{n}{x} = \frac{x^{1-s}}{(s-1)^2} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}}{(s-\rho)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{(s+2n)^2} \qquad (1.11.3)$$

which can be easily directly proved. Now we can integrate $(k-2)$-times according to ξ; this operation can, as it is well-known, be replaced by a single integration. Hence we obtain the fundamental identity *

$$\int_{\xi}^{\infty} \left(\sum_{n \geq x} \frac{\Lambda(n) \ln \frac{n}{x}}{n^s} \right) \frac{\ln^{k-1} \frac{x}{\xi}}{x} dx =$$
$$= (k-1)! \left\{ \frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{k+2}} - \sum_{\rho} \frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}} - \sum \frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+2}} \right\}. \qquad (1.11.4)$$

If (1.11.2) would be true we choose $s = \sigma + it_{\rho_j}$ for every fixed $\rho_j = \sigma_{\rho_j} + it_{\rho_j}$ with sufficiently large t_{ρ_j} where $\sigma = \sigma(t_{\rho_j}) > 1$ is near to 1; further we choose ξ and k as suitable functions of t_{ρ_j}. The integral on the left-side will be estimated using the inequality (1.5.2); this will give an *upper* estimation for this expression. Those terms on the right-side of the identity (1.11.4) whose ρ is «far» from s are very small in absolute value and this holds also for their sum; this will be also an *upper* estimation. The remaining sum will be estimated *from below* by suitable choice of k; here we make use of our lemmas on power-sums of fixed complex numbers. These estimations will contradict to (1.11.4) if (1.11.2) holds. The proofs of the converse theorems IV and VII are almost obvious, they need no preliminary explanation.

As to the exposition of the proofs the reader will observe that a number of lemmas are of purely numerical nature. The reason of that is that I move a great orchestra of parameters and therefore the use of indefinite constants would cause a feeling of uncertainty. Therefore I am working always with explicit inequalities; no need to emphasize that I did not try to obtain the best possible constants though they would not be without importance.

1.12. In connection with theorem II I will call the attention to an interesting fact. According to this theorem, the inequality (1.4.1)—(1.4.2) is the necessary and sufficient condition for the truth of the quasi-riemannian hypothesis. But evidently the existence of a ϑ_6 such that $\zeta(s) = 0$ has for $\sigma \geq \vartheta_6$ only a finite number of roots implies the existence of a ϑ_7 with $\frac{1}{2} \leq \vartheta_7 < 1$ such that $\zeta(s) \neq 0$ for $\sigma \geq \vartheta_1$ and further this implies that

* See also footnote on the p. 223.

$$\left|\pi(x)-\int\limits_2^x \frac{dv}{\ln v}\right| = O(x^{\vartheta_7+\varepsilon}), \quad \varepsilon>0. \tag{1.12.1}$$

The converse deduction is obviously also true; hence we obtain

THEOREM VIII. *For the truth of the inequality* (1.12.1) *for some fixed* $\vartheta_7<1$ *is necessary and sufficient the truth of the inequality* (1.4.1)—(1.4.2) *with some fixed* $\alpha\geqslant 2$, $0<\beta\leqslant 1$.

The interesting in this theorem VIII lies obviously in the fact that both condition and statement are independent of the zeta-function. A direct proof of this very interesting theorem seems to me desirable; in this moment I can only deduce inequality (1.4.1)—(1.4.2) from (1.12.1), but not conversely. This part is quite simple by partial summation and may be left to the reader.

In his memoir ([4]) Vinogradov says (in English translation): «... I remark that my method in itself is unable to give at present either the Gaussian law of the distribution of the prime numbers or other analogous laws which are obtained by the application of the zeta-function of Riemann. But it is characteristic to my asymptotic formulae that the decrease of the order of the remainder-term is of order of a power with positive exponent; the formulae obtained hitherto by the application of the zeta-function of Riemann give remainder-terms, the decrease of which is in general weaker than any power. ...» As some results of the present paper (theorems VIII and X) show, an improvement of Vinogradov's method connected with those of this paper can reach the above mentioned aims.

1.13. These results may be extended to Dirichlet's L-function; these and some modifications I will publish in the second paper together—I hope—with the proof of my conjecture on p. 233, i. e. with the proof of the quasi-riemannian hypothesis.

I should like to express my deepest gratitude to Mr. William Jonasz who has made possible my work in the hardest times in 1943. I am indebted to my friends Dr. A. Rényi and Dr. St. Földes for their many valuable remarks and suggestions.

Chapter II

2.1. Throughout this chapter let

$$s=\sigma+it, \quad \alpha\geqslant 2, \quad 0<\beta\leqslant 1, \quad A\geqslant 1; \tag{2.1.1}$$

thus we have

$$\alpha\geqslant 2\geqslant 2\beta. \tag{2.1.2}$$

We suppose further in this chapter the existence of a t_0 for which

$$t_0\geqslant\tau=\max\left(e^{\frac{64\alpha^2}{\beta^4}},\ e^{11\cdot 10^2},\ e^{e^{\frac{96}{\beta}[400+81\ln\alpha+\ln(13A+24\alpha)]}}\right) \tag{2.1.3}$$

and for every N, N' and N'' with

$$t_0^a \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N \leqslant e^{\ln^2 t_0} \tag{2.1.4}$$

the inequality

$$\Big| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} \cos(t_0 \ln p) \Big| \leqslant A \frac{N e^{23 (\ln \ln N)^2}}{t_0^3} \tag{2.1.5}$$

holds. In what follows we need often the simple formula

$$\int_a^\infty v^{-\lambda} \ln v \, dv = \frac{a^{1-\lambda} \ln a}{\lambda - 1} + \frac{a^{1-\lambda}}{(\lambda - 1)^2}$$

valid for $a > 0$, $\Re\lambda > 1$, and the estimation

$$\Big| \int_a^\infty v^{-\lambda} \ln v \, dv \Big| < \frac{2a^{1-\lambda} \ln a}{(\lambda - 1)^2} \tag{2.1.6}$$

valid for $2 \geqslant \lambda > 1$, $a \geqslant 3$. For the proof of theorem VI we need a number of lemmas.

2.2. LEMMA I. *Let $f(s)$ be regular for $|s - s'| \leqslant R$ and here*

$$\left| \frac{f(s)}{f(s')} \right| \leqslant e^M.$$

If $\overline{N}$ denotes the number of the roots of $f(s)$ in the parallelogram P

$$-\frac{R}{3} \leqslant \sigma - \sigma' \leqslant -\frac{R}{6}, \quad |t - t'| \leqslant \frac{R}{3}$$

then the estimation

$$\overline{N} < \frac{M}{\ln 2}$$

holds.

Proof. Our statement follows easily from Jensen's formula and the observation that the parallelogram P is contained in the circle $|s - s'| \leqslant \frac{R}{2}$. If $\overline{N}_1$ denotes the number of the roots in this last circle and $z_1, z_2, \ldots$ stand for these roots we have

$$\overline{N} \leqslant \overline{N}_1 \leqslant \frac{1}{\ln 2} \sum_{\substack{\nu \\ |z_\nu - s'| \leqslant \frac{R}{2}}} \ln \frac{R}{|z_\nu - s'|} \leqslant \frac{1}{\ln 2} \sum_{\substack{\nu \\ |z_\nu - s'| \leqslant R}} \ln \frac{R}{|z_\nu - s'|} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \ln 2} \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{f(s' + Re^{i\varphi})}{f(s')} \right| d\varphi \leqslant \frac{M}{\ln 2},$$

q. e. d.

LEMMA II. *Let $\frac{5}{6} \leqslant \sigma'' \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{\ln t''}}$, $t'' \geqslant e^{36}$. Then using the notation of chapter I, we have for the number of the roots of $\zeta(s)$ in the parallelogram $[\sigma'' + (t'' \pm 2(1 - \sigma''))i,\ 1 + (t'' \pm 2(1 - \sigma''))i]$*

$$N(\sigma'', t''+2(1-\sigma''))-N(\sigma'', t''-2(1-\sigma''))\leqslant$$
$$\leqslant 4(1-\sigma'')\ln t''+3\ln\ln(t''+1)+5.$$

Proof. We apply lemma I with $s'=2-\sigma''+it''$, $R=6(1-\sigma'')$. The number $\overline{N}$ of the former lemma is obviously

$$N(\sigma'', t''+2(1-\sigma''))-N(\sigma'', t''-2(1-\sigma'')).$$

Since

$$|\zeta(s')|^{-1}=\left|\sum_n \mu(n)n^{-s'}\right|<\sum_n n^{\sigma''-2}<$$
$$<1+(1-\sigma'')^{-1}<1+\sqrt{\ln t''}<2\sqrt{\ln t''}$$

and for $t\geqslant 50$, $0\leqslant\sigma\leqslant 2$ *

$$|\zeta(s)|\leqslant(2+2t^{\frac{1-\sigma}{2}})\ln t \tag{2.2.1}$$

we have

$$\max_{|s-s'|\leqq R}\ln\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s')}\right|\leqslant\max_{\substack{|\sigma-\sigma'|\leqq R\\|t-t'|\leqq R}}\ln\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s')}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\ln\{2\sqrt{\ln t''}\cdot 3(t''+R)^{\frac{\sigma''-1+R}{2}}\ln(t''+R)\}<$$
$$<\ln\{6(t''+1)^{\frac{5(1-\sigma'')}{2}}\ln^{\frac{3}{2}}(t''+1)\}<\frac{5}{2}(1-\sigma'')\ln(t''+1)+$$
$$+\frac{3}{2}\ln\ln(t''+1)+2<\frac{5}{2}(1-\sigma'')\ln t''+\frac{3}{2}\ln\ln(t''+1)+3.$$

Thus lemma I gives

$$N(\sigma'', t''+2(1-\sigma''))-N(\sigma'', t''-2(1-\sigma''))<$$
$$<4(1-\sigma'')\ln t''+3\ln\ln(t''+1)+5.$$

LEMMA III. *Denoting, as usual, by $N(T)$ the number of the non-trivial roots of $\zeta(s)$ with ordinates >0 and $\leqslant T$ then we have for $T\geqslant e^{e^9}$ $(>e^{50})$*

$$(i)\qquad N(T)\leqslant T^2,$$
$$(ii)\qquad N(T+1)-N(T)\leqslant\ln T.$$

---

* In Backlund's paper ([10]) we find the estimation

$$|\zeta(s)|\leqslant\frac{t^2}{t^2-4}\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1-\sigma}{2}}\ln t<2t^{\frac{1-\sigma}{2}}\ln t$$

valid for $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, $|t|\geqslant 50$. If $\sigma\geqslant 1$ from the well-known formula

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^s}+\frac{m^{1-s}}{s-1}-s\int_m^\infty\frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx$$

putting $m=[t]$, $t\geqslant 50$ we get

$$|\zeta(s)|\leqslant\ln t+1+\frac{1}{t}[t]^{1-\sigma}+(2+t)\int_{[t]}^\infty x^{-\sigma-1}dx<\ln t+\frac{8}{7}+(2+t)\sigma^{-1}[t]^{-\sigma}<2\ln t,$$

i. e. for $0\leqslant\sigma\leqslant 2$, $t\geqslant 50$

$$|\zeta(s)|\leqslant(2+2t^{\frac{1-\sigma}{2}})\ln t.$$

Proof. As Backlund showed for $T > 200$

$$\left| N(T) - \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} + \frac{T}{2\pi} - \frac{7}{8} \right| < 0 \cdot 137 \ln T + 0 \cdot 443 \ln \ln T + 4 \cdot 35$$

thus we have roughly

$$N(T) < \frac{T}{2} \ln \frac{T}{2\pi} + 0 \cdot 6 \ln T + 6 < \frac{T^2}{2\pi} + 0 \cdot 6 \ln T + 6 < T^2,$$

i. e. (i) is proved. From the same formula of Backlund follows

$$N(T+1) - N(T) < \frac{T}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{T+1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} + 0 \cdot 274 \ln (T+1) +$$
$$+ 0 \cdot 886 \ln \ln (T+1) + 8 \cdot 7 <$$
$$< 0 \cdot 55 \ln T + \ln \ln (T+1) + 9 < 0 \cdot 55 \ln T + 2 \ln \ln (T+1)$$

since $9 < \ln \ln T < \ln \ln (T+1)$. Also we have

$$\ln (T+1) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \ln (T+1) \right)^2 < e^{\frac{1}{5} \ln (T+1)} = (T+1)^{\frac{1}{5}},$$

$$\ln \ln (T+1) < \frac{1}{5} \ln (T+1),$$

$$N(T+1) - N(T) < 0 \cdot 95 \ln (T+1) < \ln T,$$

q. e. d.

2.3. LEMMA IV. *For $x > 1$, $\sigma > 1$ we have*

$$\sum_{n>x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln \frac{n}{x} = \frac{x^{1-s}}{(s-1)^2} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}}{(s-\rho)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{(s+2n)^2}.$$

Proof. The proof is, of course, analogous to that of Riemann — von Mangoldt's exact formula or — what is the same — to that of the formula [([11]), p. 353]

$$\sum_{n>x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{s-1} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}}{s-\rho} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{s+2n} \quad (x \neq \text{integer}).$$

We start from the integral

$$B = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{x^w}{w^2} \frac{\zeta'}{\zeta} (s+w)\, dw,$$

where we suppose for α_1 only

$$0 > \alpha_1 > 1 - \sigma.$$

Since for the w's of the line of the integration $\Re(s+w) > 1$, we have

$$B = \sum_{n} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(\alpha_1)} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^w}{w^2}\, dw = \sum_{n>x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln \frac{n}{x}.$$

Now we apply Cauchy's integral-theorem to the parallelogram

$$\left(\alpha_1 \pm i\omega_1 - [\omega] - \frac{1}{2} \pm i\omega \right)$$

with suitable ω's, tending to infinity and to the function

$$-\frac{x^w}{w^2} \frac{\zeta'}{\zeta}\, s + w).$$

The contour-integral tends, as in the paradigmas mentioned before, to zero with $\frac{1}{\omega}$; the sum of the residua gives

$$\frac{x^{1-s}}{(s-1)^2}-\sum_{\rho}\frac{x^{\rho-s}}{(s-\rho)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n-s}}{(s+2n)^2},$$

q. e. d.

2.4. LEMMA V. *We have*

$$t^{\frac{\beta}{12}}>(13A+24\alpha)\,e^{(400+81\ln\alpha)\sqrt{\ln t}\,\ln\ln t}$$

for

$$t>e^{e^{\frac{96}{\beta}\{400+81\ln\alpha+\ln(13A+24\alpha)\}}}$$

Proof. Putting $400+81\ln\alpha=A_1$, $\ln(13A+24\alpha)=B_1$, $\ln t=u$ we have to prove

$$\frac{\beta}{12}u>A\sqrt{u}\ln u+B_1\quad\text{if}\quad u>e^{\frac{96}{\beta}(A_1+B_1)}.$$

But

$$\ln u>\frac{96}{\beta}(A_1+B_1),\quad \ln^2 u>\frac{96}{\beta}(A_1+B_1)\ln u,$$

$$\frac{1}{12}\sqrt{u}>\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln u\right)^2>\frac{1}{\beta}(A_1+B_1)\ln u,$$

$$\frac{\beta}{12}u>(A_1+B_1)\sqrt{u}\ln u>A_1\sqrt{u}\ln u+B_1,$$

q. e. d.

LEMMA VI. *For* $\alpha\geqslant 2$, $0<\beta\leqslant 1$ *and*

$$1\geqslant\sigma\geqslant 1-e^{-10}\frac{\beta^3}{\alpha^2}$$

the inequality

$$\frac{64\alpha}{\beta}(1-\sigma)\ln\frac{\beta e^{26}}{32(1-\sigma)}<\frac{\beta}{4}$$

holds.

Proof. Putting $1-\sigma=\lambda\frac{\beta^3}{\alpha^2}$ we have to prove that for $0\leqslant\lambda\leqslant e^{-10}$

$$\lambda\ln\left\{\frac{e^{26}}{32\lambda}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right\}<\frac{1}{256}\cdot\frac{\alpha}{\beta};$$

this is certainly true if for these λ's

$$h(\lambda)\equiv\lambda\ln\left\{\frac{e^{23}}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right\}<\frac{1}{256}\cdot\frac{\alpha}{\beta}<0,$$

Since for our interval

$$\frac{dh}{d\lambda}=\ln\left\{\frac{e^{23}}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2\right\}-1\geqslant\ln\left\{e^{32}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right\}>0$$

we have here

$$h(\lambda) \leqslant h(e^{-10}) = e^{10}\left(33 + 2\ln\frac{x}{\beta}\right) - \frac{1}{256}\cdot\frac{x}{\beta} =$$
$$= e^{-10}\left(33 + 2\ln\frac{x}{\beta} - \frac{e^{10}}{256}\cdot\frac{x}{\beta}\right) \equiv e^{-10}h_1\left(\frac{x}{\beta}\right).$$

But for $x \geqslant 2$

$$h_1'(x) = \frac{2}{x} - \frac{e^{10}}{256} < 0,$$

i. e. here

$$h_1(x) \leqslant h_1(2) = 33 + 2\ln 2 - \frac{e^{10}}{128} < 0;$$

since $\frac{x}{\beta} \geqslant 2$, we have $h_1\left(\frac{x}{\beta}\right) < 0$, q. e. d.

LEMMA VII. *Let* $d > 0$, $\Re\lambda > 1$, l *a positive integer and*

$$I(\varphi) = \int\limits_{d\exp\left(\frac{l}{\lambda-1}(1+\varphi)\right)}^{\infty} v^{-\lambda}\ln^l\frac{v}{d}\,dv.$$

Then we have

$$(i) \qquad I(-1) = \frac{l!\,d^{1-\lambda}}{(\lambda-1)^{l+1}},$$

$$(ii) \qquad \textit{for } \varphi \geqslant 1 \quad |I(\varphi)| \leqslant 4l!\,e^{-\frac{l\varphi}{4}}\left|\frac{d^{1-\lambda}}{(\lambda-1)^{l+1}}\right|.$$

Proof. Performing the substitution $v = (de^{\frac{u}{\lambda-1}})$ we obtain

$$I(\varphi) = \frac{d^{1-\lambda}}{(\lambda-1)^{l+1}}\int\limits_{l(1+\varphi)}^{\infty} e^{-u}u^l\,du$$

which gives for $\varphi = -1$ immediately (i). Putting $u = l(v+1)$ we obtain

$$I(\varphi) = d^{1-\lambda}\left(\frac{l}{\lambda-1}\right)^{l+1}e^{-l}\int\limits_{\varphi}^{\infty}[(1+v)e^{-v}]^l\,dv.$$

Since for $h \geqslant 1$

$$1 + h < 1 + \frac{3}{4}h + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}h\right)^2 < e^{\frac{3}{4}h}$$

we have for $\varphi \geqslant 1$

$$|I(\varphi)| < \left|\frac{d^{1-\lambda}}{(\lambda-1)^{l+1}}\right| l\left(\frac{l}{e}\right)^l\int\limits_{\varphi}^{\infty} e^{-\frac{lv}{4}}\,dv = \left|\frac{d^{1-\lambda}}{(\lambda-1)^{l+1}}\right| 4\left(\frac{l}{e}\right)^l e^{-\frac{l\varphi}{4}} <$$
$$< 4l!\,e^{-\frac{l\varphi}{4}}\left|\frac{d^{1-\lambda}}{(\lambda-1)^{l+1}}\right|,$$

q. e. d.

2.5. LEMMA VIII. *For* $2 \geqslant \sigma > 1$, $\omega \geqslant 3$ *we have*

$$(i) \qquad |R(\omega)| \equiv \left|\Re\left(\sum_{n\geqslant\omega}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\right| < \frac{3\omega^{1-\sigma}\ln\omega}{(\sigma-1)^2},$$

$$(ii) \qquad |L(\omega)| \equiv \left|\Re\left(\sum_{n\geqslant\omega}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\ln\frac{n}{\omega}\right)\right| < \frac{6\omega^{1-\sigma}\ln\omega}{(\sigma-1)^4}.$$

Proof. (*i*) follows simply by

$$|R(\omega)| \leqslant \sum_{n \geqslant \omega} \frac{\ln n}{n^\sigma} < \frac{\ln \omega}{\omega^\sigma} + \int_\omega^\infty v^{-\sigma} \ln v \, dv < \frac{3\omega^{1-\sigma} \ln \omega}{(\sigma-1)^2}$$

using (2.1.6). For (*ii*) we have

$$|L(\omega)| = \left| \int_\omega^\infty \frac{R(v)}{v} dv \right| \leqslant \int_\omega^\infty \frac{|R(v)|}{v} dv < \frac{3}{(\sigma-1)^2} \int_\omega^\infty v^{-\sigma} \ln v \, dv < \frac{6\omega^{1-\sigma} \ln \omega}{(\sigma-1)^4},$$

q. e. d.

LEMMA IX. *Supposing the truth of the inequality* (2.1.5) *we have for*

$$2 \geqslant \sigma \geqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{\ln t_0}}, \quad t_0^\alpha \leqslant y \leqslant e^{\ln^2 t_0}, \quad s = \sigma + it_0$$

$$|L(y)| \equiv \left| \Re \left(\sum_{n \geqslant y} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln \frac{n}{y} \right) \right| < e^{98 (\ln \ln t_0)^2} \left(\frac{34 A y^{1-\sigma}}{t_0^\beta} + 4 e^{(1-\sigma) \ln^2 t_0} \right).$$

Proof. We may write (2.1.5) in following form

$$\left| \sum_{N' \leqslant n \leqslant N''} (\pi(n) - \pi(n-1)) \cos(t_0 \ln n) \right| \leqslant A \frac{N e^{23 (\ln \ln N)^2}}{t_0^\beta}.$$

Partial summation gives for $t_0^\alpha \leqslant \frac{N_2}{2} \leqslant N_1 < N_2 \leqslant N^{\ln^2 t_0}$.

$$\left| \Re \sum_{N_1 < p \leqslant N_2} \ln p \cdot p^{-s} \right| = \left| \sum_{N_1 < n \leqslant N_2} \frac{\ln n}{n^\sigma} (\pi(n) - \pi(n-1)) \cos(t_0 \ln n) \right| <$$

$$< \frac{4 \ln \frac{N_2}{2}}{N_2^\sigma} A N_2 \frac{e^{23 (\ln \ln N_2)^2}}{t_0^\beta} < 4 A N_2^{1-\sigma} \frac{e^{24 (\ln \ln N_2)^2}}{t_0^\beta}. \tag{2.5.1}$$

If ν denotes the integer for which

$$2^\nu y < e^{\ln^2 t_0} \leqslant 2^{\nu+1} y$$

we may apply (2.5.1) with

$$\begin{Bmatrix} N_1 = y \\ N_2 = 2y \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} N_1 = 2y \\ N_2 = 2^2 y \end{Bmatrix}, \ldots, \begin{Bmatrix} N_1 = 2^{\nu-1} y \\ N_2 = 2^\nu y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 = 2^\nu y \\ N_3 = e^{\ln^2 t_0} \end{Bmatrix}.$$

Summing these results we obtain

$$\left| \Re \sum_{y \leqslant p \leqslant e^{\ln^2 t_0}} \ln p \cdot p^{-s} \right| \leqslant 4A \frac{y^{1-\sigma}}{t_0^\beta} e^{96 (\ln \ln t_0)^2} \sum_{j=0}^\infty 2^{j(1-\sigma)} <$$

$$< 28A \frac{y^{1-\sigma}}{(\sigma-1) t_0^\beta} e^{96 (\ln \ln t_0)^2} < 28A \frac{y^{1-\sigma} e^{97 (\ln \ln t_0)^2}}{t_0^\beta}. \tag{2.5.2}$$

Further we have simply

$$\left| \Re \sum_{\substack{y < p^k \leqslant e^{\ln^2 t_0} \\ k > z}} \ln p \cdot p^{-ks} \right| \leqslant \ln^2 t_0 \sum_{y \leqslant p^k, \, k \geqslant 2} p^{-k\sigma} <$$

$$< \ln^2 t_0 \left(\sum_{p \geqslant \sqrt{y}} \frac{1}{p^\sigma (p^\sigma - 1)} + \sum_{\sqrt[3]{y} \leqslant p < \sqrt{y}} \frac{1}{p^{2\sigma} (p^\sigma - 1)} + \cdots \right) <$$

$$< 2\ln^2 t_0 \Big(\sum_{n \geq \sqrt{y}} \frac{1}{n^{2\sigma}} + \sum_{\sqrt[3]{y} < n < \sqrt{y}} \frac{1}{n^{3\sigma}} + \cdots \Big) <$$

$$< 2\ln^2 t_0 \Big(\frac{1}{y^\sigma} + \frac{y^{\frac{1}{2}-\sigma}}{2\sigma - 1} + \sqrt{y}\cdot y^{-\sigma} + \sqrt[3]{y}\cdot y^{-\sigma} + \cdots \Big) <$$

$$< 6 y^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln y \ln^2 t_0 < 6 y^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln^4 t_0 .$$

This and (2.5.2) imply

$$\Big| \Re \sum_{y \leq n \leq e^{\ln^2 t_0}} \Lambda(n) n^{-s} \Big| < y^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{97(\ln\ln N)^2} \Big(\frac{28A\sqrt{y}}{t_0^\beta} + 6 \Big) < 34A \frac{y^{1-\sigma} e^{97(\ln\ln N)^2}}{t_0^\beta}$$

using (2.1.2) and $y > t_0^\alpha$. Using this and lemma VIII (*i*) we get

$$|R(y)| \leq \Big| \Re \sum_{y \leq n \leq e^{\ln^2 t_0}} \Lambda(n) n^{-s} \Big| + \Big| \Re \sum_{n > e^{\ln^2 t_0}} \Lambda(n) n^{-s} \Big| <$$

$$< 34A \frac{y^{1-\sigma} e^{97(\ln\ln t_0)^2}}{t_0^\beta} + 3e^{(1-\sigma)\ln^2 t_0} \cdot \frac{\ln^2 t_0}{(\sigma-1)^2} <$$

$$< e^{97(\ln\ln t_0)^2} \Big(\frac{34Ay^{1-\sigma}}{t_0^\beta} + 3e^{(1-\sigma)\ln^2 t_0} \Big). \tag{2.5.3}$$

Finally, we have

$$|L(y)| = \Big| \int_y^\infty \frac{R(v)}{v}\, dv \Big| \leq \int_y^{\frac{1}{2}e^{\ln^2 t_0}} \frac{|R(v)|}{v}\, dv + \int_{\frac{1}{2}e^{\ln^2 t_0}}^\infty \frac{|R(v)|}{v}\, dv;$$

thus using (2.5.3) and lemma VIII (*i*) we obtain

$$|L(y)| \leq e^{97(\ln\ln t_0)^2} \Big(\frac{34A}{t_0^\beta} \int_y^{\frac{1}{2}e^{\ln^2 t_0}} v^{-\sigma}\, dv + 3e^{(1-\sigma)\ln^2 t_0} \int_y^{\frac{1}{2}e^{\ln^2 t_0}} \frac{dv}{v} \Big) +$$

$$+ \frac{3}{(\sigma-1)^2} \int_{\frac{1}{2}e^{\ln^2 t_0}}^\infty v^{-\sigma} \ln v\, dv < e^{97(\ln\ln t_0)^2} \Big(\frac{34Ay^{1-\sigma}}{(\sigma-1)\, t_0^\beta} + 3\ln^2 t_0\, e^{(1-\sigma)\ln^2 t_0} \Big) +$$

$$+ \frac{6}{(\sigma-1)^4} \Big(\frac{1}{2} e^{\ln^2 t_0} \Big)^{1-\sigma} \ln^2 t_0 < e^{98(\ln\ln t_0)^2} \Big(\frac{34Ay^{1-\sigma}}{t_0^\beta} + 3e^{(1-\sigma)\ln^2 t_0} \Big) +$$

$$+ 9\ln^4 t_0\, e^{(1-\sigma)\ln^2 t_0} < e^{98(\ln\ln t_0)^2} \Big(\frac{34Ay^{1-\sigma}}{t_0^\beta} + 4e^{(1-\sigma)\ln^2 t_0} \Big),$$

q. e. d.

LEMMA. X. *If* t_0 *means the same as before,* K *is an integer for which*

$$1 + \ln t_0 \leq K \leq 2\alpha \ln t_0, \tag{2.5.4}$$

$$2 \geq \sigma \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{\ln t_0}}, \quad s = \sigma + it_0 \tag{2.5.5}$$

and η such that

$$t_0^{\alpha} \leq \eta \leq t_0^{2\alpha} \tag{2.5.6}$$

then we state

$$J = \left| \int_{\eta}^{\infty} L(v) \frac{\ln^{K-1} \frac{v}{\eta}}{v} dv \right| = \left| \int_{\eta}^{\infty} \Re \left(\sum_{n \geq v} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln \frac{n}{v} \right) \frac{\ln^{K-1} \frac{v}{\eta}}{v} dv \right| \leq$$

$$\leq (38A + 96\alpha) \frac{(K-1)!\, \eta^{1-\sigma} e^{98(\ln \ln t_0)^2}}{t_0^{\beta} (\sigma - 1)^K}.$$

Proof. We have obviously

$$|J| \leq \int_{\eta}^{\exp\left(\frac{1}{2}\ln^2 t_0\right)} |L(v)| \frac{\ln^{K-1} \frac{v}{\eta}}{v} dv + \int_{\exp\left(\frac{1}{2}\ln^2 t_0\right)}^{\infty} |L(v)| \frac{\ln^{K-1} \frac{v}{\eta}}{v} dv \equiv J_1 + J_2. \tag{2.5.7}$$

First we estimate J_1. From (2.1.3.) we have

$$t_0 \geq \tau > e^{4\alpha}, \quad \ln t_0 > 4\alpha, \quad \frac{1}{2} \ln^2 t_0 > 2\alpha \ln t_0 \geq \ln \eta$$

thus the interval $\left(\eta, \exp\left(\frac{1}{2}\ln^2 t_0\right)\right)$ exists and is contained in $\left(t_0^{\alpha}, \frac{1}{2} e^{\ln^2 t_0}\right)$. Lemma IX may be applied. Since

$$\beta \ln t_0 \leq \frac{1}{2} \ln^{\frac{3}{2}} t_0 \leq \frac{\sigma - 1}{2} \ln^2 t_0,$$

$$t_0^{-\beta} \geq \exp\left(-\frac{\sigma-1}{2} \ln^2 t_0\right)$$

and in the range of J_1

$$v \leq \exp\left(\frac{1}{2} \ln^2 t_0\right),$$

$$v^{1-\sigma} \geq \exp\left(-\frac{\sigma-1}{2} \ln^2 t_0\right),$$

$$\frac{v^{1-\sigma}}{t_0^{\beta}} \geq \exp\left(-(\sigma - 1) \ln^2 t_0\right),$$

we obtain for that range

$$|L(v)| \leq e^{98(\ln \ln t_0)^2} \left(\frac{34 A v^{1-\sigma}}{t_0^{\beta}} + 4 \frac{v^{1-\sigma}}{t_0^{\beta}} \right) \leq \frac{38 A v^{1-\sigma}}{t_0^{\beta}} e^{98(\ln \ln t_0)^2}$$

and consequently

$$|J_1| < \frac{38A}{t_0^{\beta}} e^{98(\ln \ln t_0)^2} \int_{\eta}^{\infty} v^{-\sigma} \ln^{K-1} \frac{v}{\eta} dv = \frac{38A (K-1)!\, \eta^{1-\sigma}}{(\sigma-1)^K t_0^{\beta}} e^{98(\ln \ln t_0)^2} \tag{2.5.8}$$

using lemma VII (i) with $d = \eta$.

Now we consider J_2. Using simply lemma VIII (ii) we get

$$|J_2| \leqslant \frac{6}{(\sigma-1)^4} \int\limits_{\exp\left(\frac{1}{2}\ln^2 t_0\right)}^{\infty} v^{-\sigma} \ln v \ln^{K-1} \frac{v}{\eta}\, dv =$$

$$= \frac{6\ln\eta}{(\sigma-1)^4} \int\limits_{\exp\left(\frac{1}{2}\ln^2 t_0\right)}^{\infty} v^{-\sigma} \ln^{K-1}\frac{v}{\eta}\, dv + \frac{6}{(\sigma-1)^4} \int\limits_{\exp\left(\frac{1}{2}\ln^2 t_0\right)}^{\infty} v^{-\sigma}\ln^K \frac{v}{\eta}\, dv \equiv$$

$$\equiv J_2' + J_2''. \tag{2.5.9}$$

To use lemma VII (*ii*) for the estimation of J_2' and J_2'' we have to consider the values φ' resp. φ'' of φ; these are defined by

$$\eta e^{\frac{K-1}{\sigma-1}(1+\varphi')} = e^{\frac{1}{2}\ln^2 t_0}, \quad \eta e^{\frac{K}{\sigma-1}(1+\varphi'')} = e^{\frac{1}{2}\ln^2 t_0}$$

It suffices obviously to find a lower estimate for φ''. (2.1.3) gives

$$t_0 \geqslant \tau > e^{8\alpha}, \quad \ln\eta \leqslant 2\alpha \ln t_0 < \frac{1}{4}\ln^2 t_0,$$

$$\frac{1}{4}\ln^2 t_0 < \frac{1}{2}\ln^2 t_0 - \ln\eta = \frac{K}{\sigma-1}(1+\varphi'') < \frac{2\alpha \ln t_0}{\ln^{-\frac{1}{2}} t_0}(1+\varphi''),$$

$$1+\varphi'' > \frac{1}{8\alpha}\sqrt{\ln t_0}, \quad \varphi'' > \frac{1}{8\alpha}\sqrt{\ln t_0} - 1 > \frac{\sqrt{\ln t_0}}{16\alpha} > 1.$$

The same holds for φ' a fortiori. Lemma VII (*ii*) gives with $d=\eta$, $\lambda=\sigma$, $l=K-1$

$$|J_2'| < \frac{6\ln\eta}{(\sigma-1)^4}\cdot (K-1)!\,\frac{\eta^{1-\sigma}}{(\sigma-1)^K} e^{-\frac{K-1}{4}\frac{\sqrt{\ln t_0}}{16\alpha}} <$$

$$< 48\alpha \frac{\ln^3 t_0}{(\sigma-1)^K}(K-1)!\,\eta^{1-\sigma} e^{-\frac{\ln^{\frac{3}{2}} t_0}{64\alpha}},$$

$$|J_2''| < \frac{6}{(\sigma-1)^4}\cdot 4K!\,\frac{\eta^{1-\sigma}}{(\sigma-1)^{K+1}} e^{-\frac{K}{4}\frac{\sqrt{\ln t_0}}{16\alpha}} <$$

$$< \frac{48\alpha \ln^3 t_0}{(\sigma-1)^{K+1}}(K-1)!\,\eta^{1-\sigma} e^{-\frac{\ln^{\frac{3}{2}} t_0}{64\alpha}}.$$

These and (2.5.9) give

$$|J_2| < \frac{96\alpha \ln^3 t_0}{(\sigma-1)^{K+1}}(K-1)!\,\eta^{1-\sigma} e^{-\frac{\ln^{\frac{3}{2}} t_0}{64\alpha}} < \frac{96\alpha \ln^4 t_0}{(\sigma-1)^K}(K-1)!\,\frac{\eta^{1-\sigma}}{t_0^3}$$

using again (2.1.3). This and (2.5.8) results

$$|J| < (38A + 96\alpha)\frac{(K-1)!\,\eta^{1-\sigma}}{(\sigma-1)^K t_0^3} e^{98(\ln\ln t_0)^2},$$

q. e. d.

2.6. Now we turn to the main lemmas.

LEMMA XI. * *Let us given* $0<\gamma\leqslant 1$ *and* $z_1, z_2, \ldots, z_b$ $(b>1)$ *so that*

$$\min_{j=1,\ldots,b} |z_j| \geqslant \gamma. \tag{2.6.1}$$

Then for any $m\geqslant 1$ *we assert*

$$M_1 \equiv \max_{\substack{m\leqslant\nu\leqslant m+b \\ \nu \text{ integer}}} |z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_b^\nu| \geqslant \frac{\gamma^{m+1}}{2}\left(\frac{\gamma(b-1)}{2e(m+b)}\right)^{b-1}.$$

Proof. Let first m be an integer. With these z_j we form the expressions

$$f_1(z) = \prod_{j=1}^{b}\left(1-\frac{z}{z_j}\right) = \sum_{j=0}^{b} c_j^{(1)} z^j, \quad c_0^{(1)}=1, \tag{2.6.2}$$

$$f_2(z) = f_1(z)^{-1} = \prod_{j=1}^{b}\left(1-\frac{z}{z_j}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(2)} z^j, \quad |z|<\gamma, \quad c_0^{(2)}=1, \tag{2.6.3}$$

$$s_m(f_2) = \sum_{j=0}^{m} c_j^{(2)} z^j,$$

$$f_3(z) = 1 - f_1(z)\, s_m(f_2) = \sum_{j=0}^{m+b} c_j^{(3)} z^j. \tag{2.6.4}$$

Obviously we have

$$c^{(3)} = c_1^{(3)} = \cdots = c_m^{(3)} = 0,$$

i. e.

$$f_3(z) = \sum_{j=m+1}^{m+b} c_j^{(3)} z^j. \tag{2.6.5}$$

From (2. 6. 4) and (2.6.5) it follows

$$\sum_{j=m+1}^{m+b} c_j^{(3)} z_1^j = \sum_{j=m+1}^{m+b} c_j^{(3)} z_2^j = \ldots = \sum_{j=m+1}^{m+b} c_j^{(3)} z_b^j = 1$$

or—denoting $(z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_b^\nu)$ by s_ν—

$$\sum_{j=m+1}^{m+b} c_j^{(3)} s_j = b. \tag{2.6.6}$$

Thus if

$$\max_{m+1\leqslant\nu\leqslant m+b} |s_\nu| = M_1' \,(\leqslant M_1)$$

(2.6.6) gives

$$b = \sum_{j=m+1}^{m+b} c_j^{(3)} s_j = \left|\sum_{j=m+1}^{m+b} c_j^{(3)} s_j\right| \leqslant M_1' \sum_{j=m+1}^{m+b} |c_j^{(3)}|. \tag{2.6.7}$$

* This lemma essentially occurs in my paper [12].

Now we need upper bounds for the numbers $c_\nu^{(1)}$, $c_\nu^{(2)}$ and $c_\nu^{(3)}$. (2.6.2) gives

$$|c_j^{(1)}| = \Big| \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq b} (z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_j})^{-1} \Big| \leq \frac{1}{\gamma^j} \binom{b}{j} \tag{2.6.8}$$

further from (2.6.3) for $j \leq m$

$$|c_j^{(2)}| = \Big| \sum_{\substack{i_1 + \ldots + i_b = j \\ i_1 \geq 0, \ldots, i_b \geq 0}} z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \ldots z_b^{-i_b} \Big| \leq \frac{1}{\gamma^j} \sum_{\substack{i_1 + \ldots + i_b = j \\ i_1 \geq 0, \ldots, i_b \geq 0}} 1 = \frac{1}{\gamma^j} \binom{j+b-1}{b-1} <$$

$$< \frac{1}{\gamma^j} \binom{m+b-1}{b-1} \leq \frac{1}{\gamma^j} \frac{(m+b)^{b-1}}{(b-1)!} < \frac{1}{\gamma^j} \left(\frac{e(m+b)}{b-1} \right)^{b-1} \tag{2.6.9}$$

and finally from (2.6.4), (2.6.8) and (2.6.9)

$$|c_j^{(3)}| = |c_m^{(2)} c_{j-m}^{(1)} + \ldots | \leq \frac{1}{\gamma^j} \left(\frac{e(m+b)}{b-1} \right)^{b-1} 2^b.$$

This and (2.6.7) results

$$b \leq M_1' \frac{1}{\gamma^{m+b}} \left(\frac{e(m+b)}{b-1} \right)^{b-1} 2^b . b$$

or

$$M_1 \geq M_1' \geq \frac{\gamma^{m+1}}{2} \left(\frac{\gamma(b-1)}{2e(m+b)} \right)^{b-1} \tag{2.6.10}$$

which proves our lemma for integer m.

Let now the restriction m being an integer removed. Applying (2.6.10) with $[m]$ instead of m we obtain

$$M_1 = \max_{\substack{m \leq \nu \leq m+b \\ \nu \text{ integer}}} |s_\nu| \geq \max_{\substack{[m]+1 \leq \nu \leq [m]+b \\ \nu \text{ integer}}} |s_\nu| = M_1' \geq \frac{\gamma^{[m]+1}}{2} \left(\frac{\gamma(b-1)}{2e([m]+b)} \right)^{b-1} \geq$$

$$\geq \frac{\gamma^{m+1}}{2} \left(\frac{\gamma(b-1)}{2e(m+b)} \right)^{b-1},$$

q. e. d.

2.7. LEMMA XII.* *For* $z_1 = 1$, $|z_2| \leq 1, \ldots, |z_n| \leq 1$, $m \geq 28n$ *we have*

$$M_2 = \max_{\substack{m \leq \nu \leq m+n \\ \nu \text{ integer}}} |z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu| > \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{e^{26} m} \right)^n.$$

P r o o f. Without loss of generality we may suppose $n \geq 2$. We make use of the following very interesting theorem of Boutroux-Cartan ([12]). Let be given a polynomial $g_1(z)$ of the degree n with the leading coef-

---

* For the aims of this paper this form is the most convenient It is true also in the following form. If $m \geq 28n$ we have

$$\max_{\substack{m \leq \nu \leq m+n \\ \nu \text{ integer}}} |z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu|^{\frac{1}{\nu}} \geq \left\{ \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{e^{26} m} \right)^n \right\}^{\frac{1}{m}} \max_{j=1,2,\ldots,n} |z_j|.$$

ficient 1 and a positive number H. Then $|g_1(z)| \geqslant \left(\frac{H}{e}\right)^n$ everywhere except at most in the interior of n circles the sum of whose radii is $< 2H$. We apply this theorem to $g_2(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$ with our z-s and

$$H = e\frac{n}{m}.$$

Thus we have the inequality

$$|g_2(z)| = \prod_{j=1}^{n} |z - z_j| > \left(\frac{n}{m}\right)^n$$

outside of n circles at most, the diameter-sum of whose is $\leqslant 4e\frac{n}{m}$. Thus we can assure in the annulus $1 - 4e\frac{n}{m} \leqslant |z| \leqslant 1$ the existence of a concentric circle $|z| = r$ *on the whole periphery* of which the inequality

$$|g_2(z)| \geqslant \left(\frac{n}{m}\right)^n$$

holds. Since for every factor $|z - z_j|$ of $|g_2(z)|$ here $|z - z_j| \leqslant 2$ we have *on this circle by any choice of the indices* $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant n$

$$\prod_{j=1}^{h} |z - z_{i_j}| \geqslant \left(\frac{n}{2m}\right)^n. \tag{2.7.1}$$

We have to distinguish two cases.

Case I. Every $|z_\nu|$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ is greater than the above determined r. Then we apply lemma XI with

$$b = n, \quad \gamma = 1 - 4e\frac{n}{m}.$$

This gives

$$M_2 \geqslant \frac{1}{4}\left(1 - 4e\frac{n}{m}\right)^m \left(\frac{\left(1 - 4e\frac{n}{m}\right)(n-1)}{2e(m+n)}\right)^{n-1} >$$

$$> \frac{1}{4} e^{-\frac{4en}{1 - 4e\frac{n}{m}}} \left(\frac{n}{4e} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{29}{28}m}\right)^n > \frac{1}{4}\left(\frac{7}{58e^{23}}\frac{n}{m}\right)^n >$$

$$> \frac{1}{4}\left(\frac{n}{e^{25}m}\right)^n > \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{e^{26}m}\right)^n.$$

Case II. There is an integer l such that $1 \leqslant l < n$ and

$$1 = z_1 = |z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \ldots \geqslant |z_l| > r > |z_{l+1}| \geqslant \ldots \geqslant |z_n|. \tag{2.7.2}$$

The restriction $|z_l| > r > |z_{l+1}|$ means no loss of generality since on $|z| = r$, $g_2(z) \neq 0$. Let first m be integer and we suppose that the z_ν-s all are different. Let be

$$g_3(z) = \prod_{j=l+1}^{n} (z - z_j) = \sum_{j=0}^{n-l} d_j^{(1)} z^{n-l-j}, \quad d_0^{(1)} = 1. \tag{2.7.3}$$

We have obviously

$$|d_j^{(1)}| = \left| \sum_{l+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_j} \right| \leqslant \binom{n-l}{j} < 2^{n-l}. \qquad (2.7.4)$$

Let further $g_4(z)$ be that polynomial of degree $\leqslant l-1$ which assumes for $z = z_1,\ z = z_2, \ldots, z = z_l$ the values

$$\frac{1}{z_1^{m+1} g_3(z_1)}, \quad \frac{1}{z_2^{m+1} g_3(z_2)}, \ldots, \frac{1}{z_l^{m+1} g_3(z_l)}$$

respectively. If $l = 1$ we have

$$g_4(z) \equiv \frac{1}{z_1^{m+1} g_3(z_1)};$$

if $1 < l < n$ we may represent $g_4(z)$ as a Newtonian interpolatorical polynomial

$$g_4(z) = d_0^{(2)} + d_1^{(2)}(z - z_1) + d_2^{(2)}(z - z_1)(z - z_2) + \ldots$$
$$\ldots + d_{l-1}^{(2)}(z - z_1) \ldots (z - z_{l-1}). \qquad (2.7.5)$$

Now we estimate these new coefficients. Since the function $\frac{1}{z^{m+1} g_3(z)}$ is regular for $|z| \geqslant r$ we have

$$d_0^{(2)} = \frac{1}{z_1^{m+1} g_3(z_1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{dw}{w^{m+1} g_3(w)(w - z_1)},$$

$$d_1^{(2)} = \frac{1}{z_2 - z_1} \left(\frac{1}{z_2^{m+1} g_3(z_2)} - \frac{1}{z_1^{m+1} g_3(z_1)} \right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{dw}{w^{m+1} g_3(w)(w - z_1)(w - z_2)},$$

$$d_\nu^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{dw}{w^{m+1} g_3(w)(w - z_1) \ldots (w - z_{\nu+1})}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, l-1.$$

Since $g_3(w)(w - z_1)(w - z_2) \ldots (w - z_{\nu+1})$ is obviously of the form (2.7.1) we have *on the whole periphery* $|w| = r$ and consequently

$$|g_3(w)(w - z_1) \ldots (w - z_{\nu+})| \geqslant \left(\frac{n}{2m}\right)^n,$$

$$|d_\nu^{(2)}| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \frac{1}{r^{m+1} \left(\frac{n}{2m}\right)^n} \leqslant \left(\frac{2m}{n}\right)^n \left(1 - 4e\frac{n}{m}\right)^{-m} <$$

$$< \left(\frac{2m}{n}\right)^n e^{\frac{4en}{1 - 4e\frac{n}{m}}} < \left(2e^{3e}\frac{m}{n}\right)^n < \left(e^{23}\frac{m}{n}\right)^n. \qquad (2.7.6)$$

We need also an estimation of $d_\nu^{(3)}$ defined by

$$g_4(z) = \sum_{\nu=0}^{l-1} d_\nu^{(3)} z^\nu. \qquad (2.7.7)$$

The connection between the $d_\nu^{(2)}$-s and $d_\nu^{(3)}$-s is

$$d_{l-1}^{(3)} = d_{l-1}^{(2)}$$

and for $\nu = 0, 1, \ldots, l-2$

$$d_\nu^{(3)} = d_\nu^{(2)} - d_{\nu+1}^{(2)} \sum_{1 \leq i_1 \leq \nu+1} z_{i_1} + d_{\nu+2}^{(2)} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq \nu+2} z_{i_1} z_{i_2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{l-\nu-1} d_{l-1}^{(3)} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{l-\nu-1} \leq l-1} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_{l-\nu-1}};$$

by this and (2.7.6) we obtain

$$|d_\nu^{(3)}| \leq \left(e^{23}\frac{m}{n}\right)^n \left[1 + \binom{\nu+1}{1} + \binom{\nu+2}{2} + \ldots + \binom{l-1}{l-\nu-1}\right] \leq$$

$$\leq \left(e^{23}\frac{m}{n}\right)^n l \binom{l-1}{\nu} < l2^l \left(e^{23}\frac{m}{n}\right)^n. \tag{2.7.8}$$

Let finally be

$$g_5(z) = z^{m+1} g_3(z) g_4(z) = \sum_{\nu=m+1}^{m+n} d_\nu^{(4)} z^\nu. \tag{2.7.9}$$

It follows from the definition of $g_3(z)$ and $g_4(z)$ that

$$g_5(z_1) = g_5(z_2) = \ldots = g_5(z_l) = 1, \quad g_5(z_{l+1}) = \ldots = g_5(z_n) = 0;$$

from this and (2.7.9) we obtain using the abbreviation $z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu = s_\nu$

$$l = \sum_{\nu=m+1}^{m+n} d_\nu^{(4)} s_\nu = \left| \sum_{\nu=m+1}^{m+n} d_\nu^{(4)} s_\nu \right| \leq M_2' \sum_{\nu=m+1}^{m+n} |d_\nu^{(4)}| \tag{2.7.10}$$

with $M_2' = \max\limits_{m+1 \leq \nu \leq m+n} |s_\nu|$. Since

$$d_\nu^{(4)} = \sum_j d_j^{(1)} d_{\nu+j-m-1-n+l}^{(3)}$$

where this sum contains less than n terms we have by (2.7.4) and (2.7.8)

$$|d_\nu^{(4)}| < nl2^n \left(e^{23}\frac{m}{n}\right)^n < \ln \left(e^{24}\frac{m}{n}\right)^n.$$

From this and (2.7.10) it follows easily

$$M_2' \geq \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{e^{24}m}\right)^n > \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{e^{26}m}\right)^n. \tag{2.7.11}$$

Since this statement is independent of $(z_n - z_\nu)$ this estimate holds also by continuity even if the z_ν-s are not all different. Finally let us reject the restriction of m being an integer; applying (2.7.11) with $[m]$ instead of m we obtain as before

$$M_2 = \max_{\substack{m \leq \nu \leq m+n \\ \nu \text{ integer}}} |s_\nu| \geq \max_{\substack{[m]+1 \leq \nu \leq [m]+n \\ \nu \text{ integer}}} |s_\nu| = M_2' \geq \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{e^{26}[m]}\right)^m \geq \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{e^{26}m}\right)^n,$$

q. e. d.

2.8. LEMMA XIII. *For* $n\leqq N$, $\max_{\nu=1,\dots,n}|z_\nu|\geqq 1$ *and* $m\geqq 28N$ *we have*

$$\max_{\substack{m\leqq\nu\leqq m+N\\ \nu\text{ integer}}}|z_1^\nu+\dots+z_n^\nu|\geqq\frac{1}{N^2}\left(\frac{N}{2e^{26}m}\right)^N.$$

P r o o f (simplified by Mr. A. Rényi). Let

$$\max_{\nu=1,2,\dots,n}|z_\nu|=m_1,\quad z_\nu=m_1\zeta_\nu\quad(\nu=1,2,\dots,n).$$

We apply lemma XII to the numbers

$$\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n,\ \underset{1}{0},\underset{2}{0},\dots,\underset{([N]-n)}{0}.$$

Then we have $\max|\zeta_\nu|=1$, $m\geqq 28N\geqq 28[N]$ and lemma XII gives

$$\max_{\substack{m\leqq\nu\leqq m+N\\ \nu\text{ integer}}}|\zeta_1^\nu+\dots+\zeta_n^\nu|\ \max_{\substack{m\leqq\nu\leqq m+[N]\\ \nu\text{ integer}}}|\zeta_1^\nu+\dots+\zeta_n^\nu|\geqq$$
$$\geqq\frac{1}{[N]^2}\left(\frac{[N]}{e^{26}m}\right)^{[N]}\geqq\frac{1}{N^2}\left(\frac{N-1}{e^{26}m}\right)^N>\frac{1}{N^2}\left(\frac{N}{2e^{26}m}\right)^N.$$

Further we have

$$\max_{\substack{m\leqq\nu\leqq m+N\\ \nu\text{ integer}}}|z_1^\nu+\dots+z_n^\nu|=\max_{\substack{m\leqq\nu\leqq m+N\\ \nu\text{ integer}}}m_1^\nu|\zeta_1^\nu+\dots+\zeta_n^\nu|\geqq$$
$$\geqq\max_{\substack{m\leqq\nu\leqq m+N\\ \nu\text{ integer}}}|\zeta_1^\nu+\dots+\zeta_n^\nu|>\frac{1}{N^2}\left(\frac{N}{2e^{26}m}\right)^N,$$

q. e. d.

LEMMA XIV. *For* $n'\leqq N'$, $\max(|w_1|,|w_2|,\dots,|w_{n'}|)\geqq 1$, $m'\geqq 56N'$ *we have*

$$\max_{\substack{m'\leqq\nu\leqq m'+2N'\\ \nu\text{ integer}}}|\Re(w_1^\nu+w_2^\nu+\dots+w_{n'}^\nu)|\geqq\frac{1}{8(N')^2}\left(\frac{N'}{e^{26}m'}\right)^{2N'}.$$

P r o o f. We apply lemma XIII with $n=2n'$, $m=m'$,

$z_1=w_1$, $z_2=\overline{w}_1,\dots,z_{2n'-1}=w_{n'}$, $z_{2n'}=\overline{w}_{n'}$; the conditions of this lemma are obviously satisfied. Thus we obtain

$$\frac{1}{4(N')^2}\left(\frac{N'}{e^{26}m'}\right)^{2N'}\leqq\max_{\substack{m'\leqq\nu\leqq m'+2N'\\ \nu\text{ integer}}}|w_1^\nu+\overline{w}_1^\nu+\dots+w_{n'}^\nu+\overline{w}_{n'}^\nu|=$$
$$=2\max_{\substack{m'\leqq\nu\leqq m'+2N'\\ \nu\text{ integer}}}|\Re(w_1^\nu+w_2^\nu+\dots+w_{n'}^\nu)|,$$

q. e. d.

2.9. Now we can prove our

THEOREM VI. *Suppose that there exists* $\alpha\geqq 2$, $0<\beta\leqq 1$, $A\geqq 1$ *and*

$$\tau=\max\left(e^{1120^2},\ e^{\frac{61^2\alpha^2}{\beta^2}e^{e^{\frac{96}{\beta}}\{400+81\ln\alpha+\ln(13A+24\alpha)\}}}\right)\tag{2.9.1}$$

such that for a $t_0 \geqslant \tau$ *and every* $t_0^\alpha \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N \leqslant e^{\ln^2 t_0}$ *the inequality*

$$\Big|\sum_{N' \leq p \leqslant N''} \cos(t_0 \ln p)\Big| \leqslant A \frac{N e^{23(\ln\ln N)^2}}{t_0^{\beta}} \tag{2.9.2}$$

holds. Then $\zeta(s) \neq 0$ *for*

$$t = t_0, \quad \sigma \geqslant 1 - e^{-10} \frac{\beta^3}{\alpha^2}.$$

Proof. We suppose the contrary, i. e. that our theorem is not true; then there exists a non-trivial root $\rho^* = \sigma^* + it^*$ such that

$$t^* \geqslant \tau, \quad \sigma^* \geqslant 1 - e^{-10} \frac{\beta^3}{\alpha^2}. \tag{2.9.3}$$

We define

$$s = 1 + \max\left(\frac{2\alpha}{\beta}(1-\sigma^*), \frac{1}{\sqrt{\ln t^*}}\right) + it^* \equiv 1 + \mu^* + it^*. \tag{2.9.4}$$

Thus we have evidently

$$0 < \mu^* \leqslant \frac{1}{4}. \tag{2.9.5}$$

Let k be an integer restricted for the present only by the condition

$$\alpha \ln t^* \leqslant k+2 \leqslant \left(\alpha + \frac{3}{\alpha}\right) \ln t^*. \tag{2.9.6}$$

By (2.9.1) we get

$$k+2 \geqslant \alpha \ln t^* \geqslant \alpha \ln \tau > 20, \quad k > 18. \tag{2.9.7}$$

Putting

$$e^{k+2} = \xi \tag{2.9.8}$$

we have obviously

$$(t^*)^\alpha \leqslant \xi \leqslant (t^*)^{\alpha + \frac{3}{\alpha}}, \quad \xi > e^{20}. \tag{2.9.9}$$

2.10. With *these* values of s, k and ξ we start from the identity of lemma IV; multiplying both sides by $\frac{1}{x} \ln^{k-1} \frac{x}{\xi}$ and integrating with respect to x from ξ to ∞ we obtain* using lemma VII (i)

$$\int_\xi^\infty \left(\sum_{n \geqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln \frac{n}{x}\right) \frac{\ln^{k-1} \frac{x}{\xi}}{x} dx = (k-1)! \left(\frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{k+2}} - \sum_\rho \frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+2}}\right).$$

---

* It would be easy to write this identity in the seemingly simpler form

$$\sum_{n \geqslant \xi} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln^{k+1} \frac{n}{\xi} = (k+1)! \left(\frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{k+2}} - \sum_\rho \frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+2}}\right).$$

But the form (3.10.1) seems to me more suitable for the treatment.

Taking real parts on both sides we obtain the fundamental identity

$$\int_{\xi}^{\infty} \Re\left(\sum_{n\geqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln\frac{n}{x}\right) \frac{\ln^{k-1}\frac{x}{\xi}}{x}\,dx = (k-1)!\left(\Re\frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{k+2}} - \right.$$

$$\left. -\Re\sum_{\rho}\frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}} - \Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+2}}\right). \qquad (2.10.1)$$

2.11. First step. The left side of (2.10.1) we estimate by means of lemma X putting $K=k$, $\eta=\xi$, $t_0=t^*$, $\sigma=1+\mu^*$. The conditions of these lemma are obviously satisfied except (2.5.4); but this is also fulfilled since $t^*\geqslant\tau>e^3$ and

$$1+\ln t_0 = 1+\ln t^* \leqslant \alpha\ln t^* - 2 \leqslant k = K \leqslant \left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\right)\ln t^* < 2\alpha\ln t_*^* = 2\alpha\ln t_*.$$

Thus we obtain

$$\left|\Re\frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{k+2}} - \Re\sum_{\rho}\frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}} - \Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+2}}\right| <$$

$$\leqslant (38A+96\alpha)\frac{\xi^{-\mu^*} e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^{\beta}(\mu^*)^k}. \qquad (2.11.1)$$

2.12. Second step. We estimate the first and third terms on the left roughly

$$\left|\Re\frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{k+2}}\right| < \frac{\xi^{-\mu^*}}{(\mu^*)^k(t^*)^2} < \frac{\xi^{-\mu^*}}{(\mu^*)^k(t^*)^{\beta}}$$

and

$$\left|\Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+2}}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{-2n-\sigma}}{(s+2n)^{k+2}} \leqslant \frac{\xi^{-\mu^*}}{(t^*)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^k}.$$

These and (2.11.1) results

$$\left|\Re\sum_{\rho}\frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}}\right| \leqslant (39A+96\alpha)\frac{\xi^{-\mu^*}e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^{\beta}(\mu^*)^k}. \qquad (2.12.1)$$

2.13. Third step. Now we estimate that part of the sum on the left for which $|t_\rho-t^*|\leqslant 2$. Taking in account (2.9.1), lemma III, (2.1.6) and the fact that the ρ's lie symmetrically to the real axis we obtain — denoting e^{e^9} by b_2 —

$$\left|\Re\sum_{\substack{\rho\\ |t_\rho-t^*|\geqslant 2}}\frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}}\right| \leqslant \sum_{t_\rho\geqslant t^*+2}\frac{\xi^{1-\sigma}}{|s-\rho|^{k+2}} + \sum_{t^*-2\geqslant t_\rho\geqslant b_2}\frac{\xi^{1-\sigma}}{|s-\rho|^{k+2}} +$$

$$+\sum_{b_2>t_\rho>-b_2}\frac{\xi^{1-\sigma}}{|s-\rho|^{k+2}} + \sum_{t_\rho\leqslant -b_2}\frac{\xi^{1-\sigma}}{|s-\rho|^{k+2}} \leqslant \xi^{-\mu^*}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(t^*+n+1)}{n^{k+2}} +$$

$$+\xi^{-\mu^*}\sum_{n=2}^{[t^*-b_2]}\frac{\ln(t^*-n)}{n^{k+2}}+2b_2^2\frac{\xi^{-\mu^*}}{(t^*-b_2)^{k+2}}+\xi^{-\mu^*}\sum_{n\geqslant b_2}\frac{\ln(t^*+n)}{(t^*+n)^{k+2}}<$$

$$<3\xi^{-\mu^*}\ln t^*\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{k+1}}+\xi^{-\mu^*}\left(\frac{2}{t^*}\right)^k<\xi^{-\mu^*}\ln t^*\left(\frac{3}{2^{k+1}}+3\int_2^{\infty}v^{-k-1}\ln v\,dv+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{t^*}\right)^k\right)<\xi^{-\mu^*}\ln t^*\left(\frac{2}{2^k}+6\frac{\ln 2}{k^2 2^k}\right)<\frac{3\xi^{-\mu^*}\ln t^*}{2^k}<\frac{\xi^{-\mu^*}e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^\beta}.$$

From this and (2.12.1) it follows — denoting $\rho=\sigma_\rho+it_\rho$ —

$$\left|\Re\sum_{\substack{\rho\\|t_\rho-t^*|<2}}\frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}}\right|\leqslant(40A+96\alpha)\frac{\xi^{-\mu^*}e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^\beta(\mu^*)^k}. \qquad (2.13.1)$$

Since

$$(s-\rho^*)^{k+2}=|s-\rho^*|^{k+2}=(1-\sigma^*+\mu^*)^{k+2}$$

multiplying on both sides we obtain

$$\left|\Re\sum_{\substack{\rho\\|t_\rho-t^*|<2}}\xi^{\rho-s}\left(\frac{s-\rho^*}{s-\rho}\right)^{k+2}\right|<$$

$$<(40A+96\alpha)\frac{\xi^{-\mu^*}e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^\beta}\left(\frac{(1-\sigma^*+\mu^*)^k}{\mu^*}\right)(1-\sigma^*+\mu^*)^2<$$

$$<(10A+24\alpha)\frac{\xi^{-\mu^*}e^{(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^\beta}\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^k, \qquad (2.13.2)$$

using (2.9.6).

Fourth step (simplified by Dr. St. Földes). We estimate that part of the remained sum on the left for which $2>|t_\rho-t^*|\geqslant 8\mu^*$. Then we have

$$|\xi^{\rho-s}|\leqslant\xi^{1-\sigma}=\xi^{-\mu^*},\quad\left|\frac{s-\rho^*}{s-\rho}\right|\leqslant\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{8\mu^*};$$

this together with lemma III (*ii*) results that this part is absolutely

$$<4\ln t^*\cdot\xi^{-\mu^*}\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^{k+2}\cdot\frac{1}{8^{k+2}}\leqslant$$

$$\leqslant\xi^{-\mu^*}\ln^2 t^*\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^k\frac{1}{(t^*)^{\alpha\ln 8}}<\frac{\xi^{-\mu^*}e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^\beta}\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^k.$$

From this and (2.13.2) it follows

$$\left|\Re\sum_{\substack{\rho\\|t_\rho-t^*|<8\mu^*}}\xi^{\rho-s}\left(\frac{s-\rho^*}{s-\rho}\right)^{k+2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant(11A+24\alpha)\frac{\xi^{-\mu^*}e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^\beta}\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^k. \qquad (2.13.3)$$

F i f t h   s t e p. We consider that part of the remained sum for which $\sigma_\rho \leqq 1-4\mu^*$. Proceeding similarly as at the fourth step we obtain

$$\left|\Re \sum_{\substack{\rho \\ |t_\rho - t^*| < 8\mu^* \\ \sigma_\rho \leqq 1-4\mu^*}} \xi^{\rho - s}\left(\frac{s-\rho^*}{s-\rho}\right)^{k+2}\right| \leqq \ln t^* \cdot \xi^{-5\mu^*}\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^{k+2} \cdot \frac{1}{k+2} <$$

$$< \frac{\xi^{-\mu^2}\ln^2 t^*}{(t^*)^3}\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^k < \frac{\xi^{-\mu^*} e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^3}\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^k;$$

comparing that with (2.13.3) we get

$$\left|\Re \sum_{\substack{\rho \\ |t_\rho - t^*| < 8\mu^* \\ \sigma_\rho > 1-4\mu^*}} \xi^{\rho - s}\left(\frac{s-\rho^*}{s-\rho}\right)^{k+2}\right| < (12A + 24\alpha)\,\frac{\xi^{-\mu^*} e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^3}\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^k.$$

Multiplying on both sides by $\xi^{1+\mu^*-\sigma^*}$ and taking in account $\xi = e^{k-2}$ we have

$$Z = \left|\Re \sum_{\substack{\rho \\ |t_\rho - t^*| < 8\mu^* \\ \sigma_\rho > 1-4\mu^*}} \left[e^{\rho-\rho^*}\left(\frac{s-\rho^*}{s-\rho}\right)\right]^{k+2}\right| \leqq$$

$$\leqq (12A + 24\alpha)\,\frac{\xi^{1-\sigma^*} e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^3}\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^k. \tag{2.13.4}$$

2.14. S i x t h   a n d   l a s t   s t e p. Hitherto k was *only* restricted by the condition (2.9.6). Now we shall estimate Z by a suitable choice of k *from below*; this will be performed by the aid of lemma XIV. The numbers $e^{\rho-\rho^*}\left(\frac{s-\rho^*}{s-\rho}\right)$ occurring in Z are independent of k and the same is true of their number; hence Z represents the real part of a power-sum of fixed complex numbers. We chose as w_ν'-s of the lemma XIV these numbers $e^{\rho-\rho^*}\left(\frac{s-\rho^*}{s-\rho}\right)$. If $\rho=\rho^*$, the corresponding w_ν is 1; thus the condition $\max_\nu |w_\nu| \geqq 1$ is fulfilled. The number n' of lemma XIV is obviously $= N(1-4\mu^*,\ t^*+8\mu^*) - N(1-4\mu^*,\ t^*-8\mu^*)$. Let

$$m' = \alpha \ln t^*. \tag{2.14.1}$$

To obtain N' of lemma XIV we need an upper estimation of n'; this will be done by the aid of lemma II with $\sigma'' = 1-4\mu^*$, $t'' = t^*$. Obviously we need only to verify that the condition $\frac{5}{6} \leqq \sigma'' \leqq 1 - \frac{1}{\sqrt{\ln t''}}$ is fulfilled; this is equivalent with

$$\frac{1}{4\sqrt{\ln t^*}} \leqq \mu^* \leqq \frac{1}{24}.$$

The first part of this follows from the definition of μ^*; the other part means

$$\max\left(\frac{2\alpha}{\beta}(1-\sigma^*),\ \frac{1}{\sqrt{\ln t^*}}\right) \leqslant \frac{1}{24}.$$

But from (2.9.3)it follows that

$$\frac{2\alpha}{\beta}(1-\sigma^*) < \frac{1}{24}$$

and from $t^* \geqslant \tau > e^{576}$ that also $\ln^{-\frac{1}{2}} t^* < \frac{1}{24}$. Thus lemma II may be applied and we obtain

$$n' < 16\mu^* \ln t^* + 3\ln\ln(t^*+1) + 5 < 16\left(\frac{2\alpha}{\beta}(1-\sigma^*) + \frac{1}{\sqrt{\ln t^*}}\right)\ln t^* +$$
$$+ 3\ln\ln(t^*+1) + 5 < \frac{32\alpha}{\beta}(1-\sigma^*)\ln t^* + 20\sqrt{\ln t^*} \equiv N'. \quad (2.14.2)$$

For the application we need also a rough estimation for N'; using (2.9.3) we have

$$N' < \ln t^*. \qquad (2.14.3)$$

Now we return to the application of lemma XIV. We have to verify that the condition $m' \geqslant 56N'$ is fulfilled. From the definitions of m' and N' in (2.14.1) and (2.14.2) it follows that this is equivalent to

$$\alpha \geqslant 1792\frac{\alpha}{\beta}(1-\sigma^*) + \frac{1120}{\sqrt{\ln t^*}}$$

but this is evidently satisfied using (2.9.3) and $\alpha \geqslant 2$. Thus lemma XIV may be applied; but we have to verify that the value of k whose existence will be assured by this lemma satisfies our restriction (2.9.6). This is certainly true if the interval $(m', m'+2N')$ is contained in $\left(\alpha\ln t^*, \left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\right)\ln t^*\right)$. But (2.14.1) says that this is true if $N' < \frac{\beta}{2\alpha}\ln t^*$ or — using (2.14.2) — if

$$\frac{32\alpha}{\beta}(1-\sigma^*) + \frac{20}{\sqrt{\ln t^*}} \leqslant \frac{\beta}{2\alpha}$$

and this is really true because of (2.9.3). Hence we may choose for $k+2$ that value ν_0 of ν whose existence is assured by lemma XIV and we get [see also (2.14.3)]

$$|Z| > \frac{1}{8\ln^2 t^*}\left(\frac{32(1-\sigma^*)}{\beta e^{26}} + \frac{20}{\alpha e^{26}\sqrt{\ln t^*}}\right)^{\frac{64\alpha}{\beta}(1-\sigma^*)\ln t^* + 40\sqrt{\ln t^*}} >$$
$$> \frac{1}{8\ln^2 t^*}\left(\frac{32(1-\sigma^*)}{\beta e^{26}}\right)^{\frac{64\alpha}{\beta}(1-\sigma^*)\ln t^*}\left(\frac{1}{\alpha e^{24}\sqrt{\ln t^*}}\right)^{40\sqrt{\ln t^*}} >$$
$$> (t^*)^{-\frac{64\alpha}{\beta}(1-\sigma^*)\ln\frac{\beta e^{26}}{32(1-\sigma^*)}}\, e^{-41\sqrt{\ln t^*}\left(24+\ln\alpha+\frac{1}{2}\ln\ln t^*\right)}.$$

Comparing this with (2.13.4.) we obtain

$$(t^*)^{-\frac{64\alpha}{\beta}(1-\sigma^*)\ln\frac{\beta e^{26}}{32(1-\sigma^*)}} e^{-41\sqrt{\ln t^*}\left(24+\ln\alpha+\frac{1}{2}\ln\ln t^*\right)} <$$

$$< (12A+24\alpha)\frac{e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^3}\left(e^{1-\sigma^*}\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^{k+2}. \qquad (2.14.4)$$

Now we consider $\left(\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)$. If $\mu^*=\frac{2\alpha}{\beta}(1-\sigma^*)$ then

$$\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}=1+\frac{\beta}{2\alpha}<e^{\frac{\beta}{2\alpha}};$$

if $\mu^*=\frac{1}{\sqrt{\ln t^*}}$, then from the definition of μ^*

$$\frac{2\alpha}{\beta}(1-\sigma^*)\leq\frac{1}{\sqrt{\ln t^*}}=\mu^*, \quad \frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\leq 1+\frac{\beta}{2\alpha}<e^{\frac{\beta}{2\alpha}}.$$

In any case from (2.9.6)

$$\left(e^{1-\sigma^*}\frac{1-\sigma^*+\mu^*}{\mu^*}\right)^{k+2}<(t^*)^{\left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1-\sigma^*+\frac{\beta}{2\alpha}\right)}$$

and comparing with (2.14.4)

$$(t^*)^{3-\frac{64\alpha}{\beta}(1-\sigma^*)\ln\frac{\beta e^{26}}{32(1-\sigma^*)}-\left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1-\sigma^*+\frac{\beta}{2\alpha}\right)}<$$

$$<(12A+24\alpha)\,e^{98(\ln\ln t^*)^2+41\sqrt{\ln t^*}\left(24+\ln\alpha+\frac{1}{2}\ln\ln t^*\right)}. \qquad (2.14.5)$$

Since for $\alpha\geq 2$ and $0<\beta\leq 1$ and using (2.9.3)

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1-\sigma^*+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\leq\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(1-\sigma^*+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\leq$$

$$\leq\frac{5\alpha}{4}\left(1-\sigma^*+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=\frac{5}{4}\alpha(1-\sigma^*)+\frac{5}{8}\beta<\frac{2}{3}\beta$$

further taking in account lemma VI we get from (2.14.5)

$$(t^*)^{\frac{\beta}{12}}<(12A+24\alpha)\,e^{98(\ln\ln t^*)^2+(162+41\ln\alpha)\sqrt{\ln t^*}\ln\ln t^*}<$$

$$<(12A+24\alpha)\,e^{(100+41\ln\alpha)\sqrt{\ln t^*}\ln\ln t^*}.$$

But since $t^*\geq\tau$ this contradicts to lemma V, q. e. d.

Chapter III

3. 1. This chapter will be much easier than the preceding one and deals with the «inversion» of theorem VI. Throughout this chapter we denote the complex variable by $w = u + iv$. We prove the following

THEOREM VII. *Let us suppose that Riemann's zeta-function does not vanish in the parallelogramm* $u > \vartheta_1$, $\tau_1 < v \leqslant \tau_1 + \tau_1^{\gamma_1}$, *where* $\gamma_1 > 0$ *is fixed,* $\frac{1}{2} \leqslant \vartheta_1 < 1$ *and*

$$\tau_1 \geqslant \max\left(100, 30^{\frac{1}{\gamma_1}}\right). \tag{3.1.1}$$

Then for every t *for which*

$$\tau_1 + \frac{1}{4}\tau_1^{\min(1,\gamma_1)} \leqslant t \leqslant \tau_1 + \frac{3}{4}\tau_1^{\gamma_1} \tag{3.1.2}$$

and every N, N', N'' *with*

$$t^{\frac{\min(1,\gamma_1)}{1-\vartheta_1}} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N \tag{3.1.3}$$

the inequality

$$\left|\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p}\right| < \frac{400}{\min(1, \gamma_1^2)} \cdot \frac{N \ln^3 N}{t^{\min(1,\gamma_1)}} \tag{3.1.4}$$

holds.

Proof. We start from the well-known integral-formula [([14]], p. 111]

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1 - iT}^{\delta_1 + iT} \frac{y^w}{w}\,dw - \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}\right| < \frac{4y^{\delta_1}}{\pi\,|\ln y|} \cdot \frac{1}{T} \quad \text{for} \quad \begin{matrix} y > 1 \\ y = 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix} \tag{3.1.5}$$

if $T > 1$, $\delta_1 > 0$. Hence for $\delta_1 = 1 + \frac{1}{\ln x}$, $x = [x] + \frac{1}{2} > e^3$, $T > 1$ we have

$$\left|\sum_{n<x} \frac{\Lambda(n)}{n^{it}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1 - iT}^{\delta_1 + iT} \frac{x^w}{w}\frac{\zeta'}{\zeta}(w + it)\,dw\right| \leqslant \frac{4x}{T}\sum_n \frac{\ln n}{n^{\delta_1}\left|\ln \frac{[x]+\frac{1}{2}}{n}\right|}.$$

Using the inequality valid for $-\frac{1}{2} \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}$

$$|\ln(1 + v)| > \frac{3}{5}|v|$$

we may estimate the expression on the right as follows:

$$\sum_n \frac{\ln n}{n^{\delta_1}\left|\ln \frac{[x]+\frac{1}{2}}{n}\right|} \leqslant \sum_{n \leqslant \frac{1}{2}[x]} \frac{\ln n}{\frac{3}{5}n} + \frac{5}{3}\ln 2x \sum_{\frac{1}{2}[x] < n \leqslant 2x} \frac{1}{n^{\delta_1 - 1}\left|[x] + \frac{1}{2} - n\right|} +$$

$$+ \frac{5}{3}\sum_{n > 2x} \frac{\ln n}{n^{\delta_1}} < \frac{5}{3}\ln^2 x + \frac{10}{3}\ln 2x + \frac{10}{3}\ln 2x \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} + 1 + \int_{2x}^{\infty} r^{-\delta_1}\ln r\,dr <$$

$$< 9\ln^2 2x < 15\ln^2 x.$$

Hence

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1-iT}^{\delta_1+iT}\frac{x^w}{w}\frac{\zeta'}{\zeta}(w+it)\,dw+\sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{n^{it}}\right|<\frac{60\,x\ln^2 x}{T}. \tag{3.1.6}$$

3.2. Let now v_0 be any value for which

$$\tau_1+2\leqslant v_0\leqslant\tau_1+\tau_1^{\gamma_1}-2 \tag{3.2.1}$$

and let us consider the function $\frac{\zeta(w)}{\zeta(2+iv_0)}$ in the circle $|w-2-iv_0|\leqslant\leqslant 2-\vartheta_1$. Taking in account (2.2.1) we have in this circle

$$\left|\frac{\zeta(w)}{\zeta(2+iv_0)}\right|<3(v_0+2)^{\frac{1-\vartheta_1}{2}}\ln(v_0+2)<5v_0^{\frac{1-\vartheta_1}{2}}\ln v_0. \tag{3.2.2}$$

But the function $h(w)=\ln\frac{\zeta(w)}{\zeta(2+iv_0)}$ is, according to our hypothesis, regular for $|w-2-iv_0|<2-\vartheta_1$ further in this circle

$$h(2+iv_0)=0,\quad \Re h(2+iv_0)\leqslant\frac{1}{2}\ln v_0+\ln\ln v_0+\ln 5<3\ln v_0.$$

Thus Caratheodory's theorem gives for the circle $|w-2-iv_0|\leqslant 2-\vartheta_1-\frac{1}{\ln x}$

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(w)\right|=|h'(w)|\leqslant 3\ln v_0\ln^2 x\leqslant 3\ln(v+2)\ln^2 x; \tag{3.2.3}$$

this estimation holds certainly for $u\geqslant\vartheta_1+\frac{1}{\ln x}$; $\tau_1+2\leqslant v\leqslant\tau_1+\tau_1^{\gamma_1}-2$. We choose further

$$T=\frac{1}{10}t^{\min(1,\gamma_1)}\,(>1). \tag{3.2.4}$$

Now we prove that the parallelogramm

$$\left\{\delta_1+i(t\pm T),\ \vartheta_1+\frac{1}{\ln x}+i(t\pm T)\right\}$$

lies entirely in the supposed domain of regularity of $\frac{x^{w-it}}{w-it}\frac{\zeta'}{\zeta}(w)$. This is a consequence of the inequalities

$$t-T=t-\frac{1}{10}t^{\min(1,\gamma_1)}\geqslant\tau_1+\frac{1}{4}\tau_1^{\min(1,\gamma_1)}-$$
$$-\frac{1}{10}\left(\tau_1+\frac{1}{4}\tau_1^{\min(1,\gamma_1)}\right)^{\min(1,\gamma_1)}\geqslant$$
$$>\tau_1+\frac{1}{4}\tau_1^{\min(1,\gamma_1)}-\frac{1}{10}\left(\frac{5}{4}\tau_1\right)^{\min(1,\gamma_1)}\geqslant\tau_1+\frac{1}{8}\tau_1^{\min(1,\gamma_1)}>\tau_1+2$$

further

$$t+T=t+\frac{1}{10}\tau^{\min(1,\gamma_1)}<\left(\tau_1+\frac{3}{4}\tau^{\gamma_1}\right)+\frac{1}{10}\left(\tau_1+\frac{3}{4}\tau^{\gamma_1}\right)^{\min(1,\gamma_1)}<$$
$$\leqslant\tau_1+\frac{3}{4}\tau^{\gamma_1}+\frac{1}{10}\left(\frac{7}{4}\tau_1^{\max(1,\gamma_1)}\right)^{\min(1,\gamma_1)}=$$
$$=\tau_1+\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{10}\left(\frac{7}{4}\right)^{\min(1,\gamma_1)}\right]\tau_1^{\gamma_1}\leqslant\tau_1+\frac{37}{40}\tau_1^{\gamma_1}<\tau_1+\tau_1^{\gamma_1}-2.$$

3.3. Now we apply Cauchy's theorem to the function

$$\frac{x^w}{w}\frac{\zeta'}{\zeta}(w+it)$$

and the parallelogramm $\left\{\vartheta_1 \pm iT,\ \vartheta_1 + \frac{1}{\ln x} \pm iT\right\}$. We get from (3.1.6) and (3.2.4)

$$\left|\sum_{n<x} \frac{\Lambda(n)}{n^{it}}\right| < \frac{600\, x \ln^2 x}{t^{\min(1,\gamma_1)}} + |I_1| + |I_2| + |I_3| \tag{3.3.1}$$

where I_1 and I_2 denote the integrals on the upper resp. lower side, I_3 on the left side. Evidently — using (3.2.3) — we have

$$|I_1| \leqslant 2\frac{1}{2\pi}\frac{x^{\vartheta_1}}{T}\cdot 3\ln(t+T+2)\ln^2 x \leqslant \frac{30x \ln^2 x \ln\left(t+2+\frac{t}{10}\right)}{t^{\min(1,\gamma_1)}} <$$

$$< 60\frac{x \ln^2 x \ln t}{t^{\min(1,\gamma_1)}}; \tag{3.3.2}$$

the same is true for $|I_2|$. For $|I_3|$ we get

$$|I_3| \leqslant \frac{1}{2\pi} e x^{\vartheta_1}\cdot 3\ln(t+T+2)\ln^2 x \cdot 2\int_0^T \frac{dv}{\left|\vartheta_1 + \frac{1}{\ln x} + iv\right|} <$$

$$< 6x^{\vartheta_1}\ln t \ln^2 x \ln T < 6x^{\vartheta_1}\ln^2 t \ln^2 x. \tag{3.3.3}$$

Thus if

$$x \geqslant \max\left(30, t^{\frac{\min(1,\gamma_1)}{1-\vartheta_1}}\right) \tag{3.3.4}$$

we have

$$\ln t < \frac{1}{2\min(1,\gamma_1)}\ln x,$$

$$x^{\vartheta_1} \leqslant \frac{x}{t^{\min(1,\gamma_1)}};$$

collecting all these we obtain from (3.3.1)

$$\left|\sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{n^{it}}\right| < \frac{600\, x\ln^2 x}{t^{\min(1,\gamma_1)}} + \frac{60}{\min(1,\gamma_1)}\cdot\frac{x\ln^3 x}{t^{\min(1,\gamma_1)}} +$$

$$+\frac{2}{\min(1,\gamma_1^2)}\frac{x\ln^4 x}{t^{\min(1,\gamma_1)}} < \frac{90}{\min(1,\gamma_1^2)}\cdot\frac{x\ln^4 x}{t^{\min(1,\gamma_1)}}. \tag{3.3.5}$$

Since

$$\left|\sum_{p^k\leqslant x,\ k\geqslant 2}\Lambda(n)n^{-it}\right| < \ln x\frac{5}{3}\sqrt{x}\ln x \leqslant \frac{5}{3}x^{\vartheta_1}\ln^2 x \leqslant \frac{5}{3}\frac{x\ln^2 x}{t^{\min(1,\gamma_1)}}$$

this and (3.3.5) give

$$\left|\sum_{p\wedge x}\ln p\cdot p^{-it}\right| < \frac{91}{\min(1,\gamma_1^2)}\cdot\frac{x\ln^4 x}{t^{\min(1,\gamma_1)}}.$$

Let us drop the restriction x being $=\frac{1}{2}+$ integer; then

$$\left|\sum_{p\leq x} \ln p \cdot p^{-it}\right| < \frac{400}{\min(1, \gamma_1^2)} \cdot \frac{x \ln^4 x}{t^{\min(1,\gamma_1)}}. \tag{3.3.6}$$

Applying this with $x=N'$ (resp. $x=N''$) we get

$$\left|\sum_{N'\leq p\leq N''} \ln p \cdot p^{-it}\right| < \frac{200}{\min(1, \gamma_1^2)} \frac{N \ln^4 N}{t^{\min(1,\gamma_1)}}.$$

Finally, a partial summation furnishes

$$\left|\sum_{N'\leq p\leq N''} e^{-it\ln p}\right| < \frac{400}{\min(1, \gamma_1^2)} \cdot \frac{N \ln^3 N}{t^{\min(1,\gamma_1)}},$$

q. e. d.

Chapter IV

4.1. In this chapter we collect a number of results concerning inequalities for sums of the form $\sum \cos(t \ln p)$ or $\sum e^{it\ln p}$. Some other results which are obtained by Vinogradov's method without the slightest new idea we give in the appendix.

As to the inequality (2.1.5) it follows from theorem VI that if this inequality is for *every* $t_0 \geqslant \tau$ fulfilled then the zeta-function does not vanish for $t > \tau_1$, $\sigma \geqslant 1-e^{-10\frac{\beta^3}{\alpha^2}}$. It is easy to show that for *this* consequence a slightly weaker inequality suffices; it is enough that

$$\min_{t\leq x\leq t+t^{-\lambda}} \left|\sum_{N'\leq p\leq N''} \cos(x \ln p)\right| \leqslant A \frac{N e^{23(\ln\ln N)^2}}{t^\lambda} \tag{4.1.1}$$

if $\alpha \geqslant 2$, $A > 1$, $\lambda > 0$ and

$$b_3(\alpha, \lambda, A) \leqslant t^\alpha \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N \leqslant e^{\ln^2 t}.$$

This is rather trivial since for any $t \leqslant x' < x'' \leqslant t+t^{-\lambda}$

$$\left|\sum_{N'\leq p\leq N''} \cos(x' \ln p) - \sum_{N'\leq p\leq N''} \cos(x'' \ln p)\right| \leqslant$$
$$\leqslant (x''-x') \max_x \left|\sum_{N'\leq p\leq N''} \ln p \cdot \sin(x \ln p)\right| < \frac{N \ln N}{t^\lambda},$$

i. e. from this and (4.1.1) the inequality (2.1.5) follows with $\beta=\lambda$. Though I can not prove that the set of t_0-values is dense enough to satisfie (4.1.1) nevertheless such t_0-values are «rather» dense. More exactly

4.2. THEOREM IX*. *For* $0<\lambda<1$, $3 \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' \leqslant N'' \leqslant N$, $t_0>0$ *we have*

$$\min_{t_0\leq x\leq t_0+t_0^\lambda} \left|\sum_{N'\leq p\leq N''} \cos(x \ln p)\right| < \frac{4N}{t^\lambda}.$$

* For theorem VIII see chapter I.

This theorem is also quite trivial. We have

$$L = \left| \int_{t_0}^{t_0+t_0^\lambda} \left\{ \sum_{N' \leq p \leq N''} \cos(x \ln p) \right\} dx \right| =$$

$$= \left| \left[\sum_{N' \leq p \leq N''} \frac{1}{\ln p} \sin(x \ln p) \right]_{x=t_0}^{x=t_0+t_0^\lambda} \right| < 4N. \qquad (4.1.2)$$

If $\sum_{N' \leq p \leq N''} \cos(x \ln p)$ vanishes in $t_0 \leqslant x \leqslant t_0 + t_0^\lambda$ we have nothing to prove; if not we obtain

$$L \geqslant t_0^\lambda \min_{t_0 \leq x \leq t_0 + t_0^\lambda} \left| \sum_{N' \leq p \leq N''} \cos(x \ln p) \right|. \qquad (4.1.3)$$

(4.1.2) and (4.1.3) prove our theorem.

4.2. As we will see in the appendix, Vinogradov's method gives useful estimates for sums of the type $\sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it \ln^{1+\gamma} p}$ if $-\frac{3}{4} \leqslant \gamma \leqslant 1$; this fails only for $\gamma = 0$. As to these results I refer to the appendix. It is very probable that a *purely technical* modification of the method will give the proof of the following

Conjecture. *There are* $\alpha_1 \geqslant 2$, $0 < \beta_1 < 1$, $\gamma_1 = \gamma_1(\alpha_1, \beta_1)$ *and* $b_5 = b_5(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $b_6 = b_6(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *such that for*

$$b_5 \leqslant t^{\alpha_1} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

we have

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it \ln^{\beta_1} p} \right| < b_6 \frac{N e^{23(\ln \ln N)^2}}{|t|^{\frac{1}{2}+\gamma_1}} .$$

From this I can obtain the inequality (1.4.2) and consequently the quasi-riemannian hypothesis. For the sake of simplicity I treat only the case $\beta_1 = \frac{1}{2}$; this will be done by the

THEOREM X. *If there are* $\alpha_1 \geqslant 2$, $0 < \delta_1 < \frac{1}{2}$, $b_5 = b_5(\alpha_1, \delta_1) > 100$ *and* $b_6 = b_6(\alpha_1, \delta_1)$ *and*

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{i\lambda \sqrt{\ln p}} \right| < b_6 \frac{N e^{22(\ln \ln N)^2}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}+\delta_1}} \qquad (4.1.4)$$

for every

$$|b_5| \leqslant |\lambda|^{\alpha_1} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N \qquad (4.1.5)$$

then $\zeta(s)$ *has in the half-plane* $\sigma > 1 - e^{-10} \frac{\delta_1^3}{(\alpha_1+1)^2}$ *only a finite number of roots.*

Proof. According to theorem III it is sufficient to show that from (4.1.4) it follows

$$\Big|\sum_{N'<p\leq N''} e^{it\ln p}\Big| < b_6 \frac{N e^{23(\ln\ln N)^2}}{|t|^\delta} \tag{4.1.6}$$

for

$$b_5' \leq |t|^{\alpha_1+1} \leq \frac{N}{2} \leq N' < N'' \leq N. \tag{4.1.7}$$

4.2. To prove this we use the equality valid for $X>0$, $Y>0$

$$e^{-ix^2}\sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{-ix^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iv^2}\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(v^2-2vx)}\,dv = \int_{-\infty}^{x-Y} + \int_{x-Y}^{x+X} + \int_{x+X}^{\infty}$$

from which

$$\Big|\int_{x-Y}^{x+X} e^{i(v^2-2vx)}\,dv - e^{-ix^2}\sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\Big| \leq \Big|\int_{x+X}^{\infty} e^{i(v^2-2vx)}\,dv\Big| +$$

$$+\Big|\int_{-\infty}^{x-Y} e^{i(v^2-2vx)}\,dv\Big| = \Big|\int_{X}^{\infty} e^{iv^2}dv\Big| + \Big|\int_{-\infty}^{-Y} e^{iv^2}dv\Big| < \frac{4}{\min(X, Y)}, \tag{4.2.1}$$

according to the second mean-value theorem.

4.3. We apply (4.2.1) with

$$x = \sqrt{t}\sqrt{\ln p}, \quad x+X = 2\sqrt{t\ln N}, \quad x-Y = \frac{1}{2}\sqrt{t\ln\frac{N}{2}};$$

we have

$$X \geq 2\sqrt{t\ln N} - \sqrt{t\ln N} = \sqrt{t\ln N},$$

$$Y \geq \sqrt{t\ln\frac{N}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{t\ln\frac{N}{2}} > \frac{1}{4}\sqrt{t\ln N}.$$

Thus we obtain by summing for the p's

$$\Big|\sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{N'<p\leq N''} e^{-it\ln p} - \int_{\frac{1}{2}\sqrt{t\ln\frac{N}{2}}}^{2\sqrt{t\ln N}} e^{iv^2}\Big(\sum_{N'<p\leq N''} e^{-i2v\sqrt{t}\sqrt{\ln p}}\Big)\,dv\Big| < \frac{16N}{\sqrt{t}}. \tag{4.3.1}$$

From (4.1.7) putting

$$b_5' = \max\Big(b_5^{\frac{\alpha_1+1}{\alpha_1}},\ e^{2\cdot 4^{\alpha_1}[\alpha_1]!(\alpha_1+1)^{\frac{\alpha_1}{2}}}\Big) \tag{4.3.2}$$

we have

$$\Big(t\sqrt{\ln\frac{N}{2}}\Big)^{\alpha_1} > t^{\alpha_1} > (b_5')^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}} \geq b_5 \tag{4.3.3}$$

and since the function $x\ln^{-\frac{\alpha_1}{2}}x$ increases monotonically for $x \geq e^{\frac{\alpha_1}{2}}$ and for $N \geq 2t^{\alpha_1+1}$ $2t^{\alpha_1+1} \geq e^{\frac{\alpha_1}{2}}$

$$\frac{N}{2\ln^{\frac{\alpha_1}{2}} N} > \frac{t^{\alpha_1+1}}{2(\alpha_1+1)^{\frac{\alpha_1}{2}}\ln^{\frac{\alpha_1}{2}} t} = \frac{(4t)^{\alpha_1}}{2.4^{\alpha_1}(\alpha_1+1)^{\frac{\alpha_1}{2}}} \cdot \frac{t}{\ln^{\frac{\alpha_1}{2}} t} >$$

$$> (4t)^{\alpha_1} \frac{\ln t}{2.4^{\alpha_1}(\alpha_1+1)^{\frac{\alpha_1}{2}}[\alpha_1]!} > (4t)^{\alpha_1}$$

i. e.

$$(4t\sqrt{\ln N})^{\alpha_1} \leqslant \frac{N}{2}. \qquad (4.3.4)$$

Using (4.3.3) and (4.3.4) we can see that for the range of the integration in (4.3.1)

$$b_5 \leqslant \left(t\sqrt{\ln \frac{N}{2}}\right)^{\alpha_1} \leqslant (2v\sqrt{t})^{\alpha_1} \leqslant (4t\sqrt{\ln N})^{\alpha_1} \leqslant \frac{N}{2}$$

which means that (4.1.4) can be used. Then it follows from (4.3.1)

$$\left|\sum_{N'\leq p\leq N''} e^{-i2v\sqrt{t}\sqrt{\ln p}}\right| < b_6 \frac{Ne^{22(\ln\ln N)^2}}{(2v)^{\frac{1}{2}+\delta} t^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}}$$

and

$$\left|\sum_{N'<p\leqslant N''} e^{-it\ln p}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{16N}{\sqrt{t}} + b_6 \frac{Ne^{22(\ln\ln N)^2}}{\sqrt{2}t^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{t\ln\frac{N}{2}}}^{2\sqrt{t\ln N}} v^{-\frac{1}{2}-\delta}dv\right) <$$

$$< b_6' \frac{Ne^{23(\ln\ln N)^2}}{|t|^{\delta}}.$$

q. e. d.

4.4. The methods which we used here resp. will use in the appendix for the investigation of the sum $\sum_{N'<p\leqslant N''} e^{it\ln p}$ are independent of the theory of the zeta-function. Now for the sake of completeness we prove using the theory of zeta-function that the «probability» of the truth of such inequalities is positive. We could prove that this probability is 1, i. e. our inequalities are for almost all t — exactly for every t on $0 \leqslant t \leqslant T$ except a set the measure of which is $o(T)$ — true; but we confine ourselves to the proof of the first statement. First we need the following simple

LEMMA XV. *Let us given on the interval* $0 \leqslant x \leqslant r$ *the different points* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *where* $n < \frac{1}{2}\sqrt{r}$ *and we construct the points* $P_1', P_1'', P_2', P_2'', \ldots, P_n', P_n''$ *by*

$$\overline{OP'_{\nu-1}} < \overline{OP''_\nu} < \overline{OP_\nu} < \overline{OP'_\nu}, \quad \overline{P''_\nu P_\nu} = \overline{P_\nu P'_\nu} = \frac{1}{2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

We omit first those parts of the intervals $\overline{P''_\nu P'_\nu}$ *which lie in* $0 \leqslant x \leqslant r$ *and then those of the remained intervals* $\overline{P'_\nu P''_{\nu+1}}$ *for which* $\overline{P'_\nu P''_{\nu+1}} < \sqrt{r}$. *Then the total lenght of those intervals which remain after this two operation is* $> \frac{1}{2} r$.

Proof. Denoting the remaining intervals by $d_1, d_2, \ldots$ we have

$$r \leqslant \sum_j d_j + \sum_{\overline{P'_\nu P''_{\nu+1}} < \sqrt{r}} \overline{P'_\nu P''_\nu} + \sum_\nu \overline{P''_\nu P'_\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j d_j + \sqrt{r}(n-1) + n < \sum_j d_j + \frac{r}{2},$$

q. e. d.

Also we shall make use of the well-known theorem of Carlson* [15] in the following form. There is a numerical $C > 900^2$ such that for $T > C$ and $\frac{23}{25} \leqslant \vartheta_1 < 1$

$$N(T) < \frac{1}{2}\sqrt{T}. \tag{4.4.1}$$

4.5. Now we prove our

THEOREM XI. *Let* $T > C > 900^2$ *and*

$$t \leqslant T. \tag{4.5.1}$$

Then the measure of the t's satisfying (4.5.1) *and for which by every*

$$t^{\frac{25}{2}} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

the inequality

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p} \right| < 1600 \frac{N \ln^3 N}{\sqrt{|t|}}$$

hold is greater than $\frac{1}{8} T$.

Proof. If there are no roots in the parallelogram $1 > \sigma \geqslant \frac{23}{25}$, $0 < t \leqslant T$, we have, according to theorem VII, nothing to prove. If there are such roots we project them on the imaginary axis; these will be the P'_νs of lemma XV and the condition $n < \frac{1}{2}\sqrt{T}$ is because of (4.4.1) fulfilled. Then lemma XV assures the existence of non-overlapping intervals any of them has a length $\geqslant \sqrt{T}$ the total-lenghth of whose is $> \frac{1}{2} T$ and no of them contains an ordinata of root. Omitting at most one such interval we may suppose that all these intervals lie in $\sqrt{T} \leqslant v \leqslant T$. We apply theorem VII for every such interval (a_ν, b_ν) with

---

* We do not use of course his theorem in his full generality.

$$\vartheta_1 = \frac{23}{25}, \quad \tau_1 = a_\nu, \quad \gamma_\nu > \frac{1}{2}.$$

The condition (3.1.1) is fulfilled since

$$a_\nu \geqslant \sqrt{T} \geqslant C > 900 \geqslant \max(100, 30^{\frac{1}{\gamma_\nu}}).$$

Then theorem VII assures the existence of intervals of the total-length $> \frac{1}{2}\left(\frac{T}{2} - \sqrt{T}\right) > \frac{1}{8} T$ such that for the t's lying here for every

$$t^{\frac{25}{2}} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

the inequality

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p} \right| < 1600 \frac{N \ln^3 N}{\sqrt{t}}$$

holds, q. e. d.

Appendix

5.1. Vinogradov ([16]) proved in 1941 the following general theorem. If in the interval $4 \leqslant \frac{N}{2} \leqslant x \leqslant N$ $f(x)$ is three-times continuously derivable and here (with his notation)

$$\frac{1}{A} \ll |f''(x)| \ll \frac{1}{A}, \quad \frac{1}{A} \ll |xf'''(x) + 2f''(x)| \ll \frac{1}{A} \tag{5.1.1}$$

then for every $\varepsilon > 0$, $\frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$ the following appraisal holds:

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{2\pi i f(p)} \right| = O(N^{1+\varepsilon}) \left(\frac{N}{A} + \frac{A}{N^2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

To get an orientation let $0 < \eta < \frac{1}{3}$ fixed and $f(x) = \frac{t}{2\pi} x^\eta$; then the conditions (5.1.1) are with $A = \frac{1}{t} N^{2-\eta}$ fulfilled and we obtain

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{itp^\eta} \right| = O(N^{1+\varepsilon}) \left(tN^{\eta-1} + \frac{N^{-\eta}}{t} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

If $N > t^{\frac{2}{1-2\eta}}$ this gives the inequality

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{itp^\eta} \right| = O\left(N^{1-\frac{\eta}{8}} t^{-\frac{1}{4}} \right)$$

if only $t^{\frac{2}{1-2\eta}} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$. But for the function $f(x) = \frac{t}{2\pi} \ln^\gamma x$ — and that is what we need — the general conditions of Vinogradov's theorem are not fulfilled for

$$f''(x)=\frac{\gamma t}{2\pi}\left(\frac{\ln^{\gamma-1}x}{x}\right)'=\frac{\gamma t}{2\pi}\,\frac{(\gamma-1)\ln^{\gamma-2}x-\ln^{\gamma-1}x}{x^2},\qquad A=\frac{N^2}{t\ln^{\gamma-1}N},$$

$$xf'''(x)+2f''(x)=\frac{1}{x}(x^2f''(x))'=\frac{t\gamma(\gamma-1)}{2\pi}\,\frac{(\gamma-2)\ln^{\gamma-3}x-\ln^{\gamma-2}x}{x^2},$$

$$\min_x |xf'''(x)+2f''(x)| \sim \frac{t\gamma(\gamma-1)}{2\pi}\,\frac{\ln^{\gamma-2}N}{N^2}$$

which is of lower order than $\frac{1}{A}$. For $f(x)=\frac{t}{2\pi}\ln(N+x)$ his theorem is applicable with $A=\frac{N^2}{t}$ and it results

$$\left|\sum_{N'\leq p\leq N''} e^{it\ln(p+N)}\right|=O(N^{1+\varepsilon})\left(\frac{t}{N}+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{4}}=O(N^{1+\varepsilon}t^{-\frac{1}{4}})$$

if $N\geqslant t^2$; but this is useless because of the ε in the exponent. However following his method we get a slightly more general theorem which enables us to get non-trivial estimations for the sums

$$\left|\sum_{N'\leq p\leq N''} e^{it\ln^{1+\gamma}p}\right| \quad (\gamma\neq 0),\qquad \left|\sum_{N'\leq p\leq N''} e^{it\ln p(\ln\ln p)^{\gamma}}\right| \quad (\gamma\neq 0),$$

$$\sum_{N'\leq p\leq N''} e^{it\ln(N+p)}.$$

This theorem runs as follows

THEOREM XII. *Let $f(x)$ be three-times continuously derivable in $2e^{e^7}\leqslant\frac{N}{2}\leqslant x\leqslant N$, further here*

$$|f''(x)|>0, \tag{5.1.2}$$

$$|xf'''(x)+2f''(x)|>0, \tag{5.1.3}$$

$$\frac{1}{A}\leqslant|f'(x)|<\frac{c_1}{A},\qquad c_1>1 \tag{5.1.4}$$

$$\frac{c_2}{A\ln^2N}\leqslant|xf'''(x)+f'(x)|\leqslant\frac{c_3}{A} \tag{5.1.5}$$

supposed that

$$N\ln^2N\geqslant A>N^{\frac{8}{9}}. \tag{5.1.6}$$

Then for every $\frac{N}{2}\leqslant N'<N''\leqslant N$ we have

$$\left|\sum_{N'\leq p\leq N''} e^{2\pi i f(p)}\right|<\left(24+\frac{5c_1^2}{8}+\frac{8}{\sqrt{c_2}}+4c_3\right)\sqrt{NA}\,e^{22(\ln\ln N)^2}.$$

5.2. For the proof of this theorem we need the following well-known

LEMMA XVI *. *If $F(x)$ is twice continuously derivable for $a\leqslant x\leqslant b$ and here*

---

* See the papers of Van der Corput, Kuzmin and Heilbronn.

$$|F''(x)| > 0, \quad B \leqslant |F'(x)| \leqslant D \tag{5.2.1}$$

then we have

$$|S| \equiv \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{iF(n)} \right| < 1 + \frac{4}{B} + \frac{D}{4} + \frac{D^2}{8}(b-a).$$

Proof of theorem XII. Let $p_1, p_2, \ldots, p_r$ denote the primes not exceeding $\sqrt{N}$, $p_1, p_2, \ldots, p_r = H$; as well-known if $\frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$

$$Z_0 \equiv \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{2\pi i f(p)} = \sum_{\substack{d/H \\ d \leq N''}} \mu(d) \sum_{\substack{n \\ \frac{N'}{d} \leq n \leq \frac{N''}{d}}} e^{\pi i f(dn)} \equiv \sum_{\substack{d/H \\ d \leq N}} \mu(d) S_d. \tag{5.2.2}$$

For the estimation of S_d we use lemma XVI with

$$F(x) = f(dx), \quad B = \frac{d}{A}, \quad D = c_1 \frac{d}{A}, \quad a = \frac{N'}{d}, \quad b = \frac{N''}{d}$$

then we have using (5.1.6) and $c_1 > 1$

$$|S_d| < 1 + \frac{4A}{d} + \frac{c_1}{4}\frac{d}{A} + \frac{c_1^2}{8}\frac{Nd}{A^2} < 1 + \frac{4A}{d} + \frac{c_1}{4}\frac{d}{A}\frac{N \ln^2 N}{A} + \frac{c_1^2}{8}\frac{Nd}{A^2} <$$

$$< 1 + \frac{4A}{d} + \frac{3c_1^2}{8}\frac{Nd \ln^2 N}{A^2}.$$

Putting

$$\omega = \sqrt{\frac{A^3}{N}} \tag{5.2.3}$$

we obtain by $\omega < A \ln^3 N$ and $\ln \omega < \frac{3}{2} \ln N$

$$\sum_{d \leq \omega} |S_d| < \omega + 8A \ln N + \frac{3c_1^2}{8}\frac{N \ln^2 N}{A^2}\frac{A^3}{N} < \left(9 + \frac{3c_1^2}{8}\right) A \ln^3 N.$$

This gives

$$|Z_0| < \left(9 + \frac{3c_1^2}{8}\right) A \ln^3 N + \left| \sum_{\substack{d/H \\ \omega \leq d \leq N''}} \mu(d) S_d \right| \equiv$$

$$\equiv \left(9 + \frac{3c_1^2}{8}\right) A \ln^3 N + |Z_1|. \tag{5.2.4}$$

5.3. For Z_1 we have

$$Z_1 = \sum_{\substack{(d) \\ \omega \leq d \leq N''}} \mu(d) \sum_{\substack{n \\ \frac{N'}{d} \leq n \leq \frac{N''}{d}}} e^{2\pi i f(dn)} = \sum_{n \leq \frac{N''}{\omega}} \sum_{\substack{(d) \\ \max\left(\frac{N'}{n}, \omega\right) \leq n \leq \frac{N''}{n}}} \mu(d) e^{2\pi i f(nd)} =$$

$$= \sum_{n \leq \frac{N'}{\omega}} \sum_{\substack{(d) \\ \frac{N'}{n} \leq d \leq \frac{N''}{n}}} \mu(d) e^{2\pi i f(nd)} + \sum_{\frac{N'}{\omega} < n \leq \frac{N''}{\omega}} \sum_{\substack{(d) \\ \omega \leq d \leq \frac{N''}{n}}} \mu(d) e^{2\pi i f(nd)} =$$

$$= \sum_{n<\frac{N''}{\omega}} \sum_{\substack{(d)\\ N'\le nd\le N''}} \mu(d)\, e^{2\pi i f(nd)} - \sum_{\frac{N'}{\omega}<n\le\frac{N''}{\omega}} \sum_{\substack{(d)\\ \frac{N'}{n}\le d<\omega}} \mu(d)\, e^{2\pi i f(nd)} \equiv Z_1' - Z_1''. \quad (5.3.1)$$

In Z_1'' we change the order of the summations again

$$|Z_1''| = \Big| \sum_{\substack{d\\ \frac{N'}{N''}\omega\le d<\omega}} \mu(d) \sum_{\substack{n\\ \frac{N'}{d}\le n\le\frac{N''}{\omega}}} e^{2\pi i f(nd)} \Big| \le \sum_{\frac{\omega}{2}\le d\le\omega} \Big| \sum_{\frac{N'}{d}\le n\le\frac{N''}{\omega}} e^{2\pi i f(dn)} \Big|,$$

Now we use lemma XVI with $a = 1 + \left[\frac{N'}{d}\right]$, $b = \left[\frac{N''}{\omega}\right]$, $F(x) = f(dx)$, $B = \frac{d}{A}$, $D = c_1 \frac{d}{A}$. Hence we get for the inner sum, since

$$\frac{d}{A}\cdot\frac{N}{\omega} > \frac{1}{2}\,\frac{N}{A} > \frac{1}{2}\ln^2 N,$$

$$1 + \frac{4A}{d} + \frac{c_1}{4}\,\frac{d}{A} + \frac{c_1^2}{8}\,\frac{d^2}{A^2}\,\frac{N}{\omega} < 1 + \frac{4A}{d} + \frac{3c_1^2}{4}\,\frac{d^2}{A^2}\,\frac{N\ln^2 N}{\omega}.$$

Summing on d we obtain

$$|Z_1''| < \omega + 8A\ln N + \frac{3c_1^2}{A^2}\,\frac{N\ln^2 N}{\omega}\cdot\frac{\omega^3}{3} < \left(9 + \frac{c_1^2}{4}\right) A\ln^3 N;$$

from this, (5.3.1) and (5.2.4) it follows

$$|Z_0| < \left(18 + \frac{5c_1^2}{8}\right) A\ln^3 N + |Z_1'|. \quad (5.3.2)$$

5.4. To get upper bound for Z_1' we split the sequence of primes p_1, $p_2, \dots, p_r$ in τ groups $O_1, O_2, \dots, O_\tau$; the ν-th group O_ν containing those primes, for which

$$2^{\left(\frac{11}{10}\right)^{\nu+1}} < p \le 2^{\left(\frac{11}{10}\right)^{\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, \tau).$$

Then we have

$$2^{\left(\frac{11}{10}\right)^{\tau-1}} < N \le 2^{\left(\frac{11}{10}\right)^{\tau}}, \quad \left(\frac{11}{10}\right)^{\tau-1} < \ln N, \quad \tau < 12\ln\ln N. \quad (5.4.1)$$

We distribute the d-numbers which are of course quadratfrei, in classes $D_1, D_2, \dots, D_k$ to any of these classes belong those d-numbers which are composed of a prescribed number of prime-factors from every group $O_1, O_2, \dots, O_\tau$. How many such classes are there? Since any number less than N has at most $\frac{\ln N}{\ln 2}$ prime-factors we have

$$k < \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{\tau} < e^{12\ln\ln N\left(\ln\ln N + \frac{2}{3}\right)} < e^{20(\ln\ln N)^2}. \quad (5.4.2)$$

From this and (5.3.1)

$$|Z_1'| < e^{20(\ln\ln N)^2} \max_{r\leq h} \Bigl| \sum_{n\leq\frac{N''}{\omega}} \sum_{\substack{(d)\\ d\in D_r}} \mu(d)\, e^{2\pi i f(nd)} \Bigr| =$$

$$= e^{20(\ln\ln N)^2} \max_{r\leq k} \Bigl| \sum_{n\leq\frac{N''}{\omega}} \sum_{\substack{(d)\\ d\in D_r\\ N'\leq nd\leq N''}} e^{2\pi i f(nd)} \Bigr| .$$

Further we have evidently $N' \leqslant nd \leqslant N''$

$$|Z_1'| < e^{24(\ln\ln N)^2} \max_{\substack{r\leq h\\ N_0\leq\frac{N}{\omega}}} \Bigl| \sum_{N_0\leq n\leq 2N_0} \sum_{\substack{(d)\\ d\in D_r\\ N'\leq nd\leq N''}} e^{2\pi i f(nd)} \Bigr| . \qquad (5.4.3)$$

Let us denote the last double-sum (r and N_0 being fixed) by Z_2. Let be further $d = g_1 g_2 \cdots g_\tau$ where g_ν denotes the product of the prime-factors of d belonging to O_ν. If the d-s of the class D_r are characterized by containing exactly l_{1r} prime-factors from $O_1, \ldots, l_{\tau r}$ prime-factors from O_τ, we have

$$g_\nu' \equiv 2^{\left(\frac{11}{10}\right)^{\nu-1} l_{\nu r}} < g_\nu < 2^{\left(\frac{11}{10}\right)^{\nu} l_{\nu r}} \equiv g_\nu'' \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \tau) \qquad (5.4.4)$$

and

$$g_\nu'' = (g_\nu')^{\frac{11}{10}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \tau). \qquad (5.4.5)$$

Since r is fixed, the indices $i_1, i_2, \ldots, i_\tau$ are with the definition

$$g_{i_1}'' \geqslant g_{i_2}'' \geqslant \cdots \geqslant g_{i_\tau}'' \qquad (5.4.6)$$

fixed (5.4.6), (5.4.4) and (5.4.3) have the consequence

$$N_0 g_{i_1}'' g_{i_2}'' \cdots g_{i_\tau}'' = N_0 g_1'' g_2'' \cdots g_\tau'' > N_0 g_1 g_2 \cdots g_\tau =$$

$$= N_0 d \geqslant \frac{n}{2} d \geqslant \frac{N'}{2} \geqslant \frac{N}{4} > N^{\frac{1}{3}}$$

further from the definition of ω and $A > N^{\frac{7}{9}}$

$$N_0 \leqslant \frac{N}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^3} < N^{\frac{1}{3}} \qquad (5.4.7)$$

these together assure the existence of the least integer $h \geqslant 1$ such that

$$N_0 g_{i_1}'' \cdots g_{i_h}'' \geqslant N^{\frac{1}{3}}.$$

5.5. Case I. $h > 1$. According to the definition of h

$$N_0 g_{i_1}'' \cdots g_{i_{h-1}}'' N < {}^{\frac{1}{3}};$$

this and (5.4.6) give

$$g_{i_h}'' \leqslant g_{i_{h-1}}'' \leqslant N_0 g_{i_1}'' \cdots g_{i_{h-1}}'' < N^{\frac{1}{3}}, \quad N_0 g_{i_1}'' \cdots g_{i_h}'' < N^{\frac{2}{3}}. \qquad (5.5.1)$$

Since

$$g'_{i_\tau} < g'_{i_h} < N^{\frac{1}{3}}, \quad N_0 g''_{i_1} \cdots g''_{i_{\tau-1}} > \frac{N}{4g''_{i_\tau}} > \frac{1}{4} N^{\frac{2}{3}} > N^{\frac{1}{3}}$$

we have

$$1 < h < \tau. \tag{5.5.2}$$

We define now two new sequences (u) and (v) where

$$u = n g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_h}, \quad v = g_{i_{h+1}} \cdots g_{i_\tau}.$$

According to (5.5.2) both have a sense and we intend to itroduce them into Z_2 as new summatory variables. To every pair (n, d) corresponds a unique pair (u, v); in the opposite sense one can assert only that v determines $g_{i_{h+1}}, \ldots, g_{i_\tau}$. For fixed u denoting by $\Phi(u)$ the number of the solutions of the equation $n g_{i_1} \cdots g_{i_h} = u$ we have evidently

$$\Phi(u) \leqslant T(u) \tag{5.5.3}$$

where $T(u)$ means the number of divisors of u. Further we have $uv = nd$. Introducing the variables u and v into Z_2 we get

$$Z_2 = \sum_{\substack{(u)(v) \\ N' \leq uv \leq N''}} \Phi(u) e^{2\pi i f(uv)} = \sum_{(u)} \Phi(u) \sum_{\substack{(v) \\ \frac{N'}{u} \leq v \leq \frac{N''}{u}}} e^{2\pi i f(uv)} \tag{5.5.4}$$

Now we estimate the domain of variability of the sequence (u). From (5.5.1)

$$u \leqslant 2N_0 g''_{i_1} \cdots g''_{i_h} < 2N^{\frac{2}{3}} \tag{5.5.5}$$

and from (5.5.4) and (5.4.7)

$$u \geqslant N_0 g'_{i_1} \cdots g'_{i_h} = N_0 (g'_{i_1} \cdots g'_{i_h})^{\frac{10}{11}} >$$

$$> (N_0 g'_{i_1} \cdots g'_{i_h})^{\frac{10}{11}} \geqslant N^{\frac{10}{33}}. \tag{5.5.6}$$

(5.5.4), (5.5.5) and (5.5.6) give

$$|Z_2| \leqslant 2 \ln N \max_{N^{\frac{10}{33}} \leq U_0 < U_1 \leq \min(2U_0, 2N^{\frac{2}{3}})} \sum_{U_0 \leq m \leq U_1} T(m) \left| \sum_{\substack{(v) \\ \frac{N'}{m} \leq v \leq \frac{N''}{m}}} e^{2\pi i f(mv)} \right|, \tag{5.5.7}$$

where the summation according to m refers to *consecutive* integers. Let us denote the last double-sum by Z_3. Then from Cauchy's inequality

$$|Z_3|^2 \leqslant \Big(\sum_{U_0 \leq m \leq U_1} T(m)^2 \Big) \Big(\sum_{U_0 \leq m \leq U_1} \Big| \sum_{\substack{(v) \\ N' \leq mv \leq N''}} e^{2\pi i f(mv)} \Big|^2 \Big) \leqslant$$

$$\leqslant 2U_0 \ln^3 N \Big(\sum_{U_0 \leq m \leq U_1} \sum_{\substack{(v) \\ N' \leq mv \leq N''}} 1 + 2 \Big| \sum_{U_0 \leq m \leq U_1} \sum_{\substack{(v_1)(v_2) \\ \frac{N'}{m} \leq v_1 < v_2 \leq \frac{N''}{m}}} e^{i(f(mv_2) - f(mv_1))} \Big| <$$

$$< 2U_0 \ln^3 N \, (N \ln N + 2 |Z_4|). \ * \qquad (5.5.8)$$

Changing the order of the summations in Z_4 we have

$$|Z_4| = \Big| \sum_{\substack{(v_1)(v_2) \\ \frac{N'}{U_1} \leq v_1 < v_2 \leq \min\left(\frac{N''}{U_0}, \frac{N''}{N'} v_1\right)}} \sum_{\max\left(U_0, \frac{N'}{v_1}\right) \leq m \leq \min\left(U_1, \frac{N''}{v_2}\right)} e^{2\pi i(f(mv_2) - f(mv_1))} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\frac{N'}{U_1} \leq n_1 < n_2 \leq \frac{N''}{U_0}} \Big| \sum_{\max\left(U_0, \frac{N'}{n_1}\right) \leq m \leq \min\left(U_1, \frac{N''}{n_2}\right)} e^{2\pi i(f(mn_2) - f(mn_1))} \Big| ;$$

here *every* summation refers to consecutive integers. To the inner sum Z_5 we apply again lemma XVI with

$$F(x) = f(n_2 x) - f(n_1 x), \quad a = \max\left(U_0, \frac{N'}{n_1}\right), \quad b = \min\left(U_1, \frac{N''}{n_2}\right).$$

Since

$$F'(x) = n_2 f'(n_2 x) - n_1 f'(n_1 x) = \frac{1}{x} \int_{n_1 x}^{n_2 x} (zf'(z))' \, dz = \frac{1}{x} \int_{n_1 x}^{n_2 x} (zf''(z) + f'(z)) \, dz,$$

$$F''(x) = \frac{1}{x^2} \int_{n_1 x}^{n_2 x} (z^2 f''(z))' \, dz = \frac{1}{x^2} \int_{n_1 x}^{n_2 x} z(zf'''(z) + 2f''(z)) \, dz,$$

using (5.1.5), (5.1.3) and the continuity of the derivates we may choose

$$B = c_2 \frac{n_2 - n_1}{A \ln^2 N}, \qquad D = c_3 \frac{n_2 - n_1}{A}$$

and $|F''(x)| > 0$ is also fulfilled. Hence

$$|Z_5| < 1 + \frac{4A \ln^2 N}{c_2 (n_2 - n_1)} + \frac{c_3 (n_2 - n_1)}{4A} + \frac{c_3^2}{4} \frac{(n_2 - n_1)^2}{A^2} U_1$$

and

$$|Z_4| \leqslant \sum_{\frac{N}{4U_0} \leq n_1 < n_2 \leq \frac{N}{U_0}} \left(1 + \frac{4A \ln^2 N}{c_2 (n_2 - n_1)} + \frac{c_3 (n_2 - n_1)}{4A} + \frac{c_3^2}{4} \frac{(n_2 - n_1)^2}{A^2} U_0\right) <$$

$$< \frac{N^2}{U_0^2} + \frac{4A \ln^3 N}{c_2} \frac{N}{U_0} + \frac{c_3}{4A} \cdot \frac{N}{U_0} \frac{N^2}{U_0^2} + \frac{c_3^2}{8A^2} U_0 \frac{N^4}{U_0^4} =$$

$$= \frac{N^2}{U_0^2} + \frac{4}{c^2} \frac{NA \ln^3 N}{U_0} + \frac{N^3}{AU_0^3} \left(\frac{c_3}{4} + \frac{c_3^2}{8} \cdot \frac{N}{A}\right) <$$

$$< \frac{N^2}{U_0^2} + \frac{4}{c^2} \frac{NA \ln^3 N}{U_0} + \left(\frac{c_3}{4} + \frac{c_3}{8}\right) \frac{N^4}{A^2 U_0^3}.$$

Putting this into (5.5.8) we obtain

---

* The sequences (v_1) and (v_2) are identical with the sequence (v).

$$|Z_3|^2 < 2NU_0 \ln^4 N + 4\frac{N^2}{U_0^{6}}\ln^3 N + \frac{16}{c^2} NA \ln^6 N + \left(c_3 + \frac{c_3^2}{2}\right)\frac{N^4 \ln^8 N}{A^2 U_0^4}$$

and using $N^{\frac{10}{33}} \leq U_0 \leq 2N^{\frac{2}{3}}$ and $A \geq N^{\frac{8}{?}}$

$$|Z_3|^2 \leq 4N^{\frac{5}{3}} \ln^4 N + 4N^{\frac{56}{33}} \ln^3 N + \frac{16}{c_2} NA \ln^6 N + \frac{3}{2} c_3^2 \frac{N^{\frac{112}{33}}}{A^2} \ln^8 N <$$

$$< \left(8 + \frac{16}{c_2} + 2c_3^2\right) NA \ln^6 N,$$

$$|Z_3| < \left(3 + \frac{4}{\sqrt{c_2}} + 2c_3\right)\sqrt{NA} \ln^3 N,$$

$$|Z_2| < \left(6 + \frac{8}{\sqrt{c_2}} + 4c_3\right)\sqrt{NA} \ln^4 N,$$

$$|Z_1'| < \left(6 + \frac{8}{\sqrt{c_2}} + 4c_3\right)\sqrt{NA} \ln^4 N e^{21(\ln\ln N)^2} <$$

$$< \left(6 + \frac{8}{\sqrt{c_2}} + 4c_3\right)\sqrt{NA}\, e^{22(\ln\ln N)^2},$$

$$|Z_0| < \left(24 + \frac{8}{\sqrt{c_2}} + 4c_3 + \frac{5c_1^2}{8}\right)\sqrt{NA}\, e^{22(\ln\ln N)^2}$$

which proves our theorem in the case I.

5.6 Case II. $h = 1$. Then we have $N_0 < N^{\frac{1}{3}}$ but $N_0 g_{i_1}'' > N^{\frac{1}{3}}$; this assures the existence of a minimal integer $\psi \geq 1$ such that

$$N_0 (g_{i_1}'')^{\frac{\psi}{l_{i_1 r}}} \geq N^{\frac{1}{3}} \tag{5.6.1}$$

Now we introduce into (5.4.3) two new summatory variables u_0 and v_0; the sequence (u_0) consists of the quadratfrei integers composed by exactly ψ different primes of the group O_i and the sequence (v_0) of those quadratfrei integers which are composed of $(l_{i_1 r} - \psi)$ primes of O_{i_1}, $l_{i_2 r}$ primes of O_{i_2}, ..., $l_{i_\tau r}$ primes of the group O_{i_τ}. Then for every d correspond exactly $\binom{l_{i_1 r}}{\psi}$ systems of (u_0, v_0) with $(u_0, v_0) = 1$, i. e.

$$Z_2 = \frac{1}{\binom{l_{i_1 r}}{\psi}} \sum_{\substack{n, (u_0), (v_0) \\ N_0 \leq n \leq 2N_0 \\ N' \leq n u_0 v_0 \leq N'' \\ (u_0, v_0) = 1}} e^{2\pi i f(n u_0 v_0)}$$

or roughly

$$|Z_2| \leq \left| \sum_{N_0 \leq n \leq 2N_0} \sum_{\substack{(u_0)(v_0) \\ (u_0, v_0) = 1 \\ N' \leq n u_0 v_0 \leq N''}} e^{2\pi i f(n u_0 v_0)} \right|. \tag{5.6.2}$$

New difficulties arises from the restriction $(u_0, v_0) = 1$; to avoid this we proceed following again Vinogradov as follows. As common divisors of an

u_0 and a v_0 there can occur 1 and every quadratfrei number composed of one or two or $\cdots j$ primes of the group O_{i_1} where $j = \min(\psi, l_{i_1 r} - \psi)$. These numbers determine a sequence called the (δ)-sequence. For every fixed δ we define the partial-sequences (u_δ) and (v_δ) of (u_0) resp. (v_0) by selecting every u_0 and v_0 divisible by δ and then dividing them by δ. Now the ingenious device of Vinogradov consists in observing the identity

$$\sum_{\substack{(u_0)(v_0)\\ (u_0,v_0)=1\\ N'\leq nu_0v_0\leq N''}} e^{2\pi i f(nu_0v_0)} = \sum_{\delta}\mu(\delta) \sum_{\substack{(u_\delta)(v_\delta)\\ N'\leq \delta^2 nu_\delta v_\delta\leq N''}} e^{2\pi i f(n\delta^2 u_\delta v_\delta)},$$

where the sume on the right-side are all of the same nature as in case I. Thus we have

$$|Z_2| \leqslant \sum_{(\delta)}\Bigg|\sum_{N_0\leq n\leq 2N_0}\ \sum_{\substack{(u_\delta)(v_\delta)\\ \frac{N'}{\delta^2}\leq nu_\delta v_\delta\leq\frac{N''}{\delta^2}}} e^{2\pi i f(n\delta^2 u_\delta v_\delta)}\Bigg|. \tag{5.6.3}$$

The inner sums with fixed δ will be treated similarly as in case I. We introduce the new sequences (u'_δ) and (v'_δ) by

$$u'_\delta = nu_\delta, \quad v'_\delta = v_\delta.$$

Again u'_δ, v'_δ do not determine n, u_δ and v_δ; denoting by $\Phi(u'_\delta)$ the number of the solutions of $nu_\delta = u'_\delta$ we have $\Phi(u'_\delta) \leqslant T(u'_\delta)$ and from (5.6.3)

$$|Z_2| \leqslant \sum_{(\delta)}\Bigg|\sum_{\substack{(u'_\delta)(v'_\delta)\\ \frac{N'}{\delta^2}\leq u'_\delta v'_\delta\leq\frac{N''}{\delta^2}}} \Phi(u'_\delta)\, e^{2\pi i f(\delta^2 u'_\delta v'_\delta)}\Bigg|. \tag{5.6.4}$$

That part of this sum for which $\delta \geqslant N^{\frac{1}{8}}$ is simply

$$< \sum_{\delta\geqslant N^{\frac{1}{8}}}\sum_{(u'_\delta)} T(u'_\delta)\frac{N}{\delta^2 u'_\delta} \leqslant \sum_{\delta > N^{\frac{1}{8}}}\frac{N}{\delta^2}\sum_{r\leq N}\frac{T(r)}{r} < 2N^{\frac{7}{8}}\ln^2 N$$

hence

$$|Z_2| < 2N^{\frac{7}{8}}\ln^2 N + \sum_{\delta\leq N^{\frac{1}{8}}}\Bigg|\sum_{\substack{(u'_\delta)(v'_\delta)\\ \frac{N'}{\delta^2}\leq u'_\delta v'_\delta\leq\frac{N''}{\delta^2}}} \Phi(u'_\delta)\, e^{2\pi i f(\delta^2 u'_\delta v'_\delta)}\Bigg| \equiv$$

$$\equiv 2N^{\frac{7}{8}}\ln^2 N + \sum_{\delta < N^{\frac{1}{8}}} |Z_\delta|. \tag{5.6.5}$$

To obtain upper and lower bounds for u'_δ we have

$$u'_\delta = nu_\delta \geqq N_0 \frac{u_0}{\delta} \geqq \frac{N_0}{\delta} \cdot 2^{\left(\frac{11}{10}\right)^{i_1-1}\psi} = \frac{N_0}{\delta} \left(2^{\left(\frac{11}{10}\right)^{i_1} l_{i_1 r}}\right)^{\frac{\psi}{l_{i_1 r}} \cdot \frac{10}{11}} =$$
$$= \frac{N_0}{\delta} (g''_{i_1})^{\frac{\psi}{l_{i_1 r}} \cdot \frac{10}{11}} > \frac{1}{\delta} (N_0 g''_{i_1}{}^{\frac{\psi}{l_{i_1 r}}})^{\frac{10}{11}} > \frac{1}{\delta} N^{\frac{10}{33}} \tag{5.6.6}$$

using (5.6.1). Further for $\psi > 1$ we have

$$(g''_{i_1})^{\frac{1}{l_{i_1 r}}} \leqq N_0 (g''_{i_1})^{\frac{\psi-1}{l_{i_1 r}}} < N^{\frac{1}{3}}, \quad N_0 (g''_{i_1})^{\frac{\psi}{l_{i_1 r}}} < N^{\frac{2}{3}},$$
$$u'_\delta = nu_\delta < 2N_0 \frac{u_0}{\delta} \leqq \frac{2N_0}{\delta} 2^{\left(\frac{11}{10}\right)^{i_1}\psi} = \frac{2N_0}{\delta} \left(2^{\left(\frac{11}{10}\right)^{i_1} l_{i_1 r}}\right)^{\frac{\psi}{l_{i_1 r}}} =$$
$$= \frac{2N_0}{\delta} (g''_{i_1})^{\frac{\psi}{l_{i_1 r}}} < \frac{2N^{\frac{2}{3}}}{\delta}; \tag{5.6.7}$$

if $\psi = 1$, then the sequence (u_0) is identical with the primes of O_{i_1}, i. e.

$$u_0 \leqq \sqrt{N}, \quad u'_\delta = n \frac{u_0}{\delta} < 2N_0 \frac{\sqrt{N}}{\delta} < 2\frac{N}{\omega} \frac{\sqrt{N}}{\delta} =$$
$$= \frac{2\sqrt{N}}{\delta} \left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{3}{2}} < \frac{2N^{\frac{2}{3}}}{\delta}. \tag{5.6.8}$$

Hence (5.6.6), (5.6.7) and (5.6.8) give

$$\frac{N^{\frac{10}{33}}}{\delta} \leqq u'_\delta \leqq 2\frac{N^{\frac{2}{3}}}{\delta}. \tag{5.6.9}$$

5.7. For the estimation of Z_6 we proceed similarly as in (5.5.7); thus

$$|Z_6| < 2 \ln N \max_{\frac{N^{\frac{10}{33}}}{\delta} \leqq U_0 < U_1 \leqq \min\left(2U_0, \frac{2N^{\frac{2}{3}}}{\delta}\right)} \sum_{U_0 \leqq m \leqq U_1} T(m) \Big| \sum_{\substack{(v'_\delta) \\ \frac{N'}{\delta^2 m} \leqq v'_\delta \leqq \frac{N''}{\delta^2 m}}} e^{2\pi i f(m\delta^2 v'_\delta)} \Big|. \tag{5.7.1}$$

Denoting the double-sum behind max by Z_7 we have

$$|Z_7|^2 < \Big(\sum_{U_0 \leqq m \leqq U_1} T(m)\Big)\Big(\sum_{U_0 \leqq m \leqq U_1} \Big| \sum_{\substack{(v'_\delta) \\ \frac{N'}{\delta^2 m} \leqq v'_\delta \leqq \frac{N''}{\delta^2 m}}} e^{2\pi i f(m\delta^2 v'_\delta)} \Big|^2\Big) <$$
$$< 2U_0 \ln^3 N \Big(\sum_{U_0 \leqq m \leqq U_1} \sum_{\substack{l \\ \frac{N'}{\delta^2 m} \leqq l \leqq \frac{N''}{\delta^2 m}}} 1 + 2 \Big| \sum_{U_0 \leqq m \leqq U_1} \sum_{\substack{(\bar{v}_\delta)(\bar{\bar{v}}_\delta) \\ \frac{N'}{\delta^2 m} \leqq \bar{v}_\delta < \bar{\bar{v}}_\delta \leqq \frac{N''}{\delta^2 m}}} e^{2\pi i (f(m\delta^2 \bar{\bar{v}}_\delta) - f(m\delta \bar{v}_\delta))} \Big| <$$
$$< 2U_0 \ln^3 N \left(\frac{N}{\delta^2} \ln N + 2|Z_8|\right), \tag{5.7.2}$$

where the summatory variables $(\bar{v}_\delta)$ and $(\bar{\bar{v}}_\delta)$ run throughout the sequence (v'_δ) independently. Changing the order of summations in Z_8 we obtain

$$Z_8 = \sum_{\substack{(\bar{v}_\delta)(\bar{\bar{v}}_\delta) \\ \frac{N'}{\delta^2 U_1} \leqslant \bar{v}_\delta < \bar{\bar{v}}_\delta \leqslant \frac{N''}{\delta^2 U_0}}} \sum_{\max\left(U_0, \frac{N'}{\delta^2 \bar{v}_\delta}\right) \leqslant m \leqslant \min\left(U_1, \frac{N''}{\delta^2 \bar{\bar{v}}_\delta}\right)} e^{2\pi i (f(m\delta^2 \bar{\bar{v}}_\delta) - f(m\delta^2 \bar{v}_\delta))},$$

$$|Z_8| \leqslant \sum_{\frac{N}{4\delta^2 U_0} \leqslant n_1 < n_2 \leqslant \frac{N}{\delta^2 U_0}} \left| \sum_{\max\left(U_0, \frac{N'}{\delta^2 n_1}\right) \leqslant m \leqslant \min\left(U_1, \frac{N''}{\delta^2 n_2}\right)} e^{2\pi i (f(m\delta^2 n_2) - f(m\delta^2 n_1))} \right|, \tag{5.7.3}$$

where every summation refers now to *consecutive* integers. The inner sum Z_9 will be appraised by lemma XVI, with

$$F(x) = f(n_2\delta^2 x) - f(n_1\delta^2 x), \quad a = \max\left(U_0, \frac{N'}{\delta^2 n_1}\right),$$

$$b = \min\left(U_1, \frac{N''}{\delta^2 n_2}\right), \quad b - a < U_0;$$

since $N'' \geqslant n_2\delta^2 m > n_1\delta^2 m \geqslant N'$ and

$$F'(x) = n_2\delta^2 f'(n_2\delta^2 x) - n_1\delta^2 f'(n_1\delta^2 x) = \frac{1}{x} \int_{n_1\delta^2 x}^{n_2\delta^2 x} (zf''(z) + f'(z))\, dz,$$

$$B \equiv \frac{c_2 (n_2 - n_1)\delta^2}{A \ln^2 N} \leqslant |F'(x)| \leqslant \frac{c_3 (n_2 - n_1)\delta^2}{A} \equiv D$$

further

$$F''(x) = \frac{1}{x^2} \int_{n_1\delta^2 x}^{n_2\delta^2 x} z(zf'''(z) + 2f''(z))\, dz,$$

i. e. $|F''(x)| > 0$ is fulfilled. Thus lemma XVI gives

$$|Z_9| \leqslant 1 + \frac{4A\ln^2 N}{c_2 (n_2 - n_1)\delta^2} + \frac{c_3}{4A}\delta^2 (n_2 - n_1) + \frac{c_3^2}{8} \frac{\delta^4 (n_2 - n_1)^2}{A^2} U_0$$

and from (5.7.3)

$$|Z_8| \leqslant \sum_{\frac{N}{4\delta^2 U_0} \leqslant n_1 < n_2 \leqslant \frac{N}{\delta^2 U_0}} \left(1 + \frac{4A\ln^2 N}{c_2\delta^2 (n_2 - n_1)} + \frac{c_3}{4A}\delta^2 (n_2 - n_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{c_3^2}{8} \frac{\delta^4 (n_2 - n_1)^2}{A^2} U_0 \right) < \frac{N^2}{\delta^4 U_0^2} + \frac{4}{c_2} \frac{NA\ln^4 N}{\delta^4 U_0} + \frac{c_3}{4} \frac{\delta^2}{A} \frac{N^3}{\delta^6 U_0^3} + \frac{c_3^2}{8} \frac{\delta^4 U_0}{A^2} \frac{N^4}{\delta^8 U_0^4}$$

and from (5.7.2)

$$|Z_7|^2 < \frac{2NU_0}{\delta^2} \ln^4 N + \frac{4N^2 \ln^3 N}{\delta^4 U_0} + \frac{}{c_2} \frac{NA\ln^6 N}{\delta^4} + c_3 \frac{N^3 \ln^3 N}{\delta^4 A U_0^2} + \frac{c_3^2}{2} \frac{N^4 \ln^3 N}{\delta^4 A^2 U_0^3},$$

$$|Z_6| < \max_{\frac{N^{\frac{10}{33}}}{\delta} \leqslant U_0 \leqslant 2\frac{N^{\frac{2}{3}}}{\delta}} \left(4\frac{\sqrt{NU_0}}{\delta} \ln^3 N + \frac{4N\ln^3 N}{\delta^2 \sqrt{U_0}} + \frac{8}{c^2} \frac{\sqrt{NA}\ln^4 N}{c^2} + \right.$$

$$+2c_3\frac{N^{\frac{2}{3}}\ln^3 N}{\delta^3 U_0\sqrt{A}}+2c_3\frac{N^2\ln^3 N}{\delta^2 AU_0}\Big)\leqslant\Big(6\frac{N^{\frac{5}{6}}\ln^3 N}{\delta^{\frac{3}{2}}}+4\frac{N^{\frac{28}{33}}\ln^3 N}{\delta^{\frac{3}{2}}}+\frac{8}{\sqrt{c_2}}\frac{\sqrt{NA}\ln^4 N}{\delta^2}+$$

$$+2c_3\frac{N^{\frac{79}{66}}\ln^3 N}{\delta\sqrt{A}}+2c_3\frac{N^{\frac{56}{33}}\ln^3 N}{\delta^2 A}<\Big(10+\frac{8}{\sqrt{c_2}}+4c_3\Big)\frac{\sqrt{NA}\ln^4 N}{\delta}.$$

Hence from (5.6.5)

$$|Z_2|<2N^{\frac{7}{8}}\ln^2 N+\Big(2+\frac{2}{\sqrt{c_2}}+c_3\Big)\sqrt{NA}\ln^5 N<$$
$$<\Big(4+\frac{2}{\sqrt{c_2}}+c_3\Big)\sqrt{NA}\ln^5 N$$

and from (5.4.3)

$$|Z_1'|<\Big(4+\frac{2}{\sqrt{c_2}}+c_3\Big)\sqrt{NA}\ln^5 N e^{21(\ln\ln N)^2}<$$
$$<\Big(4+\frac{2}{\sqrt{c_2}}+c_3\Big)\sqrt{NA}\,e^{22(\ln\ln N)^2}$$

and finally from (5.3.2)

$$|Z_0|<\Big(18+\frac{5c_1^2}{8}\Big)A\ln^3 N+\Big(4+\frac{2}{\sqrt{c_2}}+c_3\Big)\sqrt{NA}\,e^{22(\ln\ln N)^2}<$$
$$<\Big(22+\frac{5c_1^2}{8}+\frac{2}{\sqrt{c_2}}+c_3\Big)\sqrt{NA}\,e^{22(\ln\ln N)^2}$$

This and (5.5.9) proves theorem XII.

5.8. Now we apply theorem XII to the case $f(x)=\frac{t}{2\pi}\ln^{1+\gamma}x$ where

$$t>0,\quad -\frac{3}{4}\leqslant\gamma\leqslant 1. \tag{5.8.1}$$

Then

$$f'(x)=\frac{1+\gamma}{2\pi}t\frac{\ln^\gamma x}{x},\quad f''(x)=\frac{1+\delta}{2\pi}t\ln^{\gamma-1}x\frac{\gamma-\ln x}{x^2}$$

which gives for $\gamma\leqslant 0$, $\frac{1}{2}e^2\leqslant\frac{N}{2}\leqslant x\leqslant N$

$$\frac{t}{15\pi}\frac{\ln^\gamma N}{N}<\frac{t}{8\pi}\frac{\ln^\gamma N}{N}\leqslant f'(x)\leqslant\frac{2t}{\pi}\frac{\ln^\gamma\frac{N}{2}}{N}<\frac{4t}{\pi}\frac{\ln^\gamma N}{N},\qquad f''(x)|>0$$

and for $\gamma>0$, $\frac{1}{2}e^2\leqslant\frac{N}{2}\leqslant x\leqslant N$

$$\frac{t}{15\pi}\frac{\ln^\gamma N}{N}\leqslant f'(x)\leqslant\frac{2t}{\pi}\frac{\ln^\gamma N}{N},\quad |f''(x)>0;$$

thus we may take

$$A=\frac{15\pi N}{t\ln^\gamma N},\quad c_1=30. \tag{5.8.2}$$

Further

$$xf''(x)+f'(x)=(xf'(x))'=\frac{1+\gamma}{2\pi}\gamma t\frac{\ln^{\gamma-1}x}{x},$$

$$xf'''(x)+2f''(x)=\frac{\gamma(1+\gamma)t}{2\pi x^2}\{(\gamma-1)\ln^{\gamma-2}x-\ln^{\gamma-1}x\},$$

$$|xf'''(x)+2f''(x)|>0,\quad \frac{|\gamma|}{8\pi}\frac{t}{N\ln^{1-\gamma}N}\leqslant|xf''(x)+f'(x)|\leqslant\frac{8t}{\pi}\frac{\ln^{\gamma}N}{N},$$

$$c_2=\frac{15}{8}|\gamma|,\quad c_3=120. \tag{5.8.3}$$

We have further for $t>15\pi$

$$A=\frac{15\pi N}{t\ln^{\gamma}N}<N\ln^{\frac{3}{4}}N<N\ln^2 N \tag{5.8.4}$$

we have only to provide for $A\geqslant N^{\frac{8}{9}}$. We show that for

$$e^{16200}\leqslant t^{10}\leqslant\frac{N}{2}\leqslant N'<N''\leqslant N \tag{5.8.5}$$

every restrictions are satisfied.

$$N>e^{16200}=e^{2.90^2},\quad N^{\frac{1}{90}}=e^{\frac{1}{90}\ln N}>\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{90}\ln N\right)^2>\ln N,$$

$$N^{\frac{1}{10}}<\frac{1}{\ln N}N^{\frac{1}{9}}$$

which implies

$$t\leqslant\left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{1}{10}}<N^{\frac{1}{10}}<\frac{N^{\frac{1}{9}}}{\ln N},\quad N^{\frac{8}{9}}\leqslant\frac{N}{t\ln N}<15\pi\frac{N}{t\ln^{\gamma}N}=A. \tag{5.8.6}$$

Theorem XII together with (5.8.2), (5.8.3) gives

Corollary I. *For* $-\frac{3}{4}\leqslant\gamma\leqslant1$ *and* $e^{16200}\leqslant t^{10}\leqslant\frac{N'}{2}\leqslant N'<N''\leqslant N$ *we have*

$$\left|\sum_{N'\leqslant p\leqslant N''}e^{it\ln^{1+\gamma}p}\right|<\left(7500+\frac{7}{\sqrt{|\gamma|}}\right)\frac{Ne^{22(\ln\ln N)^2}}{\sqrt{t}}.$$

5.9. Now we apply theorem XII to $f(x)=\frac{t}{2\pi}\ln x(\ln\ln x)^{\gamma}$ where

$$t>0,\quad -\frac{1}{2}\leqslant\gamma\leqslant\frac{1}{2}.$$

We have

$$f'(x)=\frac{t}{2\pi x}[(\ln\ln x)^{\gamma}+\gamma(\ln\ln x)^{\gamma-1}],$$

$$xf''(x)+f'(x)=\frac{t}{2\pi}\frac{\gamma}{x\ln x}[(\ln\ln x)^{\gamma-1}+(\gamma-1)(\ln\ln x)^{\gamma-2}],$$

$$f''(x)=\frac{t}{2\pi x^2}\Big\{-(\ln\ln x)^{\gamma}-\gamma(\ln\ln x)^{\gamma-1}+$$
$$+\frac{\gamma}{\ln x}[(\ln\ln x)^{\gamma-1}+(\gamma-1)(\ln\ln x)^{\gamma-2}]\Big\},$$

$$xf'''(x)+2f''(x)=\frac{1}{x}(x^2f''(x))'=$$
$$=\frac{\gamma t}{2\pi x}\left\{-\frac{(\ln\ln x)^{\gamma-1}}{x\ln x}+(-\gamma+1)\frac{(\ln\ln x)^{\gamma-2}}{x\ln x}+\right.$$
$$\left.+\frac{-(\ln\ln x)^{\gamma-1}+(-\gamma+1)(-\gamma+2)(\ln\ln x)^{\gamma-2}}{x\ln x}\right\}.$$

Thus for $x\geqslant\frac{N}{2}>e^{e^8}$

$$-f''(x)>\frac{t(\ln\ln x)^\gamma}{2\pi x^2}\left\{1-\frac{1}{2\ln\ln x}-\frac{1}{2\ln x\ln\ln x}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\ln x(\ln\ln x)^2}\right\}>$$
$$>\frac{t(\ln\ln x)^\gamma}{2\pi x^2}\left\{1-\frac{2}{\ln\ln x}\right\}>0,$$
$$|xf'''(x)+2f''(x)|>\frac{|\gamma|t(\ln\ln x)^\gamma}{2\pi x^2\ln n}\left\{1-\frac{3}{2\ln\ln x}-\frac{4}{\ln x(\ln\ln x)^2}\right\}>$$
$$>\frac{|\gamma|t(\ln\ln x)^{\gamma-1}}{2\pi x^2\ln x}\left\{1-\frac{6}{\ln\ln x}\right\}>0,$$

i. e. (5.1.2) and (5.1.3) are fulfilled. Further we have roughly for $\gamma>0$

$$|f'(x)|\leqslant\frac{3}{4\pi}\frac{t}{x}(\ln\ln x)^\gamma<\frac{3}{2\pi}\frac{t}{N}(\ln\ln N)^\gamma,$$
$$|f'(x)|\geqslant\frac{t}{2\pi x}(\ln\ln x)^\gamma\left(1-\frac{2}{\ln\ln x}\right)>\frac{t}{4\pi x}(\ln\ln x)^\gamma\geqslant$$
$$\geqslant\frac{t}{4\pi N}\left(\ln\ln\frac{N}{2}\right)^2>\frac{t}{8\pi N}(\ln\ln N)^2$$

and for $\gamma<0$

$$|f'(x)|\leqslant\frac{t}{2\pi x(\ln\ln x)^{|\gamma|}}\leqslant\frac{t}{\pi N\left(\ln\ln\frac{N}{2}\right)^{|\gamma|}}<\frac{2t}{\pi N(\ln\ln N)^{|\gamma|}}=\frac{2t}{\pi}\frac{(\ln\ln N)^\gamma}{N},$$
$$|f'(x)|>\frac{t}{2\pi x}(\ln\ln x)^\gamma\left(1-\frac{1}{2\ln\ln x}\right)\geqslant\frac{t}{4\pi x}(\ln\ln x)^\gamma\geqslant\frac{t(\ln\ln N)^\gamma}{4\pi N},$$

i. e.

$$\frac{t(\ln\ln N)^\gamma}{8\pi N}\leqslant|f'(x)|\leqslant\frac{2}{\pi}\frac{t(\ln\ln N)^\gamma}{N},$$
$$A=\frac{8\pi N}{t(\ln\ln N)^\gamma},\quad c_1=16. \tag{5.9.1}$$

For $xf''(x)+f'(x)$ we get

$$|xf''(x)+f'(x)|\geqslant\frac{|\gamma|t}{2\pi x\ln x}(\ln\ln x)^{\gamma-1}\left(1-\frac{3}{\ln\ln x}\right)>\frac{|\gamma|t(\ln\ln x)^{\gamma-1}}{4\pi x\ln x}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{|\gamma|t(\ln\ln N)^{\gamma-1}}{4\pi N\ln N}=\frac{2|\gamma|}{\ln N\ln\ln N}\cdot\frac{1}{A}>\frac{2|\gamma|}{A\ln^2N}=\frac{c_2}{A\ln^2N} \tag{5.9.2}$$

if $c_2=2|\gamma|$ and

$$|xf''(x)+f'(x)|\leqslant\frac{t}{4\pi}\frac{(\ln\ln x)^{\gamma-1}}{x\ln x}\leqslant\frac{t(\ln\ln N)^\gamma}{4\pi N}=\frac{2}{A}=\frac{c_3}{A} \tag{5.9.3}$$

if $c_3=2$.

We have only (5.1.5) to verify; the first half of that is obvious for $t \geqslant 8\pi$. Finally we assert that for

$$e^{e^7} \leqslant t^{10} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

all the above restrictions are fulfilled and also the condition $A > N^{\frac{8}{9}}$. We need only to show the last statement. In fact, we have then a fortiori

$$N > \exp\left(\frac{45^2}{16\pi^2}\right), \quad \ln N > \frac{45^2}{16\pi^2},$$

$$N^{\frac{1}{45}} > \frac{1}{2}\left(\frac{\ln N}{45}\right)^2 > \frac{1}{32\pi^2} \ln N > \frac{1}{16\pi^2} \ln \ln N,$$

$$N^{\frac{1}{90}} > \frac{1}{4\pi}\sqrt{\ln \ln N}, \quad \frac{N^{\frac{1}{10}}}{4\pi} < \frac{N^{\frac{1}{9}}}{\sqrt{\ln \ln N}} \leqslant \frac{N^{\frac{1}{9}}}{(\ln \ln N)^{\gamma}}$$

since further

$$\frac{t}{4\pi} < \frac{N^{\frac{1}{10}}}{4\pi} < \frac{N^{\frac{1}{9}}}{(\ln \ln N)^{\gamma}},$$

$$N^{\frac{8}{9}} < \frac{4\pi N}{t(\ln \ln N)^{\gamma}} < A.$$

Hence theorem XII may be applied and we get

Corollary II. *For*

$$-\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2}, \quad 2e^{e^7} \leqslant t^{10} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' < N$$

we have

$$\left|\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p (\ln \ln p)^{\gamma}}\right| < \left(272 + \frac{32}{\sqrt{|\gamma|}}\right) \frac{N e^{22} (\ln \ln N)^2}{\sqrt{t}}.$$

5.10. Finally we consider the case $f(x) = \frac{t}{2\pi} \ln(N+x)$. Then we have

$$f'(x) = \frac{t}{2\pi} \frac{1}{N+x}, \quad f''(x) = -\frac{t}{2\pi} \frac{1}{(N+x)^2},$$

$$(xf'(x))' = \frac{t}{2\pi} \frac{N}{(N+x)^2}, \quad \frac{1}{x}(x^2 f''(x))' = -\frac{Nt}{\pi(N+x)^3}$$

thus (5.1.2) and (5.1.3) are satisfied. Further

$$\frac{t}{4\pi} \cdot \frac{1}{N} \leqslant |f'(x)| \leqslant \frac{t}{3\pi} \cdot \frac{1}{N}, \quad A = \frac{4\pi N}{t}, \quad c_1 = \frac{4}{3} \tag{5.10.1}$$

and

$$|(xf'(x))'| \geqslant \frac{t}{8\pi N}, \quad c_2 = \frac{1}{2},$$

$$(xf'(x))' < \frac{2}{9} \frac{t}{\pi N}, \quad c_3 = 1.$$

For $t \geqslant 4\pi$ we have

$$A = \frac{4\pi N}{t} \leqslant N < N \ln^2 N$$

and $N \geqslant \left(\frac{t}{4\pi}\right)^9$

$$\frac{4\pi N^{\frac{1}{9}}}{t} \geqslant 1, \quad A = \frac{4\pi N}{t} \geqslant N^{\frac{8}{9}}.$$

Thus theorem XII may be applied and we obtain

Corollary III. *For*

$$2e^{e^7} \leqslant t^9 \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

we have the estimation

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln (N : p)} \right| \leqslant 168 \frac{N e^{22(\ln \ln N)^2}}{\sqrt{t}} .$$

Received
2.XII.1945

Addendum (15.II.1947)

The main result of this paper is the proof that the inequalities (1.4.1) — (1.4.2) give a necessary and sufficient condition for the truth of the quasi-riemannian hypothesis, i. e. for the existence of a non-trivial half-plane in which the equation $\zeta(s) = 0$ has only a finite number of solutions. Such a half-plane we could determine *explicitly* as regards its dependence upon α, β and a_5. As we mentioned in the text this fact assures only *the pure existence* of a non-trivial half-plane in which $\zeta(s) \neq 0$ without being able to give such a half-plane in its *explicit* dependence upon α, β and a_5. Now it is easy to show that the inequality (1.4.1) — (1.4.2) is necessary and sufficient also for the existence of a non-trivial half-plane — *explicitly given* in its dependence upon α, β and a_5 — in which $\zeta(s) \neq 0$ (in the sense of theorems III and IV). The necessity is contained in theorem IV. Now we prove the sufficiency part, i. e. that from the inequality (1.4.1) — (1.4.2) we can deduce that the half-plane

$$\sigma \geqslant 1 - \min\left(e^{-10\frac{3^3}{\alpha^3}}, \frac{1}{3200 \ln (a_6 + 52)}\right) \tag{I}$$

contains *no* roots $\zeta(s)$; here a_6 has the meaning explained in theorem III. The proof of this statement is quite easy after theorem III being proved. We only remark that following Landau's well-known method combining it with the numerical estimation of the footnote ([15]) and with the theorem of Backlund ([15]), according which $\zeta(s) \neq 0$ in the domain $\sigma > \frac{1}{2}$, $|t| \leqslant 200$, we can easily obtain that $\zeta(s) \neq 0$ in the domain

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{3200 \ln |t|} \quad \text{if } |t| \geqslant 51,$$
$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{3200 \ln 51} \quad \text{if } |t| < 51. \qquad \text{(II)}$$

Now the half-plane I we split into parts with $|t| \geqslant a_6 + 52$ resp. with $|t| < a_6 + 52$. The first part is free of roots according to theorem III and the second one according to II, q. e. d.

A slight modification of the proofs of lemmas XI and XII gives the following very important generalisation: If $|z_1| = 1 \, |z_2| \leqslant 1, \ldots, |z_n| \leqslant 1$, $m \geqslant 29n$ and $A_1, \ldots, A_n$ are arbitrary complex numbers then

$$\max_{\substack{m < \nu \leq m+n \\ \nu \text{ integer}}} |A_1 z_1^\nu + A_2 z_2^\nu + \ldots + A_n z_n^\nu| > \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{e^{26} m}\right)^n \min_{1 \leq l < n} \frac{1}{l} |A_1 + \ldots + A_l|.$$

LITERATURE

1 Riemann B., Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsber. der Preuss. Akad. der Wiss. (1859—60), 671—680.

2 Van Koch H., Sur la distribution des nombres premiers, Acta Math. 24 (1901), 159—180.

3 Littlewood J. E., Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $Rs > \frac{1}{2}$, C. R. 154 (1912), 263—266.

4 Vinogradov I. M., A general property of prime numbers distribution, Rec. Math. Soc. Mosc. t. 7 (49) (1940), 365—372.

5 Backlund R., Über die Beziehung zwischen Anwachsen und Nullstellen der Zetafunction, Ofversigt Finska Vetensk. Soc. 61, 1918—1919.

6 Littlewood J E., On the zeros of the Riemann zeta-function, Proc. Cambr. Phil. Soc. 22 (1924), 295—318.

7 Titchmarsh E., The zeta-function of Riemann, Cambr. Tracts., 26, 1930.

8 Ingham A. E., On the difference between consecutive primes, Quart. Journ. of Math., vol. 8 (1937), 255—266.

9 Littlewood J. E., Mathematical Notes (12). An inequality for a sum of cosines, Journ. of London Math. Soc. (1937), 217—222.

10 Backlund R.. Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Acta Math. 41 (1918), 345—375.

11 Landau E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. I, 1909.

12 Turan P., Über die Verteilung der Primzahlen I, Acta Litt. Ac. Sc. Szeged (1941), 81—104.

13 Boutroux P., Acta Math. (1904), 97—224.
Cartan C., Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup. (45) (1928), 255—346.

14 Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. II, 1927.

15 Carlson F., Über die Nullstellen der Dirichlet'schen Reihen und der Riemannshen ς-Funktion, Ark. för Mat., Ast. och Fys. (1921), B. 15, Nr 20, 1—28.

16 Vinogradoff I. M., Two theorems relating to the theory of distribution of prime numbers, Comtes Rendus Ac. Sc. 30 (1941), 287—291.

17 Landau E., Über die Nullstellen der Zetafunction, Math. Ann. (1911), 548—564.

П. ТУРАН. О ГИПОТЕЗЕ РИМАНА

РЕЗЮМЕ

Более восьмидесяти лет назад Риман в своем знаменитом мемуаре (1) установил связь между простыми числами и нулями мероморфной функции $\zeta(s)$, определенной в комплексной плоскости как аналитическое продолжение функции, заданной при $s=\sigma+it$, $\sigma>1$ в виде

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots$$

Риман высказал при этом гипотезу, что все нули функции $\zeta(s)$ в критической полосе $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ лежат на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$.

Из справедливости гипотезы Римана следует, как это было доказано H. van Koch'ом, что если обозначить через $\pi(x)$ число простых чисел $\leqslant x$, то

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{dv}{\ln v}+O(\sqrt{x}\ln^2 x).$$

До сих пор не удалось ни доказать, ни опровергнуть гипотезу Римана. Не доказано и более слабое утверждение, которое, следуя L. Kalmar'y, можно назвать квази-римановой гипотезой, а именно, что существует некоторое $\vartheta\left(\frac{1}{2}\leqslant\vartheta<1\right)$ такое, что $\zeta(s)$ имеет только конечное число нулей в полуплоскости $\sigma>\vartheta$.

Если бы удалось доказать справедливость этой квази-римановой гипотезы, то отсюда вытекало бы существование $\vartheta\left(\frac{1}{2}<\vartheta_1<1\right)$ такого, что

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{dv}{\ln v}+O(x^{\vartheta}).$$

Основное содержание настоящей работы — установление необходимых и достаточных условий для справедливости квази-римановой гипотезы. Эти необходимые и достаточные условия имеют то преимущество, по сравнению с известными до сих пор, что справедливость их может быть рассмотрена с помощью замечательного метода Виноградова, совершенно независимого от всей теории римановой ζ-функции.

В настоящей работе доказывается следующая

ТЕОРЕМА I. *Для справедливости квази-римановой гипотезы, т. е. для существования числа* ϑ_2 $\left(\frac{1}{2}\leqslant\vartheta_2<1\right)$ *такого, что* $\zeta(s)$ *имеет*

в полуплоскости $\sigma > \vartheta_2$ *конечное число нулей, необходимо и достаточно существование постоянных* a_2 *и* a_3 *таких, что для*

$$a_2 \leqslant t^{10} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N \quad (t > 0)$$

справедливо неравенство

$$\left| \sum_{N_1 \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p} \right| \leqslant a_3 \frac{N e^{23 (\ln \ln N)^2}}{\sqrt{t}} .$$

Более общей является

ТЕОРЕМА II. *Для справедливости квази-римановой гипотезы необходимо и достаточно существование чисел* $\alpha \geqslant 2$, $0 < \beta < 1$, $a_4 = a_4(\alpha, \beta)$ *и* $a_5 = a_5(\alpha, \beta)$ *таких, что для*

$$a_3 \leqslant t^{\alpha} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

имеет место неравенство

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p} \right| < a_5 \frac{N e^{23 (\ln \ln)^2}}{|t|^{\beta}} .$$

Теорема II получается сопоставлением двух следующих теорем, в которых дается конкретная связь между характером оценки $\sum\limits_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p}$ и полуплоскостью, где риманова ζ-функция не имеет нулей:

ТЕОРЕМА III. *Если существуют постоянные* $\alpha \geqslant 2$, $0 < \beta \leqslant 1$ *и* $a_4 = a_4(\alpha, \beta)$, $a_5 = a_5(\alpha, \beta)$ *такие, что для*

$$a_4 \leqslant t^{\alpha} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

имеет место неравенство

$$\left| \sum_{N_1 \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p} \right| < a_5 \frac{N e^{23 (\ln \ln N)^2}}{|t|^{\beta}} ,$$

то квази-риманова гипотеза справедлива для полуплоскости

$$\sigma \geqslant 1 - e^{-10 \frac{\beta^3}{\alpha^2}} .$$

ТЕОРЕМА IV. *Если* $\zeta(s)$ *имеет в полуплоскости* $\sigma \geqslant \vartheta_4 \left(\frac{1}{2} \leqslant \vartheta_4 < 1 \right)$ *только конечное число* ν *нулей, то для*

$$100^{\frac{1}{1-\vartheta_4}} \leqslant t^{\frac{1}{1-\vartheta_4}} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

справедливо неравенство

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p} \right| < a_7 \frac{N \ln^3 N}{t} ,$$

где $a_7 = a_7(\vartheta_4, \nu)$.

Теорему III можно несколько уточнить, если заменить $\sum\limits_{N'<p\leq N''} e^{it\ln p}$ суммой $\sum\limits_{N'\leq p<N''} \cos(t\ln p)$. Тогда получается

ТЕОРЕМА V. *Если существуют постоянные* $\alpha\geqslant 2$, $0<\beta\leqslant 1$ *и* $a_8=a_8(\alpha,\beta)$ *такие, что для*

$$e^{1620\alpha}\leqslant |t|^{\alpha}\leqslant \frac{N}{2}\leqslant N'<N''\leqslant N$$

имеет место неравенство

$$\left|\sum_{N'\leq p\leq N''} \cos(t\ln p)\right| < a_8 \frac{Ne^{23(\ln\ln N)^2}}{|t|^{\beta}},$$

то ζ*-функция имеет конечное число нулей при* $\sigma\geqslant 1-e^{-10\frac{\beta^3}{\alpha^2}}$.

В теоремах I—V устанавливаются связи между оценками тригонометрических сумм по простым числам, где простые числа ограничены сверху величиной N, могущей принимать сколь угодно большие значения, и нулями ζ-функции Римана в соответствующей полуплоскости. Интересным представляется установление связи между простыми числами в некотором определенном интервале и нулями римановой ζ-функции в соответствующей конечной области в критической полосе, т. е. получение своего рода локальных результатов. В этом направлении доказываются следующие две теоремы:

ТЕОРЕМА VI. *Если существуют постоянные* $\alpha\geqslant 2$, $0<\beta\leqslant 1$; $A\geqslant 1$ *и*

$$\tau=\max\left(e^{\frac{64^2\alpha^2}{\beta^2}},\ e^{1120^2},\ e^{e^{\frac{96}{\beta}[400+81\ln\alpha+\ln(13A+24\alpha)]}}\right)$$

такие, что для некоторого $t_0\geqslant\tau$ *и для любых*

$$t_0^{\alpha}\leqslant\frac{N}{2}\leqslant N'<N''\leqslant N\leqslant e^{\ln^2 t_0}$$

имеет место неравенство

$$\left|\sum_{N'\leq p\leqslant N''} \cos(t_0\ln p)\right|\leqslant A\frac{Ne^{23(\ln\ln N)^2}}{t_0^{\beta}},$$

то $\zeta(s)\neq 0$ *при* $t=t_0$, $\sigma\geqslant 1-e^{-10}\frac{\beta^3}{\alpha^2}$.

ТЕОРЕМА VII. *Пусть* $\gamma_1>0$, $\frac{1}{2}\leqslant\vartheta_5<1$, $\tau_1\geqslant\max(100,30^{\frac{1}{\gamma_1}})$ *и предположим, что* ζ*-функция не равна нулю в параллелограмме*

$$\sigma\geqslant\vartheta_5,\quad \tau_1\leqslant t\leqslant\tau_1+\tau_1^{\gamma_1};$$

тогда для каждого t *такого, что*

$$\tau_1+\frac{1}{4}\tau^{\min(1,\gamma_1)}\leqslant t\leqslant\tau_1+\frac{3}{4}\tau_1^{\gamma_1}$$

и для любых N, N', N'' *таких, что*

$$t^{\frac{\min(1,\gamma_1)}{1-\vartheta_5}} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N,$$

имеет место неравенство

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it\ln p} \right| \leqslant \frac{400}{\min(1,\gamma_1^2)} \cdot \frac{N\ln^3 N}{t^{\min(1,\gamma_1)}}.$$

Теоремы VI и VII содержат утверждения теорем I—V. Поэтому в работе непосредственно проводится доказательство теорем VI и VII.

Основная идея доказательства теоремы VI заключается в следующем. Хорошо известно ([11]) тождество

$$\sum_{n>x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{s-1} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}}{s-\rho} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{s+2n} \quad (x \text{ — нецелое}),$$

где $\rho = \sigma_\rho + it_\rho$ пробегает все нетривиальные нули $\zeta(s)$, т. е. нули, для которых $0 < \sigma_\rho < 1$, $x > 1$, $\sigma > 1$ $(\sigma = \Re s)$. Если предположить существование последовательности

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_j = \sigma_{\rho j} + it_{\rho j},\ \ldots$$

такой, что $\sigma_{\rho_1} < \sigma_{\rho_2} < \ldots \to 1$, то, выбирая $s = \sigma + it_{\rho j}$, где $\sigma > 1$, но очень близко к единице, мы получим, что соответствующие члены в правой части тождества будут велики по модулю. Это явление носило бы более резко выраженный характер, если бы в правой части члены вида $\frac{1}{s-\rho}$ были заменены на $\frac{1}{(s-\rho)^k}$, где k велико. Для этого в качестве основного тождества берется

$$\int_{\xi}^{\infty} \Re\left(\sum_{n \geqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln\frac{n}{x}\right) \frac{\ln^{k-1}\frac{x}{\xi}}{x}\,dx = (k-1)!\left(\Re\frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{k+2}} - \Re\sum_{\rho} \frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}} - \right.$$

$$\left. - \Re\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+2}}\right), \tag{2.10.1}$$

которое получается из тождества леммы IV

$$\sum_{n>x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln\frac{n}{x} = \frac{x^{1-s}}{(s-1)^2} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}}{(s-\rho)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{(s+2n)^3} \quad (x > 1,\ \sigma > 1)$$

умножением на $\frac{1}{x}\ln^{k-1}\frac{x}{\xi}$ и интегрированием по x от ξ до ∞, после чего приравниваются вещественные части.

Доказательство теоремы ведется от противного: предполагают, что теорема VI неверна, т. е. что у римановой ζ-функции существует не-

тривиальный нуль $\rho^* = \sigma^* + it^*$ такой, что $t^* \geqslant \tau$ (где τ—число, указанное в условиях теоремы) и $\sigma^* \geqslant 1 - e^{-10\frac{\beta^3}{\alpha^2}}$.

Основное тождество (2.10.1) берется при s, k и ξ таких, что

$$s^* = 1 + \mu^* + it^*, \quad \mu^* = \max\left(\frac{2\alpha}{\beta}(1 - \sigma^*), \frac{1}{\sqrt{\ln t^*}}\right),$$

$$\alpha \ln t^* \leqslant k + 2 < \left(\alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right) \ln t^*, \quad \xi = e^{k+2}.$$

Модуль левой части (2.10.1) оценивается сверху, что приводит к неравенству

$$\left| \Re \frac{\xi^{1-s}}{(s-\rho)^{k+2}} - \Re \sum_{\rho} \frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}} - \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant (38A + 96\alpha) \frac{\xi^{-\mu^*} e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^3 (\mu^*)^k}. \qquad (2.11.1)$$

Модули первого и третьего члена левой части оцениваются сверху без всякого труда, так что неравенство (2.11.1) заменяется неравенством

$$\left| \Re \sum_{\rho} \frac{\xi^{\rho-s}}{(s-\rho)^{k+2}} \right| \leqslant (39A + 96\alpha) \frac{\xi^{-\mu^*} e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^3 (\mu^*)^k}.$$

Теперь сумма, стоящая слева, разбивается на четыре части. Берутся отдельно те слагаемые, у которых $|t_\rho - t^*| \geqslant 2$, те, у которых $8\mu^* \leqslant |t_\rho - t^*| < 2$, те, у которых $|t_\rho - t^*| < 8\mu^*$, $\sigma_\rho \leqslant 1 - 4\mu^*$ и, наконец, те, у которых $|t_\rho - t^*| < 8\mu^*$, $\sigma_\rho > 1 - 4\mu^*$.

Сначала оценивается сверху модуль суммы слагаемых 1-го типа, а затем, после умножения левой и правой части неравенства на

$$(s - \rho^*)^{k+2} = (1 - \sigma^* + \mu^*)^{k+2},$$

легко оценивается модуль суммы слагаемых, сначала 2-го, а потом 3-го типа. Тогда для получившихся слагаемых 4-го типа, после умножения на $\xi^{1+\mu^*-\sigma^*}$, получается неравенство

$$Z \equiv \left| \Re \sum_{\substack{\rho \\ |t_\rho - t^*| < 8\mu^* \\ \sigma_\rho > 1 - 4\mu^*}} \left[e^{\rho-\rho^*} \left(\frac{s-\rho^*}{s-\rho} \right) \right]^{k+2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant (12A + 24\alpha) \frac{\xi^{1-\sigma^*} e^{98(\ln\ln t^*)^2}}{(t^*)^3} \left(\frac{1 - \sigma^* + \mu^*}{\mu^*} \right)^k. \qquad (2.13.4)$$

Все дальнейшее доказательство проводится с помощью леммы, представляющей собой центральную, наиболее существенную часть доказательства. Эту лемму можно рассматривать, как определенный результат в теории диофантовых приближений, утверждающий, что «достаточно большое» число последовательных степенных сумм от n данных комплексных чисел не могут быть одновременчо «очень малы».

ЛЕММА XII. *Если* $z_1 = 1,\ |z_2| \leqslant 1,\ \ldots,\ |z_n| \leqslant 1,\ m \geqslant 28n$, *то*

$$\max_{\substack{m \leqslant \nu \leqslant m+n \\ \nu \text{ целое}}} |z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu| > \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{e^{26}m}\right)^n.$$

Эта лемма может быть представлена в следующей форме:

ЛЕММА XIV. *Если* $n' \leqslant N'$, $\max(|w_1|, |w_2|, \ldots, |w_{n'}|) \geqslant 1$, $m' \geqslant 56N'$, *то*

$$\max_{\substack{m' \leqslant \nu \leqslant m'+2N' \\ \nu \text{ целое}}} |\Re(w_1^\nu + w_2^\nu + \ldots + w_{n'}^\nu)| \geqslant \frac{1}{8(N')^2}\left(\frac{N'}{e^{26}m'}\right)^{2N'}.$$

Лемма XIV применяется для оценки снизу величины Z в (2.13.4), причем в качестве чисел w_i берутся величины $e^{\rho-\rho^*}\left(\frac{s-\rho^*}{s-\rho}\right)$, а в качестве ν — возможные значения $k+2$. Соответственно подбираются величины n', m', N'. Применение леммы дает, что среди рассматриваемых значений $k\left(\alpha \ln t^* \leqslant k+2 \leqslant \left(\alpha + \frac{3}{\alpha}\right)\ln t^*\right)$ должно быть такое, что

$$|Z| > (t^*)^{-\frac{64\alpha}{\beta}(1-\sigma^*)\ln\frac{\beta e^{26}}{32(1-\sigma^*)e} - 41\sqrt{\ln t^*}\left(24 + \ln\alpha + \frac{1}{2}\ln\ln t^*\right)}.$$

Последнее неравенство, в силу условий, наложенных на t^* и σ^*, противоречит оценке Z сверху в неравенстве (2.13.4). Полученное противоречие и доказывает теорему VI.

«Обратная» теорема VII доказывается (глава III) много проще. Исходя из хорошо известной формулы

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1 - iT}^{\delta_1 + iT} \frac{y^w}{w}\,dw - \begin{matrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{matrix}\right| < \frac{4y^{\delta_1}}{\pi|\ln y|}\cdot\frac{1}{T} \text{ при } \begin{matrix} y > 1 \\ y = 1 \\ 0 < y < 1\end{matrix} \qquad (T > 1,\ \delta_1 > 0)$$

и полагая $\delta_1 = 1 + \frac{1}{\ln x}$, $x = [x] + \frac{1}{2} > e^3$, получаем

$$\left|\sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{n^{it}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1 - iT}^{\delta_1 + iT}\frac{x^w}{w}\frac{\zeta'}{\zeta}(w+it)\,dw\right| \leqslant \frac{4x}{T}\sum_n \frac{\ln n}{n^{\delta_1}\left|\ln\frac{[x]+\frac{1}{2}}{n}\right|}.$$

Сумма, стоящая справа, оценивается сверху непосредственно. Из предположения, что риманова функция $\zeta(w)$, согласно условиям теоремы, не имеет нулей в параллелограмме $1 \geqslant u \geqslant \vartheta_1$, $\tau_1 \leqslant v \leqslant \tau_1 + \tau_1^{\gamma_1}$ $(w = u + iv)$, с помощью теоремы Каратеодори получаем оценку для $\left|\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}\right|$ в круге

$|w - 2 - iv_0| \leqslant 2 - \vartheta_1 - \frac{1}{\ln x}$, где $\tau_1 + 2 \leqslant v_0 \leqslant \tau_1 + \tau_1^{\gamma_1} - 2$.

Теперь, применяя теорему Коши к функции $\frac{x^w}{w}\frac{\zeta'}{\zeta}(w+it)$ в параллелограмме $\left\{\delta_1 \pm iT, \vartheta_1 + \frac{1}{\ln x} \pm iT\right\}$, где $T = \frac{1}{10} t^{\min(1, \gamma_1)}$, получаем оценку модуля интеграла

$$\int\limits_{\delta_1 - iT}^{\delta_1 + iT} \frac{x^w}{w}\frac{\zeta'}{\zeta}(w+it)\,dw.$$

Это дает оценку суммы $\sum\limits_{n<x} \frac{\Lambda(n)}{n^{it}}$ в виде

$$\left|\sum_{n<x} \frac{\Lambda(n)}{n^{it}}\right| < \frac{90}{\min(1, \gamma_1^2)} \cdot \frac{x \ln^4 x}{t^{\min(1, \gamma_1)}}, \tag{3.3.5}$$

откуда непосредственно следует оценка теоремы VII.

В главе IV дается ряд результатов для сумм вида $\sum \cos(t \ln p)$, $\sum e^{it \ln p}$ и $\sum e^{i\lambda\sqrt{\ln p}}$, а именно:

ТЕОРЕМА IX. *При* $0<\lambda<1$, $3 \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$, $t_0 > 0$

$$\min_{t_0 \leqslant x \leqslant t_0 + t_0^\lambda} \left|\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} \cos(x \ln p)\right| < \frac{4N}{t_0^\lambda}.$$

ТЕОРЕМА X. *Если существуют* $\alpha_1 \geqslant 2$, $0<\delta_1<\frac{1}{2}$, $b_5 = b_5(\alpha_1, \delta_1) > 100$ *и* $b_6 = b_6(\alpha_1, \delta_1)$ *такие, что неравенство*

$$\left|\sum_{N' \leqslant p \leqslant N} e^{i\lambda\sqrt{\ln p}}\right| < b_6 \frac{N e^{22(\ln \ln N)^2}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}+\delta_1}}$$

имеет место для всех значений

$$|b_5| \leqslant |\lambda|^{\alpha_1} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N,$$

то $\zeta(s)$ *имеет в полуплоскости* $\sigma \geqslant 1 - e^{-10}\frac{\delta_1^3}{(\alpha_1+1)^3}$ *только конечное число нулей.*

ТЕОРЕМА XI. *Пусть* $T > C > 900^2$. *Тогда мера множества значений* $t \leqslant T$, *для которых при любых*

$$t^{\frac{25}{2}} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$$

имеет место неравенство

$$\left|\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln p}\right| < 1600 \frac{N \ln^3 N}{\sqrt{|t|}},$$

больше, чем $\frac{1}{8} T$.

В приложении рассматривается вопрос о возможностях, предоставляемых методом Виноградова для получения оценок тригонометрических сумм, близких по структуре к написанным выше.

Виноградов ([16]) в 1941 г. доказал следующую общую теорему: Если $f(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно в интервале $4 \leqslant \frac{N}{2} \leqslant x \leqslant N$ и в этом интервале (в его обозначениях)

$$\frac{1}{A} \ll |f''(x)| \ll \frac{1}{A}, \quad \frac{1}{A} \ll |xf'''(x) + 2f''(x)| \ll \frac{1}{A},$$

то для любых $\varepsilon < 0$, $\frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{2\pi i f(p)} \right| = O(N^{1+\varepsilon}) \left(\frac{N}{A} + \frac{A}{N^2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Эта теорема дает, например, хорошие оценки для сумм вида $\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{itp_\eta}$ $\left(0 < \eta < \frac{1}{3}\right)$, но для $\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln^{1+\gamma} p}$ и $\sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{it \ln(N+p)}$ теорема в первом случае совсем неприменима, а во втором случае дает тривиальную оценку.

В связи с этим, применяя метод Виноградова, мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА XII. *Пусть $f(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно при $2e^{e^7} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant x \leqslant N$ и пусть при этих значениях аргумента*

$$|f''(x)| > 0, \quad |xf'''(x) + 2f''(x)| > 0, \quad \frac{1}{A} \leqslant |f'(x)| \leqslant \frac{c_1}{A}, \quad c_1 > 1,$$

$$\frac{c_3}{A \ln^2 N} \leqslant |xf''(x) + f'(x)| \leqslant \frac{c_3}{A},$$

причем $N \ln^2 N \geqslant A \geqslant N^{\frac{8}{9}}$. Тогда для любых $\frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$

$$\left| \sum_{N' \leqslant p \leqslant N''} e^{2\pi i f(p)} \right| < \left(24 + \frac{5c_1^2}{8} + \frac{8}{\sqrt{c_2}} + 4c_3 \right) \sqrt{NA}\, e^{22 (\ln \ln N)^\gamma}.$$

В применении к функциям $f(x) = \frac{t}{2\pi} \ln^{1+\gamma} x$, $f(x) = \frac{t}{2\pi} \ln x (\ln \ln x)^\gamma$, $f(x) = \frac{t}{2\pi} \ln(N + x)$ получаются следующие результаты:

1) при $-\frac{3}{4} \leqslant \gamma \leqslant 1$, $e^{16200} \leqslant t^{10} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it \ln^{1+\gamma} p} \right| < \left(7500 + \frac{7}{\sqrt{|\gamma|}} \right) \frac{N e^{22(\ln \ln N)^2}}{\sqrt{t}} ;$$

2) при $-\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2}$, $2e^{e^7} \leqslant t^{10} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it \ln p (\ln \ln p)^{\gamma}} \right| \leqslant \left(272 + \frac{32}{\sqrt{|\gamma|}} \right) \frac{N e^{22(\ln \ln N)^2}}{\sqrt{t}} ;$$

3) при $2e^{e^7} \leqslant t^9 \leqslant \frac{N}{2} \leqslant N' < N'' \leqslant N$

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it \ln (N+p)} \right| \leqslant 168 \frac{N e^{22(\ln \ln N)^2}}{\sqrt{t}} .$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 263—282 Série mathématique

А. Ф. ТИМАН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком **А. Н. Колмогоровым)**

В работе исследуется метод приближения непрерывных функций тригонометрическими полиномами, являющийся обобщением метода суммирования С. Н. Бернштейна и Рогозинского.

Даются необходимые и достаточные условия сходимости рассматриваемых тригонометрических полиномов на классе непрерывных функций и соответствующие асимптотические оценки.

Полученные результаты относятся к случаям суммирования рядов Фурье и интерполяционных тригонометрических полиномов с равноотстоящими узлами.

§ 1

1. Пусть $\tilde{C}$ обозначает класс непрерывных периода 2π функций и

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1}$$

— сумма Фурье порядка n функции $f \in \tilde{C}$.

Введем в рассмотрение тригонометрический полином порядка n вида

$$\omega_n(k; f, x) = \frac{1}{2}\left\{S_n(f, x) + S_n\left(f, x + \frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right\}, \tag{2}$$

где k — целое число. При $k = 1$ этот полином рассматривался С. Н. Бернштейном ([1]), который показал, что $\omega_n(1; f, x)$ при $n \to \infty$ равномерно стремится к $f(x)$ для любой функции $f(x)$ из $\tilde{C}$.

Далее, Рогозинский [([2]), ([4])] доказал, что сходимость $\omega_n(k; f, x)$ (и притом равномерная) имеет место для любой функции $f \in \tilde{C}$ в предположении, что k есть заданное целое нечетное число.

В связи с этим может представлять интерес следующая задача:

Пусть $k = k(n)$ есть целочисленная функция от $n = 1, 2, 3, \ldots$, каким условиям она должна удовлетворять, чтобы имело место

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(k; f, x) = f(x) \tag{3}$$

для всех $f \in \tilde{C}$?

В статье дается исчерпывающий ответ на данный вопрос.

Наряду с суммами вида (2) мы рассматриваем также суммы вида

$$\bar{\omega}_n(k; f, x) = \frac{1}{2}\left\{S_n(f, x) - S_n\left(f, x + \frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right\} \tag{4}$$

и изучаем их с точки зрения сходимости к нулю для всех $f \in \tilde{C}$. При этом необходимые и достаточные условия для сходимости полиномов (2) и (4) дают некоторое представление о поведении кривых $y = S_n(f, x)$. Легко видеть, что, не уменьшая общности задачи, можно считать $|k| \leqslant n$.

Обозначим через E_{n1} (соответственно E_{n2}) совокупность всех положительных нечетных (соответственно четных) чисел, не превышающих n. Тогда имеют место следующие теоремы (§ 2):

ТЕОРЕМА I. *Для того чтобы имело место равенство* (3) *для всех* $f \in \tilde{C}$ *равномерно относительно* x, *необходимо и достаточно, чтобы для всех значений* n, *бо́льших некоторого* n_0, *выполнялись условия:*

$$|k| \in E_{n1}, \tag{5}$$

$$k = O(1). \tag{6}$$

Следствие. *Для того чтобы имело место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{S_n\left(f, x - \frac{k\pi}{2n+1}\right) + S_n\left(f, x + \frac{k\pi}{2n+1}\right)\right\} = f(x)$$

для всех $f \in \tilde{C}$ *равномерно относительно* x, *необходимо и достаточно, чтобы для всех значений* n, *бо́льших некоторого* n_0, *выполнялись условия* (5) *и* (6).

ТЕОРЕМА II. *Для того чтобы тригонометрический полином* $\bar{\omega}_n(k; f, x)$ ($|k| \leqslant n$) *равномерно стремился к нулю, какова бы ни была функция* $f \in \tilde{C}$, *необходимо и достаточно, чтобы для всех значений* n, *бо́льших некоторого* n_0, *выполнялись условия:*

$$|k| \in E_{n2}, \tag{7}$$

$$k = O(1). \tag{8}$$

2. Если в пространстве $\tilde{C}$ непрерывных функций $f(x)$, где за норму f принимают $\sup_x |f(x)|$, рассматривать линейные операторы $\omega_n(k; f, x)$ и $\bar{\omega}_n(k; f, x)$ (при фиксированном x — линейные функционалы), то, пользуясь известным выражением для суммы n первых членов ряда Фурье

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt, \tag{9}$$

получим нормы $L_{n,k}$ и $\bar{L}_{n,k}$ этих операторов (функционалов):

$$
\begin{aligned}
L_{n,k} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} |D_{n,k}(u)\sin(2n+1)u|\,du,\\
\overline{L}_{n,k} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} |\overline{D}_{n,k}(u)\sin(2n+1)u|\,du,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где

$$
\begin{aligned}
D_{n,k}(u) &= \frac{1}{\sin u} + (-1)^k \frac{1}{\sin\left(u+\frac{k\pi}{2n+1}\right)},\\
\overline{D}_{n,k}(u) &= \frac{1}{\sin u} - (-1)^k \frac{1}{\sin\left(u+\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Теоремы I и II базируются на следующей лемме, представляющей собой, в сущности, основной результат работы.

ЛЕММА I. *При $|k| \leqslant n$ имеют место асимптотические равенства:*

$$
\begin{aligned}
L_{n,k} &= \begin{cases} \frac{4}{\pi^2}\ln|k| + O(1), & \text{если } |k| \in E_{n1},\\ \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1), & \text{если } |k| \in E_{n2},\end{cases}\\
\overline{L}_{n,k} &= \begin{cases} \frac{4}{\pi^2}\ln|k| + O(1), & \text{если } |k| \in E_{n2},\\ \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1), & \text{если } |k| \in E_{n1},\end{cases}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно k и n ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Из этой леммы и известной теоремы о последовательности линейных операторов с неограниченными нормами ([4]) следует справедливость теорем I и II.

3. В § 3 рассматривается случай интерполяционных тригонометрических полиномов с равноотстоящими узлами для функции $f(x) \in \widetilde{C}$ и доказываются предложения, аналогичные предложениям § 2.

Пусть

$$
S_n^{(n)}(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^{(n)}\cos\nu x + b_\nu^{(n)}\sin\nu x)
$$

— n-й интерполяционный тригонометрический полином функции $f(x)$ с $2n+1$ равноотстоящими узлами $x_\nu^{(n)} = \frac{2\nu\pi}{2n+1}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2n$), где

$$
\begin{aligned}
a_\nu^{(n)} &= \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)})\cos\nu x_i^{(n)},\\
b_\nu^{(n)} &= \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)})\sin\nu x_i^{(n)}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим тригонометрические суммы *

$$\tilde{\omega}_n(k;\, f,\, x) = \frac{1}{2}\{S_n^{(n)}(f,\, x) + S_n^{(n)}(f,\, x + x_k^{(n)})\},$$
$$\tilde{\tilde{\omega}}_n(k;\, f,\, x) = \frac{1}{2}\{S_n^{(n)}(f,\, x) - S_n^{(n)}(f,\, x + x_k^{(n)})\}. \tag{13}$$

Пользуясь известным выражением для интерполяционного полинома $S_*^{(n)}(f, x)$

$$S_*^{(n)}(f,\, x) = \frac{1}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n} f(x_\nu^{(n)})\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x - x_\nu^{(n)})}{\sin\frac{x - x_\nu^{(n)}}{2}}, \tag{14}$$

в силу периодичности $f(x)$, можно полиномы (13) представить в более удобной форме:

$$\tilde{\omega}_n(k;\, f,\, x) = \frac{1}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f(x_\nu^{(n)}) + f(x_{\nu+k}^{(n)})}{2}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x - x_\nu^{(n)})}{\sin\frac{x - x_\nu^{(n)}}{2}},$$
$$\tilde{\tilde{\omega}}_n(k;\, f,\, x) = \frac{1}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f(x_\nu^{(n)}) - f(x_{\nu+k}^{(n)})}{2}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x - x_\nu^{(n)})}{\sin\frac{x - x_\nu^{(n)}}{2}}. \tag{15}$$

При этом нормы операторов $\tilde{\omega}_n(k;\, f,\, x)$ и $\tilde{\tilde{\omega}}_n(k;\, f,\, x)$ соответственно равны

$$\tilde{L}_{n,k} = \sup_x \tilde{L}_{n,k}(x), \quad \tilde{L}_{n,k}(x) = \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{2n}|\tilde{D}_{n,k}(x_\nu^{(n)})|,$$
$$\tilde{\tilde{L}}_{n,k} = \sup_x \tilde{\tilde{L}}_{n,k}(x), \quad \tilde{\tilde{L}}_{n,k}(x) = \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{2n}|\tilde{\tilde{D}}_{n,k}(x_\nu^{(n)})|, \tag{16}$$

где

$$\tilde{D}_{n,k}(x_\nu^{(n)}) = \frac{1}{\sin\frac{x - x_\nu^{(n)}}{2}} + (-1)^k\frac{1}{\sin\frac{x - x_{\nu-k}^{(n)}}{2}},$$
$$\tilde{\tilde{D}}_{n,k}(x_\nu^{(n)}) = \frac{1}{\sin\frac{x - x_\nu^{(n)}}{2}} - (-1)^k\frac{1}{\sin\frac{x - x_{\nu-k}^{(n)}}{2}}. \tag{17}$$

В § 3 доказывается следующая

---

* Случай, когда $k = 1$, исследуется в работе Ф. Харшиладзе ([3]).

ЛЕММА II. *При* $|k| \leqslant n$ *имеют место асимптотические равенства:*

$$\tilde{L}_{n,k}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\ln|k| + O(1), & \text{если } |k| \in E_{n1}, \\ \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\ln n \;\; + O(1), & \text{если } |k| \in E_{n2}, \end{cases}$$

$$\bar{\tilde{L}}_{n,k}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\ln|k| + O(1), & \text{если } |k| \in E_{n2}, \\ \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\ln n \;\; + O(1), & \text{если } |k| \in E_{n1}, \end{cases} \tag{18}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно* n, k *и* x.

Из этой леммы и рассуждений, аналогичных рассуждениям при доказательстве теорем I и II, в качестве следствий получаем следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА III. *Для того чтобы тригонометрический полином* $\tilde{\omega}_n(k; f, x)$ *равномерно стремился к функции* $f(x)$, *какова бы ни была* $f \in \tilde{C}$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (5) *и* (6).

ТЕОРЕМА IV. *Для того чтобы тригонометрический полином* $\bar{\tilde{\omega}}_n(k; f, x)$ *равномерно стремился к нулю, какова бы ни была функция* $f \in \tilde{C}$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (7) *и* (8).

§ 2

1. Доказательство леммы I. — 1°. *k — нечетно.* Пусть

$$k = 2m + 1 \text{ и } 0 < k < 2n + 1.$$

В этом случае функция

$$D_{n,k}(u)\sin(2n+1)u = \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} - \frac{\sin(2n+1)u}{\sin\left(u + \frac{k\pi}{2n+1}\right)} \tag{19}$$

в интервале $(0, \pi)$ меняет знак во всех точках $u_i = \frac{i\pi}{2n+1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, \ldots, 2n)$ кроме $i = n - m$ и $i = 2(n - m)$. Пользуясь этим обстоятельством, в силу первого из равенств (10), имеем

$$L_{n,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |D_{n,k}(u)\sin(2n+1)u|\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{i=0}^{n-m-1}(-1)^i \int_{\frac{i\pi}{2n+1}}^{\frac{(i+1)\pi}{2n+1}} D_{n,k}(u)\sin(2n+1)u\,du - \right.$$

$$- \sum_{i=n-m}^{2(n-m)-1}(-1)^i \int_{\frac{i\pi}{2n+1}}^{\frac{(i+1)\pi}{2n+1}} D_{n,k}(u)\sin(2n+1)u\,du +$$

$$\left. + \sum_{i=2(n-m)}^{2n}(-1)^i \int_{\frac{i\pi}{2n+1}}^{\frac{(i+1)\pi}{2n+1}} D_{n,k}(u)\sin(2n+1)u\,du\right\}.$$

После замены переменной в каждом из интегралов получим

$$L_{n,k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\sin(2n+1)t\left\{\sum_{i=0}^{n-m-1}D_{n,k}\left(t+\frac{i\pi}{2n+1}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=n-m}^{2(n-m)-1}D_{n,k}\left(t+\frac{i\pi}{2n+1}\right)+\sum_{i=2(n-m)}^{2n}D_{n,k}\left(t+\frac{i\pi}{2n+1}\right)\right\}dt.$$

В силу очевидного тождества для нечетного k

$$D_{n,k}\left(t+\frac{i\pi}{2n+1}\right)=\sum_{\nu=0}^{2m}D_{n,1}\left(t+\frac{i+\nu}{2n+1}\pi\right),$$

после подстановки и изменения порядка суммирования получаем

$$L_{n,k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\sin(2n+1)t\sum_{\nu=0}^{2m}\left\{\sum_{i=0}^{n-m-1}D_{n,1}\left(t+\frac{i+\nu}{2n+1}\pi\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=n-m}^{2(n-m)-1}D_{n,1}\left(t+\frac{i+\nu}{2n+1}\pi\right)+\sum_{i=2(n-m)}^{2n}D_{n,1}\left(t+\frac{i+\nu}{2n+1}\pi\right)\right\}dt.$$

Раскрывая внутренние суммы, находим, после преобразований, что

$$L_{n,k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\sin(2n+1)t\sum_{\nu=0}^{2m}\left\{\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)}-\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\nu+n-m}{2n+1}\pi\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\nu+2(n-m)}{2n+1}\pi\right)}\right\}dt. \tag{20}$$

Вносdéfinitions интегрирование под знак суммы и делая в интегралах замену переменной, получим

$$L_{n,k}=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{2m}(-1)^\nu\left\{\int_{\frac{\nu\pi}{2n+1}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{2n+1}}\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du-\right.$$
$$\left.-(-1)^{n-m}\int_{\frac{\nu+n-m}{2n+1}\pi}^{\frac{\nu+n-m+1}{2n+1}\pi}\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du+\int_{\frac{\nu+2(n-m)}{2n+1}\pi}^{\frac{\nu+2(n-m)+1}{2n+1}\pi}\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du\right\}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{2\sum_{\nu=0}^{2m}(-1)^\nu\int_{\frac{\nu\pi}{2n+1}}^{\frac{\nu+1}{2n+1}\pi}\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du-\right.$$

$$-\sum_{\nu=0}^{2m}(-1)^{n+m+\nu}\int\limits_{\frac{\nu+n-m}{2n+1}\pi}^{\frac{\nu+n-m+1}{2n+1}\pi}\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du\Bigg\}$$

или

$$L_{n,k}=\frac{1}{\pi}\left\{2\int\limits_{0}^{\frac{2m+1}{2n+1}\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du-\int\limits_{\frac{n-m}{2n+1}\pi}^{\frac{n+m+1}{2n+1}\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du\right\}. \quad (21)$$

Если $k\leqslant n$, то вследствие ограниченности $\frac{1}{\sin u}-\frac{1}{u}$ для $|u|\leqslant\frac{\pi}{2}$, первый из интегралов правой части (21) лишь на ограниченную величину отличается от интеграла

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{2m+1}{2n+1}\pi}\frac{|\sin(2n+1)u|}{u}\,du=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{|\sin(2m+1)u|}{u}\,du, \quad (22)$$

а выражение, стоящее в правой части (22), лишь на ограниченную величину отличается от константы Лебега

$$L_m=\frac{4}{\pi^2}\ln m+O(1).$$

По тем же соображениям

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{n-m}{2n+1}\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du=\frac{1}{2}L_{n-m}+O(1)=\frac{2}{\pi^2}\ln(n-m)+O(1),\\
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{n+m+1}{2n+1}\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du-\\
&\qquad-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{n-m}{2n+1}\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du=\frac{2}{\pi^2}\ln\frac{n^2}{n-m}+O(1).
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Поэтому после подстановки полученных значений интегралов в (21), приняв во внимание, что в рассматриваемом случае

$$\ln\frac{n}{n-m}=O(1), \quad \ln m=\ln k+O(1),$$

находим

$$L_{n,k}=\frac{4}{\pi^2}\ln k+O(1). \quad (24)$$

Если $k > n$, то первый интеграл в правой части (21) можно записать в виде

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2m+1}{2n+1}\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2(n-m)}{2n+1}\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du=\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^2}{n-m}+O(1).$$

Подставляя полученное значение первого интеграла и найденное прежде значение второго интеграла в (21), найдем, что

$$L_{n,k}=\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1). \tag{25}$$

Таким образом, из (24) и (25) получаем

$$L_{n,k}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{4}{\pi^2}\ln k+O(1), & \text{когда } k\leqslant n,\\ \frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1), & \text{когда } k>n.\end{array}\right.\quad (0<k<2n+1)\Bigg\} \tag{26}$$

Из (10) и (11) непосредственно следует, что $L_{n,k}=L_{n,-k}$. Поэтому, согласно (26), если $k=-2m-1<0$ и $0<|k|<2n+1$, то

$$L_{n,k}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{4}{\pi^2}\ln|k|+O(1), & \text{когда } |k|\leqslant n,\\ \frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1), & \text{когда } |k|>n.\end{array}\right. \tag{27}$$

2°. *k—четное.* Пусть $k=2m$ и $0<|k|<2n+1$. Этот случай приводится к первому, если заметить, что

$$L_{n,2n+1-k}=L_{n,-k}.$$

Поэтому

$$L_{n,k}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{4}{\pi^2}\ln(n-|m|)+O(1), & \text{когда } |k|\geqslant n,\\ \frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1), & \text{когда } |k|<n.\end{array}\right. \tag{28}$$

Для вычисления $\overline{L}_{n,k}$ замечаем, что, согласно второй из формул (10),

$$\overline{L}_{n,k}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}|\overline{D}_{n,k}(u)\sin(2n+1)u|\,du.$$

В силу очевидного тождества

$$\overline{D}_{n,k}(u)=D_{n,k+1}(u)-(-1)^k D_{n,1}\left(u+\frac{k\pi}{2n+1}\right),$$

получаем

$$\overline{L}_{n,k}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}|\sin(2n+1)u|\left|D_{n,k+1}(u)-(-1)^k D_{n,1}\left(u+\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right|du. \tag{29}$$

Но

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |\sin(2n+1)u|\left|D_{n,1}\left(u+\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right|du =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |\sin(2n+1)u\, D_{n,1}(u)|\, du = L_{n,1},$$

а в силу (26)

$$L_{n,1}=O(1).$$

Поэтому

$$\overline{L}_{n,k}=L_{n,k+1}+O(1). \tag{30}$$

Из (26), (27), (28) и (30) следует справедливость (12).

Таким образом, лемма I полностью доказана.

2. Доказательство теорем I и II. Пусть функция $f(x)\in\widetilde{C}$ и $T_n(x)$ — тригонометрический полином порядка n, дающий для нее наилучшее приближение:

$$\sup_x |R_n(x)|=E_n(f), \quad R_n(x)=f(x)-T_n(x).$$

В силу определения полиномов $\omega_n(k;\ f,\ x)$ и $\overline{\omega}_n(k;\ f,\ x)$, имеем

$$\begin{aligned} &|\omega_n(k;\ R_n,\ x)|\leqslant L_{n,k}E_n(f),\\ &|\overline{\omega}_n(k;\ R_n,\ x)|\leqslant \overline{L}_{n,k}E_n(f). \end{aligned} \tag{31}$$

Заметив, далее, что

$$\begin{aligned} &\omega_n(k;\ R_n,\ x)=\omega_n(k;\ f,\ x)-\omega_n(k;\ T_n,\ x),\\ &\overline{\omega}_n(k;\ R_n,\ x)=\overline{\omega}_n(k;\ f,\ x)-\overline{\omega}_n(k;\ T_n,\ x), \end{aligned}$$

а $S_n(T_n,\ x)=T_n(x)$, и что

$$\left|R_n\left(x+\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right|\leqslant E_n(f),$$

из (31) получаем

$$\begin{aligned} &\left|\omega_n(k;\ f,\ x)-\frac{1}{2}\left\{f(x)+f\left(x+\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right\}\right|\leqslant(1+L_{n,k})E_n(f),\\ &\left|\overline{\omega}_n(k;\ f,\ x)-\frac{1}{2}\left\{f(x)-f\left(x+\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right\}\right|\leqslant(1+\overline{L}_{n,k})E_n(f). \end{aligned} \tag{32}$$

Если $\omega(f,\ h)$ есть модуль непрерывности функции $f(x)$, то очевидно, что из соотношений (32) следует

$$\begin{aligned} &|\omega_n(k;\ f,\ x)-f(x)|\leqslant(1+L_{n,k})E_n(f)+\frac{1}{2}\,\omega\left(f,\ \frac{2k\pi}{2n+1}\right),\\ &|\overline{\omega}_n(k;\ f,\ x)|\leqslant(1+\overline{L}_{n,k})E_n(f)+\frac{1}{2}\,\omega\left(f,\ \frac{2k\pi}{2n+1}\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Из (12) очевидно, что числа $L_{n,k}$ $(|k|\leqslant n)$ ограничены тогда и только тогда, если значения $|k(n)|$, начиная с некоторого n, образуют ограниченную и принадлежащую E_{n1} совокупность. Если совокупность чисел $k(n)$ удовлетворяет этим условиям, то числа $L_{n,k}$ образуют ограничен-

ную последовательность и последовательность $\omega\left(f, \frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ стремится к нулю. Поэтому из (33) и того обстоятельства, что $E_n(f) \to 0$ для изучаемого класса функций, получим

$$\omega_n(k; f, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \tag{34}$$

равномерно относительно x, какова бы ни была функция $f(x) \in \tilde{C}$. Этим доказана достаточность условий теоремы I.

Необходимость условий теоремы вытекает из того, что в случае невыполнения по крайней мере одного из них из леммы I следует неограниченность норм $L_{n,k}$ линейного оператора $\omega_n(k; f, x)$. А отсюда, согласно известной теореме о последовательности линейных операторов с неограниченными нормами, следует, что для любого x найдется такая непрерывная функция $f(x)$, для которой $\omega_n(k; f, x)$ в точке x расходится.

Точно так же доказывается теорема II.

Соотношения (33) могут служить для нахождения оценок соответствующих приближений.

Из доказательства теорем настоящего параграфа ясно, что требование равномерной сходимости в них может быть заменено требованием сходимости для каждого x.

§ 3

1. Доказательство леммы II. — 1°. *k — нечетно.* Пусть

$$k = 2m + 1 \text{ и } 0 < k < 2n+1.$$

В этом случае можно показать, что $\tilde{D}_{n,k}(x_i^{(n)})$ положительно для тех i, для которых

$$0 \leqslant x_i^{(n)} < x - 2\pi + x_k^{(n)}, \quad x - \pi + \frac{x_k^{(n)}}{2} \leqslant x_i^{(n)} < x,$$

$$x + x_k^{(n)} \leqslant x_i^{(n)} < x + \pi + \frac{x_k^{(n)}}{2},$$

и отрицательно для тех i, для которых

$$x - 2\pi + x_k^{(n)} \leqslant x_i^{(n)} < x - \pi + \frac{x_k^{(n)}}{2}, \quad x \leqslant x_i^{(n)} < x + x_k^{(n)},$$

$$x + \pi + \frac{x_k^{(n)}}{2} \leqslant x_i^{(n)} < 2\pi.$$

Рассмотрим два существенных случая взаимного расположения точек x и $x_k^{(n)}$ на интервале $(0, 2\pi)$: $x + x_k^{(n)} \geqslant 2\pi$ и $x + x_k^{(n)} < 2\pi$.

Пусть $x + x_k^{(n)} \geqslant 2\pi$. В этом случае, в силу первого из равенств (15),

$$\tilde{L}_{n,k}(x) = \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)} \sum_{\nu=0}^{2n} |\tilde{D}_{n,k}(x_\nu^{(n)})| =$$

$$= \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\left\{ \sum_{0\leqslant x_i^{(n)}<x-2\pi+x_k^{(n)}} \tilde{D}_{n,k}(x_i^{(n)}) - \sum_{x-2\pi+x_k^{(n)}\leqslant x_i^{(n)}<x-\pi+\frac{x_k^{(n)}}{2}} \tilde{D}_{n,k}(x_i^{(n)}) + \sum_{x-\pi+\frac{x_k^{(n)}}{2}\leqslant x_i^{(n)}<x} \tilde{D}_{n,k}(x_i^{(n)}) - \sum_{x\leqslant x_i^{(n)}<2\pi} \tilde{D}_{n,k}(x_i^{(n)}) \right\}.$$

В силу очевидного тождества для нечетного k

$$\tilde{D}_{n,k}(x_i^{(n)}) = \sum_{\nu=0}^{2m} \tilde{D}_{n,1}(x_{i-k+\nu+1}^{(n)}), \tag{35}$$

при $x_s^{(n)} \leqslant x \leqslant x_{s+1}^{(n)}$ получаем

$$\tilde{L}_{n,k}(x) = \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\left\{ \sum_{i=0}^{s-2n+2m}\sum_{\nu=0}^{2m} \tilde{D}_{n,1}(x_{i-k+\nu+1}^{(n)}) - \sum_{i=s-2n+2m+1}^{s-n+m}\sum_{\nu=0}^{2m} \tilde{D}_{n,1}(x_{i-k+\nu+1}^{(n)}) + \sum_{i=s-n+m+1}^{s}\sum_{\nu=0}^{2m} \tilde{D}_{n,1}(x_{i-k+\nu+1}^{(n)}) - \sum_{i=s+1}^{2n}\sum_{\nu=0}^{2m} \tilde{D}_{n,1}(x_{i-k+\nu+1}^{(n)}) \right\}.$$

Изменив порядок суммирования в правой части последнего соотношения и раскрыв после этого внутренние суммы, после простых преобразований получим, что

$$\tilde{L}_{n,k}(x) = \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2m}\left\{ \frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s-2n}^{(n)}}{2}} - \frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s-n-m}^{(n)}}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s-2m}}{2}} \right\}, \tag{36}$$

откуда

$$\tilde{L}_{n,k}(x) = \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2n+1}\left\{ -\sum_{\nu=0}^{2m} \frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}} + \sum_{\nu=n-m}^{n+m} \frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}} + \sum_{\nu=0}^{2m} \frac{1}{\sin\frac{x-x_{s-\nu}^{(n)}}{2}} \right\}$$

или

$$\tilde{L}_{n,k}(x)=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2n+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}+\sum_{\nu=n}^{n+m}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{\nu=0}^{n-m-1}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}-\sum_{\nu=0}^{2m}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}+\sum_{\nu=0}^{2m}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{s-\nu}^{(n)}}{2}}\right\}.$$

Заметим, что, в силу ограниченности функции $\frac{1}{\sin u}-\frac{1}{u}$ для $|u|\leqslant\frac{\pi}{2}$, имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{2}{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}+O(n)=-\frac{2n+1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu+1}+O(n)=\\
&\qquad=-\frac{2n+1}{\pi}\ln n+O(n),\\
&\sum_{\nu=1}^{n-m-1}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}=\sum_{\nu=1}^{n-m-1}\frac{2}{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}+O(n-m)=\\
&\qquad=-\frac{2n+1}{\pi}\ln(n-m)+O(n),\\
&\sum_{\nu=n}^{n+m}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}=\sum_{\nu=n}^{n+m}\frac{2}{x_{\nu-2n+s}^{(n)}-x}+O(m)=\\
&=\frac{2n+1}{\pi}\sum_{\nu=n}^{n+m}\frac{1}{\nu-2n}+O(m)=-\frac{2n+1}{\pi}\ln\frac{n}{n-m}+O(n).
\end{aligned}\right\}\qquad(37)$$

Если $k\leqslant n$, то в силу тех же соображений

$$\sum_{\nu=1}^{2m}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}=-\frac{2n+1}{\pi}\ln m+O(n),$$

$$\sum_{\nu=1}^{2m}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{s-\nu}^{(n)}}{2}}=\frac{2n+1}{\pi}\ln m+O(n).\qquad(38)$$

Если $k>n$, то последние две суммы будут равны

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{2m}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}+\sum_{\nu=n}^{2m}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}=\\
&\qquad=-\frac{2n+1}{\pi}\ln\frac{n^2}{n-m}+O(n),\\
&\sum_{\nu=1}^{2m}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{s-\nu}^{(n)}}{2}}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{x-x_{s-\nu}^{(n)}}{2}}=\sum_{\nu=n}^{2m}\frac{2}{\sin\frac{x-x_{s-\nu}^{(n)}}{2}}=\\
&\qquad=\frac{2n+1}{\pi}\ln\frac{n^2}{n-m}+O(n).
\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

Подставляя полученные значения сумм из (37), (38) и (39) в (36) и замечая, что отдельные слагаемые сумм, входящих в выражение для $\widetilde{L}_{n,k}(x)$, равномерно ограничены относительно n и x, получим

$$\widetilde{L}_{n,k}(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\ln k+O(1), & \text{когда } k\leqslant n,\\ \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\ln n+O(1), & \text{когда } k>n.\end{cases}\qquad(40)$$

Пусть теперь $x+x_k^{(n)}<2\pi$. В этом случае либо $x+\frac{x_k^{(n)}}{2}\geqslant\pi$, либо $x+\frac{x_k^{(n)}}{2}<\pi$.

Если $x+\frac{x_k^{(n)}}{2}\geqslant\pi$, то, в силу первого из равенств (15) и уже отмеченной закономерности в изменении знака $\widetilde{D}_{n,k}(x_i^{(n)})$,

$$\widetilde{L}_{n,k}(x)=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\Bigg\{-\sum_{i=0}^{s-n+m}\sum_{\nu=0}^{2m}\widetilde{D}_{n,1}(x_{i-k+\nu+1}^{(n)})+$$
$$+\sum_{i=s-n+m+1}^{s}\sum_{\nu=0}^{2m}\widetilde{D}_{n,1}(x_{i-k+\nu+1}^{(n)})-\sum_{i=s+1}^{s+2m+1}\sum_{\nu=0}^{2m}\widetilde{D}_{n,1}(x_{i-k+\nu+1}^{(n)})+$$
$$+\sum_{i=s+2m+2}^{2n}\sum_{\nu=0}^{2m}\widetilde{D}_{n,1}(x_{i-k+\nu+1}^{(n)})\Bigg\},$$

откуда, после изменения порядка суммирования и соответствующих простых преобразований, находим

$$\widetilde{L}_{n,k}(x)=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2m}\Bigg\{-\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s-n-m}^{(n)}}{2}}+$$
$$+\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s-2m}^{(n)}}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{x-x_{\nu+s+1}^{(n)}}{2}}\Bigg\}.$$

Сравнивая правую часть полученного соотношения с (36), мы видим, что $\widetilde{L}_{n,k}(x)$ имеет то же значение, что и в (40).

Если же $x+\frac{x_k^{(n)}}{2}<\pi$, то в силу уже приведенных соображений,

$$\widetilde{L}_{n,k}(x)=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\left\{\sum_{i=0}^{s}\sum_{\nu=0}^{2m}\widetilde{D}_{n,1}(x^{(n)}_{i-k-\nu+1})-\right.$$

$$-\sum_{i=s+1}^{s+2m+1}\sum_{\nu=0}^{2m}\widetilde{D}_{n,k}(x^{(n)}_{i-k+\nu+1})+\sum_{i=s+2m+2}^{s+n+m+1}\sum_{\nu=0}^{2m}\widetilde{D}_{n,1}(x^{(n)}_{i-k+\nu+1})-$$

$$\left.-\sum_{i=s+n+m+2}^{2n}\sum_{\nu=0}^{2m}\widetilde{D}_{n,1}(x^{(n)}_{i-k+\nu+1})\right\},$$

или, после соответствующих преобразований,

$$\widetilde{L}_{n,k}(x)=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2m}\left\{\frac{1}{\sin\frac{x-x^{(n)}_{\nu+s-2m}}{2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sin\frac{x-x^{(n)}_{\nu+s+1}}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{x-x^{(n)}_{\nu+s+n-m+1}}{2}}\right\}.$$

Очевидно, полученное выражение совпадает с (36), а поэтому $\widetilde{L}_{n,k}(x)$ имеет то же значение, что и в (40).

Таким образом, каково бы ни было нечетное положительное число k, $\widetilde{L}_{n,k}(x)$ принимает значения из соотношения (40).

Из (15) и (16) непосредственно следует, что

$$\widetilde{L}_{n,k}(x)=\widetilde{L}_{n,-k}(x). \tag{41}$$

В самом деле,

$$\widetilde{L}_{n,-k}(x)=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{2n}\left|\frac{1}{\sin\frac{x-x^{(n)}_{\nu}}{2}}+(-1)^k\frac{1}{\sin\frac{x-x^{(n)}_{\nu+k}}{2}}\right|=$$

$$=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n-1)}\sum_{\mu=k}^{2n+k}\left|\frac{1}{\sin\frac{x-x^{(n)}_{\mu-k}}{2}}+(-1)^k\frac{1}{\sin\frac{x-x^{(n)}_{\mu}}{2}}\right|=$$

$$=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\sum_{\mu=0}^{2n}\left|\frac{1}{\sin\frac{x-x^{(n)}_{\mu}}{2}}+(-1)^k\frac{1}{\sin\frac{x-x^{(n)}_{\mu-k}}{2}}\right|=\widetilde{L}_{n,k}(x).$$

В силу (41) и (40), для $k=-2m-1<0$ получаем

$$\tilde{L}_{n,k}(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\ln|k|+O(1), \text{ когда } |k|\leqslant n,\\ \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\ln n+O(1), \text{ когда } 2n+1>|k|>n.\end{cases}\tag{42}$$

2°. *k — четное.* Пусть $k=2m$. Этот случай приводится к первому, если заметить, что

$$\tilde{L}_{n,2n-k+1}(x)=\tilde{L}_{n,-k}(x).$$

Поэтому

$$\tilde{L}_{n,k}(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\ln\frac{|m(n-|m|)}{2}+O(1), \text{ когда } 2n+1>|k|\geqslant n,\\ \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\ln n+O(1), \text{ когда } |k|<n.\end{cases}\tag{43}$$

Значение $\overline{\tilde{L}}_{n,k}(x)$ находим рассуждениями, аналогичными рассуждениям § 2.

Согласно второму из соотношений (15),

$$\overline{\tilde{L}}_{n,k}(x)=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{2n}\left|\overline{\tilde{D}}_{n,k}(x_{\nu}^{(n)})\right|.$$

В силу очевидного тождества

$$\overline{\tilde{D}}_{n,k}(x_{\nu}^{(n)})=\tilde{D}_{n,k+1}(x_{\nu}^{(n)})-(-1)^{k}\tilde{D}_{n,1}(x_{\nu-k}^{(n)}),\tag{44}$$

получаем

$$\overline{\tilde{L}}_{n,k}(x)=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{2n}\left|\tilde{D}_{n,k+1}(x_{\nu}^{(n)})-(-1)^{k}\tilde{D}_{n,1}(x_{\nu-k}^{(n)})\right|,$$

а так как

$$\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{2n}|\tilde{D}_{n,1}(x_{\nu-k}^{(n)})|=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{2n}|\tilde{D}_{n,1}(x_{\nu}^{(n)})|=\tilde{L}_{n,1}(x),$$

то, в силу (40),

$$\overline{\tilde{L}}_{n,k}(x)=\tilde{L}_{n,k+1}(x)+O(1).\tag{45}$$

Из (40), (42), (43) и (45) следует справедливость (18).

Таким образом, лемма II полностью доказана.

2. Доказательство теорем III и IV. Совершенно аналогично рассуждениям п. 2 § 2 мы получим

$$\begin{gathered}|\tilde{\omega}_n(k;\,f,\,x)-f(x)|\leqslant[1+\tilde{L}_{n,k}(x)]\,E_n(f)+\frac{1}{2}\,\omega\left(f,\,\frac{2k\pi}{2n+1}\right),\\ |\overline{\tilde{\omega}}_n(k;\,f,\,x)|\leqslant[1+\overline{\tilde{L}}_{n,k}(x)]\,E_n(f)+\frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right),\end{gathered}\tag{46}$$

откуда, в силу леммы II, следует достаточность условий теорем III и IV.

Необходимость этих условий следует из рассуждений, аналогичных тем, которые были проведены в теоремах I и II. Однако в этом случае, если совокупность $k(n)$ не удовлетворяет условиям (5) и (6) (соответственно (7) и (8)), то, как известно, уже нельзя утверждать, что для каждого x будет существовать функция $f(x)$, для которой суммы $\tilde{\omega}_n(k; f, x)$ (соответственно $\tilde{\tilde{\omega}}_n(k; f, x)$) расходятся. Поэтому требование равномерной сходимости или могущее его здесь заменить требование сходимости этих сумм в каждой точке x является существенным.

Соотношения (46) совместно с (17) могут служить для нахождения соответствующих оценок в ряде случаев.

Поступило
5. X. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bernstein S., Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques, Comptes Rendus Ac. Sc. t. 191 (1930), 976—979.

[2] Rogosinski W., Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen, Math. Annalen. 95 (1925), 110—134.

[3] Харшиладзе Ф., О методе суммирования С. Н. Бернштейна, Матем. сб., т. 11 (58) : 1—2 (1942), 121—144.

[4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

A. TIMAN. SUR UNE MÉTHODE D'APPROXIMATION DES FONCTIONS CONTINUES AU MOYEN DES POLYNOMES TRIGONOMÉTRIQUES

RÉSUMÉ

1. Soit $\tilde{C}$ la classe des fonctions continues périodiques de période 2π et

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1}$$

la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier d'une fonction $f \in \tilde{C}$.

Considérons le polynome trigonométrique d'ordre n de la forme

$$\omega_n(k; f, x) = \frac{1}{2}\left\{S_n(f, x) + S_n\left(f, x + \frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right\}, \tag{2}$$

où k est un entier.

Le cas $k = 1$ a été étudié par S. Bernstein ([1]). Il a démontré que $\omega_n(f; 1, x)$ tend uniformément vers $f(x)$ quand $n \to \infty$, quelle que soit $f(x)$ de la classe $\tilde{C}$.

Ensuite Rogosinsky ([2]), ([4]) a démontré que si k est un entier impair donné la convergence uniforme de $\omega_n(k; f, x)$ vers $f(x)$ subsiste pour chaque $f \in \tilde{C}$.

Cela étant, le problème suivant présente un certain intérêt:

$k = k(n)$ étant une fonction à valeurs entières de la variable n $(n = 1, 2, \ldots)$ quelles sont les conditions qu'il faut imposer à $k(n)$ pour que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n (k; f, x) = f(x) \text{ pour toutes les } f \in \tilde{C}? \tag{3}$$

Dans le présent article nous donnons une solution complète de ce problème.

D'ailleurs nous étudions non seulement les sommes de la forme (2) mais encore les sommes

$$\overline{\omega}_n (k; f, x) = \frac{1}{2} \left\{ S_n (f, x) - S_n \left(f, x + \frac{2k\pi}{2n+1} \right) \right\} \tag{4}$$

et nous étudions dans quelles conditions elles convergent vers zéro pour toutes les $f \in \tilde{C}$. D'ailleurs les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence des polynomes (2) et (4) donnent certains renseignements sur l'allure des courbes $y = S_n (f, x)$.

Il est facile à voir que sans restreindre la généralité on peut supposer que $|k| \leqslant n$.

Désignons par E_{n1} (respectivement E_{n2}) l'ensemble de tous les nombres positifs impairs (resp. positifs pairs) qui ne surpassent pas n.

Nous démontrons dans le § 2 le

THÉORÈME I. *Pour que l'égalité* (3) *ait lieu pour toutes les* $f \in \tilde{C}$ *uniformément par rapport à* x *il faut et il suffit que pour toutes les valeurs de* n *qui surpassent un certain* n_0 *les deux conditions suivantes soient vérifiés:*

$$|k| \in E_{n1}, \tag{5}$$

$$k = O(1). \tag{6}$$

Remarquons qu'on déduit du théorème 1 le corollaire.

Corollaire. *Pour que la relation*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ S_n \left(f, x - \frac{k\pi}{2n+1} \right) + S_n \left(f, x + \frac{k\pi}{2n+1} \right) = f(x) \right.$$

pour toutes les $f \in \tilde{C}$ *uniformément par rapport à* x *il est nécessaire et suffisant que pour toutet ses valeurs de* n *qui surpassent un certain* n_0 *les conditions* (5) *et* (6) *soient remplies.*

THÉORÈME II. *Pour que le polynome trigonométrique* $\overline{\omega}_n (k; f, x)$ ($|k| \leqslant n$) *tende uniformément vers zéro quelle que soit la fonction* $f \in \tilde{C}$ *il est nécessaire et suffisant que pour toutes les valeurs de* n *qui surpassent un certain* n_0 *les deux conditions suivantes soient remplies:*

$$|k| \in E_{n2}, \tag{7}$$

$$k = O(1). \tag{8}$$

2. Si dans l'espace $\tilde{C}$ des fonctions continues $f(x)$ on prend pour norme de f la valeur $\sup_x |f(x)|$ et si l'on considère les opérateurs linéaires $\omega_n (k; f, x)$ et $\overline{\omega}_n (k; f, x)$ (pour x fixe ce sont des fonctionnelles linéaires),

alors en tenant compte de l'expression connue pour la somme partielle des n termes d'une série de Fourier

$$S_n(f,\ x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt \tag{9}$$

nous aurons pour les normes de $L_{n,k}$ et $\overline{L}_{n,k}$ des opérateurs (fonctionnelles) les formules

$$\begin{aligned} L_{n,k}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|D_{n,k}(u)\sin(2n+1)u|\,du,\\ \overline{L}_{n,k}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|\overline{D}_{n,k}(u)\sin(2n+1)u|\,du, \end{aligned} \tag{10}$$

où l'on désigne par $D_{n,k}(u)$ et $\overline{D}_{n,k}(u)$ les fonctions

$$\begin{aligned} D_{n,k}(u)&=\frac{1}{\sin u}+(-1)^k\frac{1}{\sin\left(u+\frac{k\pi}{2n+1}\right)},\\ \overline{D}_{n,k}(u)&=\frac{1}{\sin u}-(-1)^k\frac{1}{\sin\left(u+\frac{k\pi}{2n+1}\right)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Les théorèmes I et II ont pour base le lemme suivant qui présente le résultat fondamental du présent article.

LEMME I. *Pour $|k|\leqslant n$ les égalités asymptotiques suivantes ont lieu*

$$\begin{aligned} L_{n,k}&=\begin{cases}\frac{4}{\pi^2}\ln|k|+O(1), & |k|\in E_{n1},\\ \frac{4}{\pi^2}\ln n\ \ +O(1), & |k|\in E_{n2},\end{cases}\\ \overline{L}_{n,k}&=\begin{cases}\frac{4}{\pi^2}\ln|k|+O(1), & |k|\in E_{n2},\\ \frac{4}{\pi^2}\ln n\ \ +O(1), & |k|\in E_{n1},\end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

où $O(1)$ est une quantité qui est uniformément bornée par rapport à n $(n=1,2,3,\ldots)$.

Il résulte de ce lemme et d'un théorème connu sur les suites des opérateurs linéaires dont les normes sont non bornées ([4]) que les théorèmes I et II sont vrais.

3. Dans le § 3 nous considérons pour les fonctions $f(x)\in\widetilde{C}$ le cas des polynomes trigonométriques interpôlatoires dont les nœuds sont à distances égales et nous démontrons des propositions analogues à celles du § 2. Soit

$$S_n^{(n)}(f,\ x)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x+b_\nu^{(n)}\sin\nu x)$$

le n-ième polynome trigonométrique intérpôlatoire de la fonction $f(x)$ ayant les $2n+1$ nœuds aux points $x_\nu^{(n)}=\frac{2\nu\pi}{2n+1}$ $(\nu=0, 1, \ldots, 2n)$, où

$$a_\nu^{(n)}=\frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)})\cos \nu x_i^{(n)},$$

$$b_\nu^{(n)}=\frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)})\sin \nu x_i^{(n)}.$$

Considérons les sommes trigonométriques *

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_n(k; f, x)&=\frac{1}{2}\{S_n^{(n)}(f, x)+S_n^{(n)}(f, x+x_k^{(n)})\},\\ \tilde{\tilde{\omega}}_n(k; f, x)&=\frac{1}{2}\{S_n^{(n)}(f, x)-S_n^{(n)}(f, x+x_k^{(n)})\}.\end{aligned}\tag{13}$$

En s'appuyant sur l'expression connue du polynome trigonométrique interpôlatoire $S_n^{(n)}(f, x)$

$$S_n^{(n)}(f, x)=\frac{1}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n} f(x_\nu^{(n)})\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-x_\nu^{(n)})}{\sin\frac{x-x_\nu^{(n)}}{2}}\tag{14}$$

on peut en vertu de ce que $f(x)$ est périodique présenter les polynomes (13) dans la forme plus commode

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_n(k; f, x)&=\frac{1}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f(x_\nu^{(n)})+f(x_{\nu+k}^{(n)})}{2}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-x_\nu^{(n)})}{\sin\frac{x-x_\nu^{(n)}}{2}},\\ \tilde{\tilde{\omega}}_n(k; f, x)&=\frac{1}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f(x_\nu^{(n)})-f(x_{\nu+k}^{(n)})}{2}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-x_\nu^{(n)})}{\sin\frac{x-x_\nu^{(n)}}{2}}.\end{aligned}\tag{15}$$

D'ailleurs les normes des opérateurs $\tilde{\omega}_n(k; f, x)$ et $\tilde{\tilde{\omega}}_n(k; f, x)$ sont respectivement donnés par les formules

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{n,k}&=\sup_x \tilde{L}_{n,k}(x), \quad \tilde{L}_{n,k}(x)=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{2n}|\tilde{D}_{n,k}(x_\nu^{(n)})|,\\ \tilde{\tilde{L}}_{n,k}&=\sup_x \tilde{\tilde{L}}_{n,k}(x), \quad \tilde{\tilde{L}}_{n,k}(x)=\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{2(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{2n}\tilde{\tilde{D}}_{n,k}(x_\nu^{(n)})|,\end{aligned}\tag{16}$$

---

* Le cas où $k=1$ a été étudié par F. Kharchiladze ([8]).

où

$$\tilde{D}_{n,k}(x_\nu^{(n)}) = \frac{1}{\sin\frac{x - x_\nu^{(n)}}{2}} + (-1)^k \frac{1}{\sin\frac{x - x_{\nu-k}^{(n)}}{2}},$$
$$\tilde{\tilde{D}}_{n,k}(x_\nu^{(n)}) = \frac{1}{\sin\frac{x - x_\nu^{(n)}}{2}} - (-1)^k \frac{1}{\sin\frac{x - x_{\nu-k}^{(n)}}{2}}. \tag{17}$$

Nous démontrons dans le § 3 le lemme suivant

LEMME II. *Pour* $|k| \leqslant n$ *on a les égalités asymptotiques suivantes*

$$\tilde{L}_{n,k}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right| \ln\ k| + O(1) & |k| \in E_{n1}, \\ \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right| \ln n + O(1) & |k| \in E_{n2}, \end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{n,k}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right| \ln |k| + O(1) & |k| \in E_{n2}, \\ \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right| \ln n + O(1) & |k| \in E_{n1}, \end{cases}$$

où $O(1)$ *est une quantité uniformément bornée par rapport à* n, k *et* x.

Il suit de ce lemme et des raisonnements analogues à ceux qui ont permis de démontrer les théorèmes I et II qu'on peut obtenir les deux théorèmes suivants:

THÉOREME III. *Pour que le polynome trigonométrique* $\tilde{\omega}_n(k; f, x)$ *tende uniformément vers* $f(x)$ *quelle que soit* $f(x) \in \tilde{C}$ *il faut et il suffit que les conditions* (5) *et* (6) *soient remplies.*

THÉORÈME IV. *Pour que le polynome trigonométrique* $\tilde{\tilde{\omega}}_u(k; f, x)$ *tende uniformément vers zéro quelle que soit la fonction* $f \in \tilde{C}$ *il faut et il suffit que les conditions* (7) *et* (8) *soient remplies.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 283–308 Série mathématique

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СЕМЕЙСТВ МНОГОМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Строится теория k-параметрических семейств m-мерных плоскостей в n-мерном эвклидовом пространстве, обобщающая обычную теорию прямолинейных конгруэнций ($n=3$, $m=1$, $k=2$). В частности, находятся: инвариантная аффинная связность в пространстве плоскостей (аналог метрики Сегре-Бортолотти в пространстве прямых), формулы распределения локальных параметров в семействе (обобщение формул Гамильтона и Мангейма), аффиноры, определяющие семейство с точностью до движения (обобщение аффинора Куммера), аффинорные характеристики специальных типов семейств (обобщения прямолинейных конгруэнций: изотропной, нормальной, Гишара-Пето, Аппеля-Бианки и др.).

1. Векторное представление пространства плоскостей

Будем рассматривать ориентированные m-плоскости (m-мерные плоскости) R_m в эвклидовом n-пространстве (n-мерном пространстве) R_n. Полное многообразие R_m в R_n мы будем называть *пространством* R_n^m.

Всякая m-плоскость R_n может быть определена $\binom{n+1}{m+1}$ грассмановыми («плюккеровыми») координатами [(1), стр. 309] $p^{i_0 i_1 \dots i_m}$ ($i=0, \dots, n$), для определения которых надо выделить из m-плоскости $m+1$ линейно независимых точек x_a ($a=0, \dots, m$); тогда координата $p^{i_0 i_1 \dots i_m}$ будет равна детерминанту, составленному из i-го, ..., i_m-го столбцов матрицы однородных координат x_a^i этих точек:

$$p=\left\|\begin{matrix} x_0^0 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_m^0 & x_m^1 & \dots & x_m^n \end{matrix}\right\|, \tag{1}$$

что часто записывают в виде альтернированного произведения

$$p^{i_0 i_1 \dots i_m} = x_0^{[i_0} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m]}. \tag{2}$$

Если однородные координаты точек x_a таковы, что $x_a^0=1$, а x_a^i — обычные декартовы координаты, то матрицу (1) можно заменить матрицей

$$p = \begin{Vmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ 0 & x_1^1 - x_0^1 & \dots & x_1^n - x_0^n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & x_m^1 - x_0^1 & \dots & x_m^n - x_0^n \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Точки x_a будем выбирать так, чтобы векторы $\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_0$ образовали ортонормированный базис. Тогда грассмановы координаты $p^{i_0 i_1 \dots i_m}$ будут удовлетворять условию

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} p^{0 i_1 \dots i_m^2} = 1. \tag{4}$$

Антисимметричные величины $p^{i_0 i_1 \dots i_m}$, представляющиеся в виде (2), удовлетворяют, как известно, *условию простоты* [([1]), стр. 314]:

$$p^{[i_0 i_1 \dots i_m} p^{j_0] j_1 \dots j_m} = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим векторы $\mathbf{p}$ вспомогательного $\binom{n+1}{m+1}$-пространства E_N, имеющие координатами антисимметричные величины $p^{i_0 i_1 \dots i_m}$. Векторы $\mathbf{p}$, удовлетворяющие уравнениям (4) и (5), взаимно однозначно изображают плоскости p. Мы будем говорить, что эти векторы образуют *векторное представление пространства* R_n^m. Поверхность в E_N, образуемую концами векторов представления, будем называть *поверхностью* P_n^m.

Грассмановы координаты бесконечно удаленных m-плоскостей (целиком лежащих в гиперплоскости $x^0 = 0$) не могут быть нормированы условием (4), так что эти плоскости не имеют изображения на поверхности P_n^m.

Двум m-плоскостям, отличающимся только ориентацией, соответствуют два вектора $\mathbf{p}$, отличающиеся только знаком.

2. Аффинная связность в пространстве плоскостей

Пространство R_n^m является *однородным* пространством, основной группой которого является *группа G эвклидовых движений R_n*. Стационарная подгруппа этого однородного пространства, переводящая в себя m-плоскость, порожденную первыми m базисными векторами, есть подгруппа H движений с матрицами (в однородных координатах при $x^0 = 2$, x^i равных декартовым), элементы a_j^i которых равны нулю при $i > m$, $j \leqslant m$ и $i \leqslant m$, $j > m$.

Группа G допускает инволютивный автоморфизм I, переводящий в себя элементы подгруппы H и только их. Этот автоморфизм представляет собой такой переход от матрицы a к матрице a^I, что

$$(a^I)_j^i = a_j^i \quad \text{при} \quad i, j \leqslant m \quad \text{и} \quad i, j > m$$

и

$$(a^I)_j^i = -a_j^i \quad \text{при} \quad i > m, \ j \leqslant m \quad \text{и} \quad i \leqslant m, \ j > m.$$

Существование такого автоморфизма, как показал Картан (²), обеспечивает то, что в *пространство R_n^m можно ввести аффинную связность симметрического пространства, инвариантную относительно его основной группы.*

Для того чтобы ввести эту связность, введем сначала аффинную связность Картана в групповое пространство самой группы G. Для введения в пространство аффинной связности (без кручения) достаточно, как известно, надлежащим образом задать геодезические линии и аффинный параметр на этих линиях (позволяющий сравнивать отрезки на одной геодезической). В качестве геодезических линий мы возьмем однопараметрические подгруппы G и их классы смежности, а в качестве аффинного параметра — их канонический параметр t $(a(t_1)\,a(t_2) = a(t_1 + t_2))$. Эта аффинная связность в группе является связностью симметрического пространства.

Для введения искомой аффинной связности в пространство R_n^m вспомним, что всякое симметрическое пространство аффинной связности может быть реализовано на вполне геодезической поверхности в групповом пространстве его основной группы с аффинной связностью Картана, причем эта поверхность состоит из элементов, антиинвариантных при том инволютивном автоморфизме, который определяет стационарную подгруппу пространства (т. е. $a^J = a^{-1}$).

Таким образом, роль геодезических линий в пространстве R_n^m играют те последовательности плоскостей, которые соответствуют однопараметрическим подгруппам и их классам смежности при указанном отображении R_n^m на вполне геодезическую поверхность в группе G.

Матрицы однопараметрической подгруппы группы G в однородных координатах в R_n могут быть одновременно приведены к каноническому виду, в котором по главной диагонали стоят 2-рядные подматрицы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ pt & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \cos k_1 t & \sin k_1 t \\ -\sin k_1 t & \cos k_1 t \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{Vmatrix} \cos k_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} t & \sin k_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} t \\ -\sin k_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} t & \cos k_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} t \end{Vmatrix} \tag{6}$$

и в случае нечетности числа строк в конце главной диагонали стоит 1, а все остальные элементы матрицы равны 0. Здесь t — канонический параметр.

Движения подгруппы переводят в себя прямую — *ось* подгруппы, которая, если считать t за время, скользит с поступательной скоростью p, а систему $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 2-плоскостей, вполне ортогональных между собой и ортогональных оси, переносит параллельно самим себе в направлении оси со скоростью p и в то же время вращает их вокруг оси, причем i-я 2-плоскость вращается с угловой скоростью k_i.

Эти 2-плоскости будем называть *направляющими 2-плоскостями подгруппы.*

Чтобы получить одну из геодезических последовательностей плоскостей R_n^m, надо рассмотреть все те плоскости, которые получаются из плоскости, порожденной первыми m базисными векторами, движениями однопараметрической подгруппы, антиинвариантной относительно автоморфизма J.

Выберем базисные векторы так, чтобы пары векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_{m+1}$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_{m+2}$, ..., $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{e}_{2m}$ соответственно лежали в направляющих 2-плоскостях этой подгруппы, а вектор $\mathbf{e}_{2m+1}$ был направлен по ее оси. Когда движение подгруппы переводит векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ нашей плоскости в векторы

$$\mathbf{x}_a(t) = \mathbf{e}_a \cos k_a t + \mathbf{e}_{m+a} \sin k_a t + \mathbf{e}_{2m+1} pt,$$

то матрицы (3) для плоскостей полученной последовательности имеют вид

$$p(t) = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & pt & 0\ldots 0 \\ 0 & \cos k_1 t & 0 & \ldots & 0 & \sin k_1 t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & \cos k_2 t & \ldots & 0 & 0 & \sin k_2 t & \ldots & 0 & 0 & 0\ldots 0 \\ . & . & . & & . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & & . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & & . & . & . & & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \cos k_m t & 0 & 0 & \ldots & \sin k_m t & 0 & 0\ldots 0 \end{matrix}\right\|. \quad (7)$$

Последовательности m-плоскостей такого типа мы будем называть *m-геликоидами* (при $n=3$, $m=1$ мы получаем обычный *линейчатый геликоид*).

Прямую вектора $\mathbf{e}_{2m+1}$ мы будем называть *осью* m-геликоида, 2-плоскости векторов $\mathbf{e}_a$ и $\mathbf{e}_{m+a}$ — *направляющими 2-плоскостями* m-геликоида. Если параметр t выбран так, что $k_1^2 + \ldots + k_m^2 = 1$, то число p будем называть *параметром распределения* m-геликоида (и просто *параметром*, когда это не приводит к недоразумениям), число $2\pi p$ — *шагом* m-геликоида, числа k_a, нормированные указанным образом, — *направляющими косинусами* m-геликоида.

Искомую аффинную связность в пространстве плоскостей мы получим, если примем за геодезические линии m-геликоиды, а за аффинный параметр на них — параметр t.

Через две достаточно близкие m-плоскости можно провести единственный m-геликоид; его осью будет их общий перпендикуляр, направляющими 2-плоскостями — 2-плоскости, в которых реализуются стационарные углы ω_a m-плоскостей, направляющими косинусами — числа

$$k_a = \frac{\omega_a}{\sqrt{\omega_1^2 + \ldots + \omega_m^2}},$$

параметром распределения — число

$$p = \frac{a}{\sqrt{\omega_1^2 + \ldots + \omega_m^2}},$$

где a — кратчайшее расстояние m-плоскостей.

Если все числа p, k_a отличны от нуля, то m-геликоид расположен

в $(2m+1)$-плоскости; если l из них равны нулю, то m-геликоид расположен в $(2m+1-l)$-плоскости. Если из этих чисел отлично от нуля только одно, то m-геликоид вырождается в *m-пучок*, расположенный в $(m+1)$-плоскости. Плоскости m-пучка могут пересекаться по $(m-1)$-плоскости или быть параллельными.

То, что построенное пространство аффинной связности является симметрическим, легко обнаружить, если заметить, что симметрия относительно элемента многообразия плоскостей в нашей аффинной связности совпадает с обычной симметрией относительно m-плоскости в эвклидовом n-пространстве.

Введенная нами аффинная связность в R_n^m при $n=3$, $m=1$ может быть порождена псевдоримановой метрикой в R_3^1, если за расстояние между двумя бесконечно близкими прямыми принять их «интервал» — квадратный корень из их момента. Такая метрика была введена Сегре ([3]) и подробно изучалась Бортолотти ([4]). Последний нашел, что геодезическими линиями в R_3^1 с этой метрикой служат линейчатые геликоиды [([4]), стр. 309]. Однако эта метрика не обобщается на случай $n>3$ и $m>1$, так что нашу аффинную связность можно рассматривать как многомерный аналог метрики Сегре-Бортолотти.

Наша аффинная связность в R_n^m совпадает с аффинной связностью А. П. Нордена для R_2^1 ([5]) и R_n^{n-1} ([6]) (геодезические линии — пучки прямых или гиперплоскостей).

В подпространстве $\underset{0}{R_n^m}$ пространства R_n^m, состоящем из всех m-плоскостей, проходящих через одну точку, и являющемся вполне геодезическим подпространством R_n^m, аффинная связность, индуцированная нашей, может быть порождена римановой метрикой (так как основная группа $\underset{0}{R_n^m}$ — группа эвклидовых вращений — есть компактная полупростая группа Ли). Эта метрика для пространства $\underset{0}{R_4^2}$ (эквивалентного пространству прямых эллиптического 3-пространства) рассматривалась Штуди ([7]), нашедшим здесь геодезические линии, а для общего случая $\underset{0}{R_n^m}$ рассматривалась в нашей работе 1941 г. ([8]), где были найдены геодезические линии $\underset{0}{R_n^m}$, и в работе В. В. Вагнера 1942 г. [([9]), стр. 168].

3. Локальные векторы в пространстве плоскостей

В каждой точке p $(m+1)(n-m)$-поверхности P_n^m, находящейся в векторном пространстве E_N, определена касательная $(m+1)(n-m)$-плоскость, которую можно рассматривать как *локальное векторное пространство* пространства аффинной связности R_n^m. Поэтому векторы $\mathbf{l}$ этой касательной плоскости, выходящие из точки касания, мы будем называть *локальными векторами пространства* R_n^m.

Локальный вектор является, таким образом, характеристикой линей-

ного элемента пространства плоскостей или, другими словами, характеристикой пары бесконечно близких m-плоскостей.

Найдем зависимость направления локального вектора от непосредственно характеризующих пару бесконечно близких m-плоскостей локальных инвариантов—как числовых, так и геометрических, и, обратно,—зависимость этих инвариантов от направления локальных векторов.

Такая задача для элементарного частного случая решалась нами в ([10]).

Подобно тому, как линейный элемент в теории кривых и поверхностей характеризуется касательной, так мы будем характеризовать линейный элемент в многообразии плоскостей, выходящий из данной плоскости, *касательным m-геликоидом*, т. е. предельным положением m-геликоида, проходящего через две близкие плоскости при стремлении второй из них к данной в заданном направлении в многообразии плоскостей.

В общем случае при $m \leqslant n-m$ m-геликоид, проходящий через данную m-плоскость, которую мы опять будем считать порожденной первыми m базисными векторами, определяет на ней следующие числовые и геометрические параметры (условимся, что индексы $a, b, \ldots$ и индексы суммирования $\alpha, \beta, \ldots$ пробегают значения от 1 до m, а индексы $u, v, \ldots$ и индексы суммирования $\varphi, \chi, \ldots$ пробегают значения от 1 до $n-m$, причем суммирование по греческим индексам производится вне зависимости от их количества и положения):

1) *параметр распределения* p и *направляющие косинусы* k_a $(k_1^2 + \ldots + k_m^2 = 1)$;

2) *ось*, т. е. точку ее пересечения с плоскостью — *центр* плоскости, в данном направлении, определяющийся радиусом-вектором $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, и направление оси, определяющееся единичным вектором $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\varphi \mathbf{e}_{m+\varphi}$;

3) *направляющие 2-плоскости*, определяющиеся векторами $\mathbf{a}_a = a_a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ в данной плоскости и векторами $\mathbf{b}_a = b_a^\varphi \mathbf{e}_{m+\varphi}$, ортогональными данной плоскости, так что a-я 2-плоскость определяется векторами $\mathbf{a}_a$ и $\mathbf{b}_a$.

Системы векторов $\mathbf{a}_a$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_a$ ортогональны, так что матрица a_a^b есть ортогональная m-матрица, а компоненты векторов $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_a$ составляют $m+1$ строк ортогональной $(n-m)$-матрицы.

Таким образом, m-геликоид, проходящий через m-плоскость, определяется одним числом p, $m-1$ независимыми числами k_a, m числами a^b, $\frac{m(m-1)}{2}$ независимыми числами a_a^b и $\frac{(m+1)(2n-3m-2)}{2}$ независимыми числами b^u, b_a^u, так что полное количество чисел, определяющих такой m-геликоид, равно

$$1 + (m-1) + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(m+1)(2n-3m-2)}{2} = (m+1)(n-m) - 1. \quad (8)$$

В общем случае матрица (3), определяющая текущую плоскость m-геликоида, имеет вид

$$p(t)=\left\|\begin{matrix} 1 & a^1 & \ldots & a^m & b^1pt & \ldots & b^{m-n}pt \\ 0 & a_1^1\cos k_1t & \ldots & a_1^m\cos k_1t & b_1^1\sin k_1t & \ldots & b_1^{n-m}\sin k_1t \\ 0 & a_2^1\cos k_2t & \ldots & a_2^m\cos k_2t & b_2^1\sin k_2t & \ldots & b_2^{n-m}\sin k_2t \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & a_m^1\cos k_mt & \ldots & a_m^m\cos k_mt & b_m^1\sin k_mt & \ldots & b_m^{n-m}\sin k_mt \end{matrix}\right\|. \qquad (9)$$

При $a_a^b=\delta_a^b$, $b_a^u=\delta_a^u$, $a^b=0$, $b^u=\delta_{m+1}^u pt$ матрица (9) обращается в матрицу (7).

Находя детерминанты $p^{i_0 i_1\ldots i_m}(t)$ матрицы (9), дифференцируя их по t и полагая $t=0$, мы получаем производные

$$l^{m+u\ 12\ldots m}=p\begin{vmatrix} b^u & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1^1 & \ldots & a_m^1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & a_m^1 & \ldots & a_m^m \end{vmatrix}+k_a\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & b_a^u & 0 & \ldots & 0 \\ a^1 & a_1^1 & \ldots & a_{a-1}^1 & 0 & a_{a+1}^1 & \ldots & a_m^1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a^m & a_1^m & \ldots & a_{a-1}^m & 0 & a_{a+1}^m & \ldots & a_m^m \end{vmatrix}=$$

$$=pb^u-k_a a^\beta a_\alpha^\beta b_\alpha^u, \qquad (10)$$

$$l^{01\ldots a-1\ m+u\ c+1\ldots m}=p\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b^u & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}+$$

$$+k_a\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a^1 & a_1^1 & \ldots & a_{\alpha-1}^1 & 0 & a_{\alpha+1}^1 & \ldots & a_m^1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a^{c-1} & a_1^{c-1} & \ldots & a_{\alpha-1}^{a-1} & 0 & a_{\alpha+1}^{c-1} & \ldots & a_m^{a-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_\alpha^u & 0 & \ldots & 0 \\ a^{a+1} & a_1^{a+1} & \ldots & a_{\alpha-1}^{k+1} & 0 & a_{\alpha+1}^{a+1} & \ldots & a_m^{c+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a^m & a_1^m & \ldots & a_{a-1}^m & 0 & a_{a+1}^m & \ldots & a_m^m \end{vmatrix}=k_a a_\alpha^c b_\alpha^u. \qquad (11)$$

В силу ортогональности матрицы a_a^b, минор ее элемента a_a^b равен $\pm a_b^a$. Производные с другими системами индексов равны нулю. Числа $l^{m+u\,1\ldots m}$ и $l^{01\ldots a-1\ m+u\ c+1\ldots m}$ и являются компонентами $(m+1)(n-m)$-мерного локального вектора **l**, соответствующего нашему m-геликоиду. Эти числа связаны условием:

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\varphi=1}^{n-m} l^{01\ldots\alpha-1\, m+\varphi\, \alpha+1\ldots m^2} = 1, \qquad (12)$$

поэтому количество независимых среди этих чисел равно (8).

Локальный вектор $\mathbf{l}$ имеет окончательное выражение

$$\mathbf{l} = (pb^{\varphi} - k_{\alpha}a^{\beta}a_{\alpha}^{\beta}b_{\alpha}^{\varphi})\, \mathbf{e}_{m+\varphi\, 1\ldots m} + k_{\alpha}a_{\alpha}^{\beta}b_{\alpha}^{\varphi}\, \mathbf{e}_{01\ldots\beta-1\, m+\varphi\, \beta+1\ldots m}\,. \qquad (13)$$

Компоненты локального вектора удобно также записывать в виде матрицы

$$L = \left\| \begin{matrix} pb^1 - k_{\alpha}a^{\beta}a_{\alpha}^{\beta}b_{\alpha}^1 & \ldots & pb^{n-m} - k_{\alpha}a^{\beta}a_{\alpha}^{\beta}b_{\alpha}^{n-m} \\ k_{\alpha}a_{\alpha}^1 b_{\alpha}^1 & \ldots & k_{\alpha}a_{\alpha}^1 b_{\alpha}^{n-m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ k_{\alpha}a_{\alpha}^m b_{\alpha}^1 & \ldots & k_{\alpha}a_{\alpha}^m b_{\alpha}^{n-m} \end{matrix} \right\|. \qquad (14)$$

В случае $m > n - m - 1$ m-плоскости всегда пересекаются, т. е. $p = 0$ и локальный вектор имеет аналогичное, несколько более простое, строение.

В случае *прямых* ($m = 1$) роль вектора $\mathbf{a}$ играет число a — *абсцисса центра луча*; вместо единственных компонент k_{α} и a_{α}^{b} здесь 1, вместо матрицы b_{α}^{u} — последовательность чисел b_1^{u} $(u = 1, \ldots, n-1)$, причем

$$b^{\varphi}b^{\varphi} = b_1^{\varphi}b_1^{\varphi} = 1, \quad b^{\varphi}b_1^{\varphi} = 0.$$

Матрицы (9) и (14) принимают, соответственно, вид

$$p(t) = \left\| \begin{matrix} 1 & a & b^1 pt & b^2 pt & \ldots & b^{n-1} pt \\ 0 & \cos t & b_1^1 \sin t & b_1^2 \sin t & \ldots & b_1^{n-1} \sin t \end{matrix} \right\|, \qquad (15)$$

$$L = \left\| \begin{matrix} pb^1 - ab_1^1 & pb^2 - ab_1^2 & \ldots & pb^{n-1} - ab_1^{n-1} \\ b_1^1 & b_1^2 & \ldots & b_1^{n-1} \end{matrix} \right\|. \qquad (16)$$

Компоненты локального вектора $\mathbf{l}$ допускают чрезвычайно наглядное представление в основном эвклидовом пространстве R_n.

Если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор *полюса* нашей плоскости, то *центр* этой плоскости в данном направлении имеет радиус-вектор

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + a^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}; \qquad (17)$$

производная радиуса-вектора центра имеет вид

$$\mathbf{r}_0' = p\mathbf{b} \qquad (18)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r}' = p\mathbf{b} - a^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}' - (a^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha})'\, \mathbf{e}_{\alpha}. \qquad (19)$$

Но

$$\mathbf{a}_{\alpha}' = k_{\alpha}\mathbf{b}_{\alpha}, \qquad (20)$$

откуда ($\mathbf{e}_{\alpha} = a_{\alpha}^{a}\mathbf{a}_{\alpha}$)

$$\mathbf{e}_{\alpha}' = k_{\alpha}a_{\alpha}^{\beta}\mathbf{b}_{\alpha} + (a_{\alpha}^{a})'\, \mathbf{a}_{\alpha} \qquad (21)$$

и

$$\mathbf{r}' = p\mathbf{b} - k_{\alpha}a^{\beta}a_{\alpha}^{\beta}\mathbf{b}_{\alpha} - (a^{\alpha})'\, \mathbf{e}_{\alpha} - a^{\beta}(a_{\alpha}^{\beta})'\, \mathbf{a}_{\alpha}. \qquad (22)$$

Обозначая проекции векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{e}'_a$ на $(n-m)$-плоскость, ортогональную нашей m-плоскости, соответственно, через

$$\mathbf{l}_0 = p\mathfrak{b} - k_\alpha a^\beta a^\beta_\alpha \mathfrak{b}_\alpha, \tag{23}$$

$$\mathbf{l}_a = k_\alpha a^\alpha_a \mathfrak{b}_\alpha, \tag{24}$$

мы видим, что компоненты вектора $\mathbf{l}_0$ составляют первую строку матрицы (14), а компоненты вектора $\mathbf{l}_a$ составляют $(a+1)$-ю строку этой матрицы.

Таким образом, *всякому локальному вектору* $\mathbf{l}$ *можно взаимно однозначно отнести* $m+1$ *векторов* $\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m$ *в* $(n-m)$*-плоскости эвклидова пространства* R_n. Эту плоскость мы будем называть R_{n-m}.

Совпадение числа независимых компонент локального вектора с числом (8) показывает, что при данном локальном векторе мы имеем достаточное число уравнений для определения чисел p, k_a, a^b, b^u, a^b_a, b^u_a локальных параметров соответственной пары бесконечно близких m-плоскостей.

Представление локального вектора системой векторов в R_{n-m} позволяет это сделать особенно просто.

Формулу (24) можно переписать в виде

$$a^\alpha_a \mathbf{l}_\alpha = k_a \mathfrak{b}_a. \tag{25}$$

Векторы $k_a\mathfrak{b}_a$ составляют ортогональную систему, следовательно, для определения элементов матрицы a^b_a мы имеем m^2 условий: $\frac{m(m-1)}{2}$ условий ортогональности векторов $k_a\mathfrak{b}_a$

$$a^\alpha_a a^\beta_b \mathbf{l}_\alpha \mathbf{l}_\beta = 0 \quad (a \neq b) \tag{26}$$

и $\frac{m(m+1)}{2}$ условий ортогональности матрицы a^b_a

$$a^\alpha_a a^\alpha_b = \delta_{ab}. \tag{27}$$

Если a^b_a и $\tilde{a}^b_a$ — два различных решения системы (26) — (27) квадратных уравнений, то векторы $a^\alpha_a \mathbf{l}_\alpha$ и $\tilde{a}^\alpha_a \mathbf{l}_\alpha$ — одни и те же векторы $k_a\mathfrak{b}_a$, отличающиеся только нумерацией (локальный вектор определяет единственный m-геликоид).

Определив a^b_a, мы находим k_a и $\mathfrak{b}_a$ по формуле (25) (k_a — длина, а $\mathfrak{b}_a$ — единичный направляющий вектор для вектора $a^\alpha_a \mathbf{l}_\alpha$).

Составляя скалярные произведения $\mathbf{l}_0\mathbf{l}_a$, мы находим (так как $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_a = 0$, $\mathfrak{b}_a\mathfrak{b}_b = \delta_{ab}$)

$$\mathbf{l}_0\mathbf{l}_a = -k^2_\alpha a^\beta a^\beta_\alpha a^\alpha_a. \tag{28}$$

Из этой системы уравнений однозначно определяются координаты центра a^b. Далее, из (23) находим вектор $p\mathfrak{b}$, т. е. число p и единичный вектор $\mathfrak{b}$.

В случае $m=1$ (*многообразие прямых*) формулы (23), (24) принимают вид

$$\mathbf{l}_0 = p\mathfrak{b} - a\mathfrak{b}_1, \quad \mathbf{l}_1 = \mathfrak{b}_1,$$

и для определения абсциссы луча и параметра распределения мы получаем формулы

$$a = -\mathbf{l}_0\mathbf{l}_1, \tag{29}$$

$$p = \mathbf{l}_0 \times \mathbf{l}_1. \tag{30}$$

4. Локальная структура семейств плоскостей

Перейдем к рассмотрению *k-семейств* (k-параметрических семейств) R_m в R_n. Следуя В. В. Вагнеру [(9), стр. 187], будем называть $(n-m)$-семейства m-плоскостей в n-пространстве *конгруэнциями* (через каждую точку определенной области пространства проходит единственная плоскость семейства). При $k > n-m$ будем называть k-семейства *комплексами* (для прямых R_3 при $k=2$ получаем обычные прямолинейные конгруэнции, при $k=3$ — прямолинейные комплексы).

На поверхности P_n^m k-семейства m-плоскостей R_n представляются *k-поверхностями*. При условии существования соответственных производных (что мы всегда предполагаем) эти k-поверхности имеют в своих точках касательные k-плоскости, являющиеся подплоскостями $(m+1)(n-m)$-плоскостей локальных векторов.

Поэтому для получения закона распределения локальных параметров в k-семействе, определяющего его локальную структуру, достаточно в законах распределения этих параметров в полном пространстве R_n^m, найденных в n° 3, связать локальный вектор условием принадлежности к k-плоскости, касательной к изображению k-семейства, т. е. представить вектор $\mathbf{l}$ в виде

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_\pi \lambda^\pi, \tag{31}$$

где $\mathbf{l}_p = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^p}$, $\lambda^p = \frac{du^p}{dt}$ (индексы $p, q, \ldots$ и индексы суммирования $\pi, \rho, \ldots$ пробегают значения от 1 до k).

В плоскости R_{n-m} элемент k-семейства изображается системой $m+1$ k-плоскостей, пробегаемых векторами $\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m$:

$$\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}_{0\pi}\lambda^\pi, \quad \mathbf{l}_a = \mathbf{l}_{a\pi}\lambda^\pi. \tag{32}$$

В случае $k < n-m$ векторы $\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m$ заполняют по k-плоскости в R_{n-m}; в случае конгруэнции каждый из этих векторов заполняет R_{n-m} целиком, вообще говоря, однократно; в случае комплекса каждый из этих векторов заполняет R_{n-m} целиком, вообще говоря, многократно.

Подставляя (32) в формулы для определения локальных параметров, мы получаем зависимость чисел p, k_a, a^b, b^u, a_a^b, b_a^u от координат λ^p, характеризующих направление в k-семействе.

В частности, подставляя (32) в (29), мы получаем, что абсцисса центра луча в любом *прямолинейном* k-семействе в n-пространстве выражается квадратичной формой от λ^p. Приведя эту форму к каноническому виду, получим

$$a = a_\pi \lambda^{\pi^2}, \tag{33}$$

где a_p — стационарные значения абсциссы центра — *абсциссы граничных точек луча*. В случае конгруэнции прямых 3-пространства эта формула совпадает с известной *формулой Гамильтона* [([11]), стр. 304].

Параметр распределения, соответствующий данному направлению, равен высоте параллелотопа, построенного на векторах $\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m$, если за основание параллелотопа считать грань, построенную на векторах $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m$ [непосредственное следствие формул (23), (24)].

Если обозначить квадрат объема параллелотопа, построенного на векторах $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, через $[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]^2$ (этот квадрат объема равен сумме квадратов максимальных детерминантов матрицы, составленной из координат этих векторов), то можно написать выражение для параметра распределения в следующем виде:

$$p^2 = \frac{[\mathbf{l}_0 \mathbf{l}_1 \ldots \mathbf{l}_m]^2}{[\mathbf{l}_1 \ldots \mathbf{l}_m]^2}. \tag{34}$$

Если воспользоваться формулой (31), то в числителе (34) мы получим форму $(2m+2)$-й степени от λ^p, а в знаменателе — форму $2m$-й степени от λ^p. Числитель формулы (34), умноженный на dt^{2m+2}, равен *моменту* пары бесконечно близких m-плоскостей (многомерное обобщение момента пары бесконечно близких прямых).

Для многообразия *прямых* в n-пространстве формула (34) может быть переписана в виде

$$p^2 = [\mathbf{l}_0 \mathbf{l}_1]^2 \tag{35}$$

или

$$p^2 = \mathbf{l}_0^2 - (\mathbf{l}_0 \mathbf{l}_1)^2, \tag{36}$$

что равносильно (30).

При $n = 3$ из правой части (35) извлекается квадратный корень, так что параметр распределения в любом прямолинейном k-семействе в 3-пространстве выражается квадратичной формой от λ^p. Приведя эту форму к каноническому виду, получим

$$p = p_\pi \lambda^{\pi 2}, \tag{37}$$

где p_q — стационарные значения параметра распределения ($k = 2, 3, 4$). Для *конгруэнций* прямых 3-пространства эта формула совпадает с известной *формулой Мангейма* [([11]), стр. 304].

5. Локальные аффиноры конгруэнций плоскостей

Для *конгруэнций* R_m в R_n можно построить *локальные аффиноры*, определяющие конгруэнцию с точностью до движения и характеризующие локальную структуру конгруэнции. Такие аффиноры были построены В. В. Вагнером [([9]), стр. 167 и 182]. Исходя из нашей общей теории, можно построить локальные аффиноры, являющиеся частными случаями аффиноров В. В. Вагнера, но в некоторых отношениях более удобные.

Для построения этих аффиноров заметим, что каждый из локальных векторов $\mathbf{l}_a$ конгруэнции пробегает всю плоскость R_{n-m}, запол-

няя ее, вообще говоря, однократно. Если векторы $\mathbf{l}_a$ и $\mathbf{l}_b$ соответствуют одной и той же системе параметров λ^p, то по (32)

$$\mathbf{l}_a = \mathbf{l}_{a\pi}\lambda^{\pi}, \quad \mathbf{l}_b = \mathbf{l}_{b\pi}\lambda^{\pi},$$

откуда, исключая λ^p, получаем

$$\mathbf{l}_{bq} = c_{bq}^{a\pi}\mathbf{l}_{a\pi}, \tag{38}$$

где c_{bq}^{ap} — система $(n-m)^2$ чисел, коэффициентов разложения вектора $\mathbf{l}_{bq}$ по $n-m$ векторам $\mathbf{l}_{ap}$, образующим базис в R_{n-m}. В то же время их можно рассматривать как компоненты *аффинора* c_b^a, переводящего $\mathbf{l}_a$ в $\mathbf{l}_b$:

$$\mathbf{l}_b = c_b^a \mathbf{l}_a. \tag{39}$$

Определим также *тензоры*

$$c_{apq}^a = \mathbf{l}_{ap}\mathbf{l}_{aq}, \tag{40}$$

с помощью которых будем опускать и поднимать индексы и производить ковариантное дифференцирование. Определив компоненты c_a^{apq} как компоненты обратного тензора $(c_a^{ap\pi}c_{a\pi\sigma}^a = \delta_a^p)$, мы определим

$$\mathbf{l}_a^p = c_a^{ap\pi}\,\mathbf{l}_{a\pi}, \quad c_{bpq}^a = c_{a\pi p}^a c_{bq}^{a\pi}, \tag{41}$$

откуда

$$c_{bpq}^a = c_{bq}^{a\pi}\,\mathbf{l}_{a\pi}\mathbf{l}_{ap} = \mathbf{l}_{ap}\mathbf{l}_{bq}. \tag{42}$$

В случае прямых R_3 векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ сводятся к одному вектору $\mathbf{e}$ и в силу (22) — (24)

$$\mathbf{l}_{1p} = \mathbf{e}_p, \quad \mathbf{l}_{0p} = \mathbf{r}_p - a_{(p)}\mathbf{e}.$$

Поэтому аффиноры c_b^a могут быть сведены здесь к аффинору c_0^1 и тензору c_1^1:

$$c_{1pq}^1 = \mathbf{e}_p\mathbf{e}_q, \quad c_{0pq}^1 = \mathbf{e}_p\mathbf{r}_q, \tag{43}$$

совпадающих, соответственно, с *аффинором Куммера* [([12]), стр. 237] и метрическим тензором сферического изображения [([12]), стр. 226] прямолинейной конгруэнции в R_3.

Таким образом, аффиноры c_b^a можно рассматривать как многомерное обобщение аффиноров прямолинейной конгруэнции в R_3.

С другой стороны, наши аффиноры c_{bpq}^a при $a, b > 0$ являются частными случаями аффиноров $L_{a\sigma p}$ В. В. Вагнера [([9]), стр. 167], а аффиноры c_{bpq}^a при $a > 0$ являются частными случаями аффиноров $p_a^{\cdot a}$ В. В. Вагнера [([9]), стр. 182]: у В. В. Вагнера базис в m-плоскости и ортогональной ей $(n-m)$-плоскости произвольный, а у нас, в силу теории m-геликоидов, базис в m-плоскости — ортогональный, а в ортогональной $(n-m)$-плоскости за базис приняты векторы $\mathbf{l}_{ap}$.

Все аффиноры c_{bpq}^a могут быть выражены через аффиноры с фиксированным a, например через c_{bpq}^1, так как для c_{apq}^a мы имеем соотношение

$$c_{apq}^a = \mathbf{l}_{ap}\mathbf{l}_{aq} = c_{ap}^{1\pi}\, c_{aq}^{1\rho}\, \mathbf{l}_{1\pi}\, \mathbf{l}_{1\rho} = c_{ap}^{1\pi}\, c_{aq}^{1\rho}\, c_{1\pi\rho}^1, \tag{44}$$

а для c_{bpq}^a при $a \neq b$ имеем

$$c_b^1 = c_b^a c_a^1. \tag{45}$$

Векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{e}_a$, определяющие локальные базисы на m-плоскостях конгруэнции, являются радиусами-векторами $(m+1)(n-m)$-поверхностей, связанных с конгруэнцией, т. е. поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, \ldots, u^{n-m}), \tag{46}$$

называемой *направляющей поверхностью* («поверхностью референции») конгруэнции, и m поверхностей

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{e}_a(u^1, u^2, \ldots, u^{n-m}), \tag{47}$$

расположенных на гиперсфере единичного радиуса и называемых *сферическими направляющими поверхностями* конгруэнции (поверхности (46) и (47) вместе составляют *направляющие поверхности* конгруэнции).

Если мы перейдем к новой системе сферических направляющих поверхностей с помощью ортогональной m-матрицы

$$'\mathbf{e}_a = P_a^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \tag{48}$$

то, дифференцируя, находим

$$'\mathbf{e}_{ap} = P_a^\alpha \mathbf{e}_{\alpha p} + P_{ap}^\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{49}$$

и, проектируя эти векторы на R_{n-m}, получим

$$'\mathbf{l}_{ap} = P_a^\alpha \mathbf{l}_{\alpha p}, \tag{50}$$

откуда (применяя (42)) находим выражение новых аффиноров $'c_{bpq}^a$ через старые:

$$'c_{bpq}^a = P_a^\alpha P_b^\beta c_{\beta pq}^\alpha. \tag{51}$$

Если мы перейдем к новой направляющей поверхности с уравнением

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \rho^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \tag{52}$$

то, дифференцируя, находим

$$'\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p + \rho^\alpha \mathbf{e}_{\alpha p} + \rho_p^\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{53}$$

и, проектируя эти векторы на R_{n-m}, получим

$$'\mathbf{l}_{0p} = \mathbf{l}_{0p} + \rho^\alpha \mathbf{l}_{\alpha p}, \tag{54}$$

откуда (снова применяя (42)) находим выражение новых аффиноров $'c_{0pq}^a$ через старые:

$$'c_{0pq}^a = c_{0pq}^a + p^\alpha c_{\alpha pq}^a. \tag{55}$$

Среди различных поверхностей (46), (47) можно выбрать поверхности, инвариантно связанные с конгруэнцией. Для этого нужно нормировать аффиноры $c_b^a\,(a \neq b)$ линейным соотношением, например

$$c_{b\pi}^{a\pi} = 0 \quad (a > b). \tag{56}$$

Для аффиноров c_0^a, у которых индексы 0 и a неравноправны, это нормирование определяет единственную выделенную направляющую поверхность (соответствующие ей компоненты p^a определятся из системы линейных уравнений, получающихся при применении (56) и (55)). Эта направляющая поверхность, определимая, конечно, только

в *общем случае*, когда система уравнений имеет решение, была найдена В. В. Вагнером несколько более сложным способом и названа *средней поверхностью конгруэнции* [(9), стр. 185]. В R_3 соответствующей поверхностью является обычная средняя поверхность прямолинейной конгруэнции.

Для аффиноров c^a_b $(a, b > 0)$, у которых индексы a и b равноправны, это нормирование определяет конечное число выделенных сферических направляющих поверхностей в зависимости от способа нумерации векторов $\mathbf{e}_a$ (соответственные компоненты P^b_a определятся из системы квадратных уравнений, получающихся при применении (56) и (51), к которым добавляются условия ортогональности матрицы P^b_a). Эти поверхности, определимые также только в общем случае, мы назовем *средними сферическими направляющими поверхностями* конгруэнции.

Введем вместе с В. В. Вагнером векторы (тензоры 1-й валентности)

$$h^a_{bp} = -h^b_{ap} = \mathbf{e}_{ap}\mathbf{e}_b, \tag{57}$$

$$h^0_{ap} = -h^a_{0p} = \mathbf{r}_p\mathbf{e}_a \tag{58}$$

(в обозначениях В. В. Вагнера, соответственно Γ^p_{aq} и $p^{\cdot p}_a$ [(9), стр. 173 и 182].

Тогда установленная В. В. Вагнером основная теорема теории конгруэнций m-плоскостей в R_n может быть сформулирована следующим образом [(9), стр. 183]:

Аффиноры c^1_{apq} $(a = 0, \ldots, m)$, *из которых* c^1_{1pq} — *положительно определенный тензор, и векторы* $h^a_{bp} = -h^b_{ap}$ $(a, b = 0, \ldots, m)$ *определяют конгруэнцию m-плоскостей в* R_n *вместе с системой ее направляющих поверхностей с точностью до движения.*

Пользуясь нашими аффинорами, мы можем усилить результаты В. В. Вагнера: во-первых, наши аффиноры допускают нормирование и мы можем освободиться от произвола направляющих поверхностей, во-вторых, применяя ковариантное дифференцирование с помощью тензора c^1_{1pq}, мы можем во многих случаях освободиться от необходимости задания векторов h^a_{bp}. Таким образом, наша теория позволяет сформулировать основную теорему теории конгруэнций R_m в R_n в следующем виде:

Нормированные аффиноры c^1_{apq} $(a = 0, \ldots, m)$, *из которых* c^1_{1pq} — *положительно определенный тензор, и векторы* $h^a_{bp} = -h^b_{ap}$ $(a, b = 0, \ldots, m)$ *определяют конгруэнцию m-плоскостей в* R_n *с точностью до движения, причем в общем случае при*

$$n - 1 \leqslant (n - m)^2 \tag{59}$$

векторы h^1_{bp} *выражаются через аффиноры* c^1_{apq} $(a = 1, \ldots, m)$ *и их производные, а при*

$$n + m \leqslant (n - m)^2 \tag{60}$$

векторы h^0_{ap} *выражаются через аффиноры* c^1_{apq} $(a = 0, \ldots, m)$ *и их производные.*

Для доказательства составим смешанную систему дифференциальных уравнений в полных дифференциалах [([13]), стр. 12]. Поставим в соответствие каждой плоскости конгруэнции $n+1$ векторов $R_n: \mathbf{e}_a, \mathbf{l}_{1p}$ и $\mathbf{r}$ $(a=1, \ldots, m;\ \ p=1, \ldots, n-m)$. (Мы предполагаем, что базисы плоскостей выбраны так, что векторы $\mathbf{l}_{1p}$ линейно независимы.) Ковариантно дифференцируя эти векторы с помощью тензора c^1_{1pq}, мы получаем систему дифференциальных уравнений вида (обозначаем ковариантное дифференцирование вертикальной черточкой между индексами):

$$\mathbf{e}_{ap} = c^1_{a\pi p}\mathbf{l}^{\pi}_1 + h^{\alpha}_{ap}\mathbf{e}_{\alpha}, \tag{61}$$

$$\mathbf{l}_{1p|q} = -c^1_{apq}\mathbf{e}_a, \tag{62}$$

$$\mathbf{r}_p = c^1_{0\pi p}\mathbf{l}^{\pi}_1 + h^0_{ap}\mathbf{e}_a. \tag{63}$$

Уравнения (61) следуют из определения векторов $\mathbf{l}_{ap}$ $(\mathbf{e}_{cp} = \mathbf{l}_{ap} + h^{\alpha}_{ap}\mathbf{e}_{\alpha})$ и формулы

$$\mathbf{l}_{ap} = c^1_{a\pi p}\mathbf{l}^{\pi}_1.$$

Уравнения (62) следуют из того, что

$$\mathbf{l}_{1p|q}\mathbf{e}_a = -\mathbf{l}_{1p}\mathbf{e}_{aq} = -\mathbf{l}_{1p}\mathbf{l}_{aq} = -c^1_{apq}\mathbf{l}_{1p|q}, \quad \mathbf{l}_{1r} = 0.$$

Уравнения (63) следуют из определения векторов $\mathbf{l}_{0p}$ $(\mathbf{r}_p = \mathbf{l}_{0p} + h^0_{ap}\mathbf{e}_a$ и формулы

$$\mathbf{l}_{0p} = c^1_{0\pi p}\mathbf{l}^{\pi}_1.$$

Кроме уравнений (61)—(63), эти векторы связаны конечными уравнениями

$$\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b = \delta_{ab}, \quad \mathbf{e}_a\mathbf{l}_{1p} = 0, \quad \mathbf{l}_{1p}\mathbf{l}_{1q} = c^1_{1pq}. \tag{64}$$

Условия интегрируемости этой системы имеют вид (обозначаем альтернирование по двум индексам их подчеркиванием):

$$-c^{1\pi\rho}_1 c^1_{c\pi\underline{p}} c^1_{b\rho\underline{q}} + h^a_{b\underline{p}|\underline{q}} + h^a_{\alpha\underline{p}}\, h^{\alpha}_{b\underline{q}} = 0, \tag{65}$$

$$c^1_{cp\underline{q}|\underline{r}} + h^a_{\alpha\underline{q}} c^1_{\alpha p\underline{r}} = 0, \tag{66}$$

$$R^1_{1pq,rs} + c^1_{aq\underline{r}} c^1_{ap\underline{s}} = 0. \tag{67}$$

Условиями интегрируемости уравнений (61), (62) являются условия (65)—(67), где a, b, α изменяются от 1 до m. Условиями интегрируемости уравнений (63) являются условия (65)—(67), где a (не b и α!) заменено на 0, а b и α попрежнему изменяются от 1 до m. Индексы p, q, r, s изменяются от 1 до $n-m$.

Аффинор $R^1_{1pq,rs}$ — аффинор Римана-Кристоффеля для тензора c^1_{1pq}. Аффинор $h^a_{b\underline{p}|\underline{q}} + h^a_{\alpha\underline{p}} h^{\alpha}_{b\underline{q}}$ можно также рассматривать как аффинор Римана-Кристоффеля, составленный из h^a_{bp}, как из коэффициентов связности (условия (65) и (67) «двойственны» друг другу, условие (66) можно рассматривать как равенство нулю «обобщенной ковариантной производной» аффинора c^1_{apq}).

Так как условия интегрируемости (65)—(67) удовлетворяются тождественно *в силу* конечных уравнений (64), а при дифференцировании

конечных уравнений (64) и подстановке производных из уравнений (61), (62) мы получаем следствие тех же уравнений, то наша система будет *полна* и *вполне интегрируема* и поэтому определяет решение, зависящее, в силу характера условий (64), от $\frac{n(n+1)}{2}$ производных постоянных — параметров группы G движений R_n.

Условия (65) — (67) составляют полную систему зависимостей аффиноров c^1_{apq} и векторов h^a_{bp}.

Система уравнений (61) — (64) определяет конгруэнцию вместе с ее направляющими поверхностями, но при добавлении к условиям (65) — (67) условий нормирования (56) эти поверхности становятся инвариантно связанными с конгруэнцией.

Условие (66) является алгебраическим относительно векторов h^a_{bp}, причем при $a, b > 0$ число уравнений (66) равно $\frac{m(n-m)^2(n-m-1)}{2}$, а число компонент векторов h^a_{bp} равно $\frac{m(m-1)(n-m)}{2}$, вследствие чего условием алгебраического выражения векторов h^a_{bp} при $a, b > 0$ является условие (59); при $a=0$, $b > 0$ число уравнений (66) равно $\frac{(n-m)^2(n-m-1)}{2}$, а число компонент векторов h^0_{bp} равно $m(n-m)$, вследствие чего условием алгебраического выражения векторов h^0_{ap} является (60).

Условия (59), (60) имеют место, конечно, только в *общем случае* при условии линейной независимости уравнений (66).

Если конгруэнция m-плоскостей состоит из *нормальных плоскостей к* $(n-m)$-*поверхности*, то возьмем эту поверхность в качестве направляющей поверхности конгруэнции и заменим в предыдущей теореме векторы $\mathbf{l}_{1p}$ на векторы $\mathbf{r}_p = \mathbf{l}_{0p}$. Тогда тензор $c^0_{0pq} = \mathbf{r}_p\mathbf{r}_q$ является *метрическим тензором* $(n-m)$-поверхности, аффиноры c^0_{cpq} симметричны и являются *тензорами кривизны* $(n-m)$-поверхности [([14]), стр. 82, ([15]), стр. 190], а компоненты векторов являются *коэффициентами кручения* $(n-m)$-поверхности [([14]), стр. 82, ([15]), стр. 190]. Теорема В. В. Вагнера в этом случае сводится к известной *теореме Риччи* [([14]), стр. 131, ([15]), стр. 192]. Наша теорема в этом случае является усилением теоремы Риччи в тех же направлениях, что и в случае общей теоремы В. В. Вагнера.

С помощью аффиноров c^a_{bpq} можно определить координаты различных точек m-плоскостей конгруэнции. Формулы (23), (24) показывают, что *координаты центра m-плоскости* в данном направлении являются решениями системы линейных уравнений

$$\mathbf{l}_0\mathbf{l}_a + a^\alpha \mathbf{l}_\alpha \mathbf{l}_a = 0, \tag{68}$$

так же как $\mathbf{l}_0\mathbf{l}_a = c^0_{a\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho$, $\mathbf{l}_a\mathbf{l}_b = c^a_{b\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho$ являются решениями системы

$$(c^0_{a\pi\rho} + a^\alpha c^0_{\alpha\pi\rho})\lambda^\pi\lambda^\rho = 0. \tag{69}$$

С помощью этих аффиноров можно также определить *фокусы* на m-плоскости конгруэнции. Фокусами конгруэнции m-плоскостей в R_n назы-

ваются те точки R_n, в которых нарушается единственность проходящих через них плоскостей конгруэнции. Эти точки могут быть определены так же, как точки пересечения бесконечно близких плоскостей конгруэнции, т. е. как точки m-плоскостей, являющиеся центрами хотя бы для одного направления параметра 0.

Если плоскость конгруэнции определена линейными уравнениями

$$f_u(x^1, \ldots, x^n; u^1, \ldots, u^{n-m}) = 0,$$

то фокусами являются те точки, в которых якобиан $\left|\frac{\partial f_u}{\partial u^v}\right|$ обращается в нуль. Это уравнение $(n-m)$-го порядка относительно x^i определяет на каждой m-плоскости конгруэнции $(m-1)$-поверхность $(n-m)$-го порядка, являющуюся геометрическим местом фокусов этой плоскости — ее *фокальной поверхностью*. Эти поверхности для всех плоскостей составляют *фокальную гиперповерхность* конгруэнции; каждая плоскость конгруэнции касается гиперповерхности по своей фокальной поверхности.

Как видно из (23), (24), фокусы, как центры направлений параметра 0, соответствуют случаю, когда вектор $\mathbf{l}_0$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m$, причем координаты a^b фокуса определяются из условия

$$\mathbf{l}_0 + a^\alpha \mathbf{l}_\alpha = 0. \tag{70}$$

Выражая векторы $\mathbf{l}_0$ и $\mathbf{l}_a$ через векторы $\mathbf{l}_b$ и аффиноры c_0^b, c_a^b мы перепишем (70) в виде

$$(c_0^b + a^\alpha c_\alpha^b)\, \mathbf{l}_b = 0, \tag{71}$$

откуда следует, что уравнениями, связывающими координаты фокусов, являются условия

$$|c_0^b + a^\alpha c_\alpha^b| = 0. \tag{72}$$

Условия (72) при различных значениях b — следствия друг друга. Каждое из них, таким образом, — одна из форм уравнения фокальной $(m-1)$-поверхности m-плоскости.

При нормировании аффиноров c_b^a условием (56) уравнения (72) приобретают наиболее простой вид (отсутствуют члены с произведениями $(a^a)^m a^b$ и со степенями $(a^b)^m$, т. е. коэффициенты этих членов пропорциональны следам аффиноров c_b^a и c_0^a).

В случае $n-m=2$, когда $(m-1)$-поверхности (72) — поверхности 2-го порядка, условия (56) (не зависящие в данном случае от нумерации векторов $\mathbf{e}_a$) являются условиями того, что уравнения этих поверхностей приобретают канонический вид, т. е. точки пересечения m-плоскости со средней поверхностью являются *центрами* $(m-1)$-поверхностей 2-го порядка, а векторы $\mathbf{e}_a$, соответствующие средним сферическим поверхностям, направлены по *главным осям* $(m-1)$-поверхностей 2-го порядка.

6. Примеры конгруэнций плоскостей

Простейшим частным случаем конгруэнции плоскостей в R_n. является *конгруэнция прямых* ($m = 1$). В этом случае аффиноры c_b^1 сводятся к аффинору c_0^1 и тензору c_1^1 [см. (43)]. В. В. Вагнер [(1), стр. 191] в качестве следствия из своей теоремы нашел, что аффиноры (43) определяют конгруэнцию прямых с точностью до движения (условие (60) здесь всегда выполнено), причем условия, связывающие эти аффиноры, состоят из условия единичной кривизны тензора c_1^1 и условий:

$$c^1{}_{o\underline{p}|q} + \frac{1}{n-2} c_1^{1\pi\rho} c^1{}_{o\pi\underline{\rho}|\underline{\underline{p}}\underline{q}} = 0, \tag{73}$$

$$c^1_{op\underline{q}|\underline{r}} + \frac{1}{n-2} \; c_1^{1\pi\rho} c^1_{1\,p\underline{r}} c^1_{o\pi\underline{\rho}|\underline{\underline{q}}} = 0, \tag{74}$$

к которым приводят и наши условия (65)—(67).

Аффинор c_0^1 по существу совпадает с аффинором $L_\lambda^{\cdot\varkappa}$ Стройка [(14). стр. 44], а обратный ему аффинор c_1^0—с аффинором $l_\lambda^{\cdot\varkappa}$ [(14), стр. 42].

Аффиноры c_0^1 и c_1^1 эквиваленты также системе тензоров П. К. Рашевского (16) a_{ij}, b_{ij}, и B_i, определяющих конгруэнцию прямых в R_n с точностью до движения. Тензор a_{ij} совпадает с нашим тензором c_{1pq}^1, а наш аффинор c_{0pq}^1 совпадает с выражением $b_{ij}—B_{i;j}$, составленным из тензоров П. К. Рашевсквго.

В. Я. Суховеев в неопубликованной работе обнаружил, что условия (73), (74) могут быть записаны в виде

$$B_{\underline{pq}}=0, \quad B_{\underline{pq}'\underline{\underline{r}}} = 0, \tag{75}$$

где B_{pq}—2-й гауссов тензор *средней огибающей гиперповерхности* —огибающей гиперплоскостей, перпендикулярных лучам конгруэнции в точках их пересечения со средней гиперповерхностью.

Тензор П. К. Рашевского b_{ij} совпадает с тензором B_{pq}, т, е. его выражение через наши аффиноры дается левой частью (73).

Вектор П. К. Рашевского B_i совпадает с нашим вектором

$$h_0^1 p = \frac{1}{n-2} c^1_{1\pi\rho} \, c^1_{0\pi\underline{\rho}|\underline{p}} \,.$$

Абсцисса центра луча в конгруэции прямых в R_n определяется по формуле (29), которая здесь принимает вид $a = -c_0^1 \mathrm{I}_1 \mathrm{I}_1$, или

$$a = -c^1_{0\pi\rho} \lambda^\pi \lambda^\rho \,, \tag{76}$$

Эта формула, приводящаяся также к виду (33), показывает, что абсциссы *граничных точек* луча определяются *собственными числами тензора* $c^1_{0(pq)}$ [(16), стр. 226].

Фокусы соответствуют случаям коллинеарности векторов I_0 и I_1, т. е. тем случаям, когда вектор I_1 —*собственный вектор* аффинора c_0^1. Следовательно, на луче имеются n—I (действительных, мнимых или совпадающих) фокусов, абсциссы которых определяются *собственными числами аффинора* c^1_{0pq} [(14), стр. 43, (16), стр. 225].

Специальный вид аффиноров конгруэнции выделяет специальные типы конгруэнций. Приведем простейшие примеры.

1°. Изотропная конгруэнция — конгруэнция, у которой каждый луч имеет единственный центр (совпадающий со средней точкой). Формула (76) показывает, что необходимым и достаточным условием изотропности является *антисимметричность* аффинора c^1_{0pq}. Этот случай легко обобщается на случай конгруэнции m-плоскостей: формула (28) показывает, что здесь необходимым и достаточным условием является антисимметричность всех аффиноров c^a_{0pq} [(9), стр. 187].

Изотропная конгруэнция прямых обладает многими свойствами изотропной конгруэнции прямых в R_3: средняя гиперповерхность и сферическое изображение соответствуют друг другу ортогональностью линейных элементов (первые направлены по векторам $p\mathfrak{b} = \mathbf{l}_0$, вторые — по векторам $\mathfrak{b}_1 = \mathbf{l}_1$, а $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 = 0$); средняя огибающая гиперповерхность минимальна (составляя с помощью (73) тензор $B^p_q = c_1^{1p\pi} B_{\pi q}$, убеждаемся, что $B^\pi_\pi = 0$).

2°. Нормальная конгруэнция — конгруэнция нормалей к 1-семейству гиперповерхностей. Необходимым и достаточным условием нормальности является *симметричность* аффинора c^1_{0pq}: в случае нормальности имеет решение система уравнений

$$\mathbf{e}(\mathbf{r} + \rho\mathbf{e})_p = 0, \tag{77}$$

условием интегрируемости которой является условие

$$\mathbf{e}_{\underline{p}} \mathbf{r}_{\underline{q}} = c^1_{0\underline{p}\underline{q}} = 0$$

[ср. (14), стр. 29; здесь такие конгруэнции называются V_{n-1}-*нормальными*].

3°. Конгруэнция нормалей к минимальной гиперповерхности (в трехмерном случае — конгруэнция Гишара-Пето [(12), стр. 274]). В этом случае минимальная гиперповерхность является средней и тензор c^1_{0pq} является 2-м гауссовым тензором этой гиперповерхности. Значит, необходимым и достаточным условием этого случая является условие

$$c^1_{0\underline{p}\underline{q}} = 0, \quad c^1_{\cdot\, p\underline{q}\, \underline{r}} = 0. \tag{78}$$

4°. Конгруэнция, средние гиперплоскости которой проходят через одну точку (в трехмерном случае — конгруэнция Аппеля-Бианки [(12), стр. 294]). Здесь средняя огибающая гиперповерхности вырождается в точку и необходимым и достаточным условием этого случая является условие

$$c^1_{0p|q} + \frac{1}{n-2} c_1^{1\pi\rho} c^1_{0\pi\underline{\rho}|\underline{p}\underline{q}} = 0. \tag{79}$$

Другим простым частным случаем семейства плоскостей в R_n является *конгруэнция 2-плоскостей, проходящих через точку эвклидова n-пространства*, эквивалентная *конгруэнции прямых эллиптического* $(n-1)$-*пространства*.

Общая конгруэнция m-плоскостей, проходящих через точку R_n, определяется аффинорами c^1_{apq}, h^a_{bp} $(a, b = 1, \ldots, m)$ с точностью *до вращения*, причем система уравнений, определяющая конгруэнцию, состоит здесь из уравнений (61), (62) и (64), а условиями интегрируемости служат условия (65) — (67) при a, b, $\alpha = 1, \ldots, m$.

В случае $m = 2$ аффиноры, определяющие конгруэнцию, сводятся к двум: c^1_{1pq} и c^1_{2pq} (аффинор c^2_{2pq} выражается через эти аффиноры по формуле (44): $c^2_{2pq} = c^{1\pi}_{2p} c^{1\rho}_{2q} c^1_{1\pi\rho}$).

Аффиноры c^1_{1pq}, c^1_{2pq} и c^2_{2pq} для случая $n = 4$ (теория прямолинейных конгруэнций эллиптического 3-пространства) — известные тензоры Фибби-Кулиджа [([17]), стр. 215].

Условия (65) — (67), связывающие тензоры c^1_{1pq} и c^1_{2pq}, состоят из условий (73), (74) (с заменой c^1_{0pq} на c^1_{2pq} и n на $n-1$) и, кроме того, условий

$$c_1^{1\pi\rho} c^1_{2\underline{\pi\rho}|\underline{\underline{p}}} c^1_{2q\underline{r}} = 0, \tag{80}$$

$$R^1_{1pq,rs} + c^1_{1q\underline{r}} c^1_{1p\underline{s}} + c^1_{2q\underline{r}} c^1_{2p\underline{s}} = 0. \tag{81}$$

Радиусы-векторы направляющих сферических поверхностей $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ выбираются взаимно ортогональными и поэтому произвол этих поверхностей сводится к одному углу. Если нормировать c^1_{2pq} условием (69), то эти поверхности становятся инвариантно связанными с конгруэнцией средними поверхностями. Аффиноры c^1_{2pq} и $c^2_{2pq} - c^1_{1pq}$ могут быть выражены через производные векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$c^1_{2pq} = \mathbf{e}_{1p} \mathbf{e}_{2p}, \tag{82}$$

$$c^2_{2pq} - c^1_{1pq} = \mathbf{e}_{2p} \mathbf{e}_{2q} - \mathbf{e}_{1p} \mathbf{e}_{1q}. \tag{83}$$

При переходе от векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ к векторам

$$'\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cos\rho + \mathbf{e}_2 \sin\rho, \quad '\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \sin\rho + \mathbf{e}_2 \cos\rho,$$

аффинор c^1_{2pq} — переходит в аффинор

$$'c^1_{2pq} = c^1_{2pq} \cos^2\rho - c^1_{2qp} \sin^2\rho + (c^2_{2pq} - c^1_{1pq}) \cos\rho \sin\rho. \tag{84}$$

Всякому направлению в нашей конгруэнции, выходящему из данной 2-плоскости, соответствует 2-геликоид параметра 0. Его направляющие 2-плоскости пересекаются с данной 2-плоскостью по двум ортогональным направлениям, составляющим с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ угол φ, а направляющие косинусы k_1 и k_2 можно рассматривать, соответственно, как синус и косинус угла α. Углы φ и α характеризуют направление в данной конгруэнции аналогично центру луча и параметру распределения в обычной конгруэнции прямых.

Параметры направления φ и α могут быть выражены через аффиноры c^1_{2pq} и $c^2_{2pq} - c^1_{qp1}$; для этого перепишем формулу (24) в виде

$$\mathbf{l}_1 = k_1\mathbf{b}_1 \cos\varphi + k_2\mathbf{b}_2 \sin\varphi, \quad \mathbf{l}_2 = -k_1\mathbf{b}_1 \sin\varphi + k_2\mathbf{b}_2\cos\varphi, \tag{85}$$

откуда

$$\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2 = (-k_1^2 + k_2^2)\cos\varphi\sin\varphi, \quad \mathbf{l}_2^2 - \mathbf{l}_1^2 = (-k_1^2 + k_2^2)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \tag{86}$$

и

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2}{\mathbf{l}_2^2 - \mathbf{l}_1^2}, \tag{87}$$

$$\cos^2 2\alpha = 4(\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2)^2 + (\mathbf{l}_2^2 - \mathbf{l}_1^2)^2. \tag{88}$$

Так как

$$\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2 = c^1_{2\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho, \quad \mathbf{l}_2^2 - \mathbf{l}_1^2 = (c^2_{2\pi\rho} - c^1_{1\pi\rho})\lambda^\pi\lambda^\rho,$$

то

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{c^1_{2\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho}{(c^2_{2\pi\rho} - c^2_{1\pi\rho})\lambda^\pi\lambda^\rho}, \tag{89}$$

$$\cos^2 2\alpha = 4(c^1_{2\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho)^2 + ((c^2_{2\pi\rho} - c^1_{1\pi\rho})\lambda^\pi\lambda^\rho)^2. \tag{90}$$

На 2-плоскостях нашей конгруэнции имеются *фокальные лучи*, являющиеся линиями пересечения с бесконечно близкими плоскостями конгруэнции (фокальная поверхность здесь распадается на прямые, пересекающиеся в центре конгруэнции). Для соответственных направлений k_1 или $k_2 = 0$, а углы фокальных лучей с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — соответственные значения угла φ. При k_1 или $k_2 = 0$ $\cos^2 2\alpha = 1$ и формула (88) дает

$$(\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2)^2 = \mathbf{l}_1^2\mathbf{l}_2^2,$$

т. е. в данном случае вектор $\mathbf{l}_1$ есть *собственный вектор* аффинора c^1_2.

Следовательно, на 2-плоскости имеется $n-2$ пар (действительных мнимых или совпадающих) фокальных лучей, углы φ которых определяются *собственными числами аффинора* c^1_{2pq}. Если эти собственные значения c_p ($\mathbf{l}_2 = c_p\mathbf{l}_1$), то углы фокальных лучей определяются формулой (79), которая дает

$$\operatorname{tg}\varphi_p = c_p. \tag{91}$$

Специальный вид аффиноров конгруэнции выделяет специальные типы конгруэнций. Приведем простейшие примеры:

1°. Изотропная конгруэнция, у которой каждая 2-плоскость имеет единственный угол φ. Формула (87) показывает, что необходимым и достаточным условием изотропности при этих направлениях ($\varphi = 0$) векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ является *антисимметричность* аффинора c^1_{2pq}.

Этот случай легко обобщается на случай конгруэнции m-плоскостей: формулы (26), (27) показывают, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы направляющие 2-плоскости всех направлений в конгруэнции пересекали данную m-плоскость по векторам $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$, является *антисимметричность всех аффиноров* c^a_{bpq}.

2°. Нормальная конгруэнция — конгруэнция 2-плоскостей, проходящих через точку, нормальных к 2-семейству $(n-2)$-поверх-

ностей, лежащих на гиперсферах с центром в центре конгруэнции. Необходимым и достаточным условием нормальности является *симметричность аффинора* c^1_{2pq} (формула (84) показывает, что это условие не зависит от направляющих поверхностей); в случае нормальности имеет решение система уравнений

$$(-\mathbf{e}_1 \sin\rho + \mathbf{e}_2 \cos\rho)(\mathbf{e}_1 \cos\rho + \mathbf{e}_2 \sin\rho)_p = 0, \tag{92}$$

условием интегрируемости которой является условие

$$\mathbf{e}_{1\underline{p}}\, \mathbf{e}_{2\underline{q}} = c^1_{2\underline{pq}} = 0.$$

3°. Конгруэнция нормалей к поверхности нулевой гауссовой кривизны (в случае 4-пространства — конгруэнция Бианки [([18]), стр. 324]) — нормальная конгруэнция, такая, что среди нормальных ей $(n-2)$-поверхностей на каждой гиперсфере имеется поверхность с нулевой гауссовой кривизной. Если взять такую поверхность за направляющую, то аффинор c^1_{2pq} будет служить 2-м гауссовым тензором этой поверхности, т. е. $c^1_{2pq} = 0$.

В случае $n=4$ всякой конгруэнции соответствует отображение двух *2-мерных сфер Фубини* [([18]), стр. 319]. В этом случае аффинор c^1_{2pq} связан с якобиевым аффинором этих сфер (аффинором отображения их 2-мерных элементов): если $c^1_{2pq} = \mathbf{e}_{1p}\mathbf{e}_{2q}$, то

$$b_{pq} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{1p} \mathbf{e}_{2q} = \varepsilon^{\pi}_{p} c^1_{2\pi q} \tag{93}$$

(тензор $b_{(pq)}$ — аналог *тензора Санниа* теории прямолинейных конгруэнций в R_3; $\varepsilon^1_1 = \varepsilon^2_2 = 0$, $\varepsilon^1_2 = -\varepsilon^2_1 = 1$) и если базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ таков, что $c^{1\pi}_{2\pi} = 0$ (в силу (93) этому соответствует $b_{pq} = b_{(pq)}$), то якобиев аффинор a^p_q сфер Фубини связан с аффинором b^p_q соответствием

$$a = (b+e)(b-e)^{-1}, \tag{94}$$

где e — единичный аффинор. В частности, при этой интерпретации чрезвычайно наглядно получается тот известный результат, что если конгруэнция *изотропна* или *нормальна*, то отображение сфер Фубини, соответственно, *конформно* или *сохраняет площадь*: в этих случаях, соответственно, $c^1_{2(pq)} = 0$ или $c^1_{2\underline{pq}} = 0$ и аффинор a^p_q может быть приведен к виду

$$\left\|\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & a \end{matrix}\right\| \quad \text{или} \quad \left\|\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{matrix}\right\|, \tag{95}$$

что и определяет указанные отображения.

Полученные результаты без труда обобщаются на случай *m-плоскостей псевдоэвклидова n-пространства* (отличающегося от R_n неопределенностью метрической формы) и при рассмотрении m-плоскостей, проходящих через одну точку n-пространства, — на случай $(m-1)$-*плоскостей псевдоэллиптического* (в частности гиперболического) $(n-1)$-*пространства*.

Тот факт, что группы унитарных движений, конформных и проективных преобразований изоморфны группам или подгруппам групп эвклидовых или псевдоэвклидовых движений или вращений, позволяет представлять геометрические образы соответственных пространств плоскостями эвклидовых или псевдоэвклидовых пространств надлежащего числа измерений. Вследствие этого результаты настоящей работы позволяют построить унитарно-дифференциальную геометрию семейств многомерных комплексных плоскостей, конформно-дифференциальную геометрию семейств многомерных сфер и проективно-дифференциальную геометрию семейств пар многомерных плоскостей и семейств гиперповерхностей 2-го порядка.

Поступило
10. V. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Широков П. А., Тензорное исчисление, ч. 1, М.—Л., 1934.

[2] Cartan E., La géométrie de groupes de transformations. Journ. d. math. pure et appl. (9) 6 (1927), 1—119.

[3] Segre C., Sulle geometrie metriche dei complessi lineari... Atti d. Accad. d. Sc. di Torino, 19 (1883—84), 159—186.

[4] Bortolotti E., Geometria differenziale metrica nello spazio rigato, Atti d. congresso internaz. d. matem., Bologna, 4 (1928), 305—316.

[5] Норден А. П., Обобщенная геометрия двумерного линейчатого пространства, Матем. сборник. 18 (60) : 1 (1946), 139—152.

[6] Норден А. П., Об истолковании пространства аффинной связности с вырождающейся метрикой, Доклады Ак. Наук СССР, 50 (1945), 57—60.

[7] Study E., Schraubenflächen als Extreme, Amer. Journ. of Math. 29 (1907), 160—167.

[8] Розенфельд Б. А., Внутренняя геометрия множества m-мерных плоскостей n-мерного эллиптического пространства, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 5 (1941), 325—366.

[9] Wagner V., Differential geometry of the family of R_k' s in R_n... Матем. сборник, 10 (52) : 3 (1942), 165—209.

[10] Розенфельд Б. А., Теория конгруэнций и комплексов прямых в эллиптическом пространстве, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 5 (1941), 105—122.

[11] Бляшке В., Дифференциальная геометрия, т. 1, М.—Л., 1935.

[12] Dubnow J., Die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen in tensorieller Darstellung, Труды семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ, 1 (1933), 223—300.

[13] Bianchi L., Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni, Pisa, 1918.

[14] Schouten J. A. und Struik D. J., Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. Bd. II, Groningen, 1938.

[15] Eisenhart L. P., Riemannian geometry, Princeton, 1926.

[16] Rachevsky P., Congruence rectiligne dans l'espace euclidien à n dimensions, Труды семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ, II—III (1935), 212—226.

[17] Coolidge J. L., The elements of non-euclidian geometry. Oxford, 1909.

[18] Клейн Ф., Высшая геометрия, М.—Л., 1939.

B. ROSENFELD. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIFLLE DES FAMILLES DE PLANS À PLUSIEURS DIMENSIONS

RÉSUMÉ

Dans cet article on considère les plans orientés m-dimensionnels dans l'espace euclidien à n dimensions (les m-plans dans le n-espace).

1) On construit *une représentation vectorielle* de l'espace R_n^m des m-plans dans le n-espace R_n au moyen d'une surface P_n^m dans un $\binom{n+1}{m+1}$ espace vectoriel. Un plan p est représenté par le vecteur $\mathbf{p}$ dont les composantes sont *les coordonnées grassmanniennes* (plückeriennes) normées $p^{i_0 i_1 \dots i_m}$ du plan p.

2) Deux m-plans ont une perpendiculaire commune (de longueur a) et m 2-plans formant des angles stationnaires ω_a.

On introduit dans l'espace R_n^m la *connexion affine* de Cartan (²). Dans cette connexion le rôle des lignes géodésiques est joué par *les m-hélicoïdes*, c'est-à-dire les suites de m-plans ayant une même perpendiculaire et les mêmes 2-plans contenant des angles stationnaires et pour lesquelles la distance entre le plan courant $p(t)$ de la suite et un plan fixe $p(0)$ est $a = pt$ et les angles stationnaires formés par les plans $p(t)$ et $p(0)$ sont $\omega_a = k_a t$ $(k_1^2 + \dots + k_m^2 = 1)$. Les nombres k_a sont *les cosinus directeurs*, le nombre p est *le paramètre distributeur*, la perpendiculaire commune est *l'axe* et les 2-plans contenant les angles ω_a sont *les 2-plans directeurs* du m-hélicoïde.

Dans l'espace R_3^1 cette connexion affine est générée par la métrique de Segre [(³),(⁴)]. Dans les R_n^{n-1} cette connexion affine est la connexion de Norden [(⁵), (⁶)]. Dans l'espace $\underset{0}{R_n^m}$ (les espaces des m-plans de R_n qui passent par un point) cette connexion affine est générée par la métrique (⁸),(⁹) (pour $\underset{0}{R_4^2}$ cette métrique est la métrique de Study (⁷)).

3) L'élément linéaire de l'espace R_n^m peut être déterminé par le ***m*-hélicoïde tangent.**

Un m-hélicoïde arbitraire passant par un m-plan ayant pour base vectorielle $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ est déterminé par: i) *le paramètre* p et *les cosinus directeurs* k_a, ii) *l'axe* ayant pour *centre* a, $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha (\alpha = 1, \dots, m)$ et *le vecteur directeur* $\mathbf{b} = b^\varphi \mathbf{e}_{m+\varphi} (\varphi = 1, \dots, n-m)$, iii) *les 2-plans directeurs* déterminés par les vecteurs $\mathbf{a}_a = a_a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ et $\mathbf{b}_a = b_a^\varphi \mathbf{e}_{m+\varphi}$ (a_a^b est une matrice orthogonale à m lignes, b^u et b_a^u forment $m+1$ lignes d'une matrice orthogonale à $n-m$ lignes).

En différentiant le vecteur $\mathbf{p}(t)$ représentant le plan $p(t)$ courant d'un m-hélicoïde et en posant $t = 0$ nous trouvons *les vecteurs locaux* $\mathbf{l} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_0$ de l'espace R_n^m. Les coordonnées du vecteur $\mathbf{l}$ sont

$$l^{m+u\ 1\dots m} = pb^u - k_\alpha a^\beta a_\alpha^\beta b_\alpha^u,$$
$$l^{0\,1\dots a-1\, m+u\, a+1\dots m} = k_\alpha a_\alpha^a b_\alpha^u.$$

En formant les vecteurs

$$\mathbf{l}_0 = l^{m+\varphi\,1\ldots m}\,\mathbf{e}_{m+\varphi}, \quad \mathbf{l}_a = l^{01\ldots a-1\;m+\varphi\;a+1\ldots m}\,\mathbf{e}_{m+\varphi}$$

nous trouvons qu'ils sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}_a$ orthogonaux au plan p considéré. Ces vecteurs permettent de trouver les paramètres locaux p, k_a, a^b, b^u, a_a^b, b_a^u comme solutions des équations

$$a_a^\alpha a_b^\beta \mathbf{l}_\alpha \mathbf{l}_\beta = 0 \quad (a \neq b), \quad a_a^\alpha a_b^\alpha = \delta_{ab}, \qquad (*)$$
$$\mathbf{l}_0 \mathbf{l}_a = -k_a^2 a^\beta a_\alpha^\beta a_\alpha^a, \quad \mathbf{l}_0 = p\mathbf{b} - a^\alpha \mathbf{l}_\alpha$$

4) Une famille à k paramètres de m-plans (une k-famille de m-plans) est représentée par une surface à k dimensions qui est une partie de la surface P_n^m.

Nous partageons les k-familles en 3 classes: *les surfaces* $(k < n - m)$, *les congruences* (⁹) $(k = n - m)$ et *les complexes* $(k > n - m)$.

Les vecteurs locaux d'une k-famille sont $\mathbf{l} = \mathbf{l}_\pi \lambda^\pi$ ou $\mathbf{l}_p = \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^p}$, $\lambda^p = \dfrac{du^p}{dt}$ $(p, \pi = 1, \ldots, k)$.

Pour les vecteurs $\mathbf{l}_a$ on a d'une manière analogue $\mathbf{l}_a = \mathbf{l}_{a\pi}\lambda^\pi$. En substituant ces valeurs de $\mathbf{l}_a$ dans les équations (*) nous obtenons les paramètres locaux d'une k-famille comme fonctions de λ^p. Dans le 3-espace des formules pareilles pour p et a sont les formules de Mannheim et Hamilton [11].

5) Pour les *congruences* des m-plans dans R_n on construit *les affineurs locaux* $c_b^a : \mathbf{l}_b = c_b^a \mathbf{l}_a$ (dans ce cas cette fonction vectorielle est biunivoque et linéaire) ayant pour composantes $c_{bpq}^a = \mathbf{l}_{ap}\,\mathbf{l}_{bq}$, $c_{bq}^{ap} = \mathbf{l}_a^p\,\mathbf{l}_{bq} (\mathbf{l}_a^p = c_a^{ap\pi}\,\mathbf{l}_{a\pi})$. Les affineurs c_b^a dépendent *des surfaces directrices*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \ldots, u^{n-m}), \quad \mathbf{e}_a = \mathbf{e}_a(u^1, \ldots, u^{n-m})$$

mais ils peuvent être normés au moyen des conditions $c_{b\pi}^{a\pi} = 0$ $(a > b)$. Les surfaces directrices avec les affineurs c_b^a normés sont les *surfaces moyennes* de la congruence. Pour $k = 2$, $m = 1$ ces affineurs sont des affineurs de Kummer [12].

Les affineurs c_{apq}^1 normés $(a = 0, \ldots, m)$ parmi lesquels le tenseur c_{1pq}^1 est symétrique et positif défini déterminent une congruence de m-plans dans un n-espace à un mouvement euclidien près, si l'on a $m + n \leqslant (n - m)^2$. Ce théorème est plus fort qu'un théorème de Wagner [9] et (pour la congruence des plans normaux à une surface) qu'un théorème de Ricci [14],[15].

Les affineurs c_b^a permettent de trouver le lieu *des points focaux* d'un m-plan de la congruence:

$$\text{Det}\ (c_0^b + a^\alpha c_\alpha^b) = 0.$$

Cette *surface focale* est liée avec les vecteurs directeurs normés des surfaces $\mathbf{r}$ et $\mathbf{e}_a$.

6) On applique la théorie à deux cas particuliers: *aux congruences des droites dans un n-espace* et *aux congruences des 2-plans passant par un point fixe dans un n-espace* (c'est-à-dire *aux congruences des droites dans un* $(n-1)$*-espace elliptique*). La théorie contient comme cas particuliers les théorèmes de Struik ([14]) de Rachevsky ([16]), de Wagner ([19]) $(m=1)$ et de Fibbi-Coulidge ([17]) $(m=2,\ n=4)$. On donne des caractéristiques en affineurs des congruences généralisant les congruences des droites d'un 3-espace: les congruences *isotrope*, *normale*, de Guichard-Petot ([12]), d'Appell-Bianchi ([12]) et de Bianchi ([18]).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 309—326 Série mathématique

М. Г. КРЕЙН

К ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В статье исследуются целые функции, логарифм модуля которых имеет положительную гармоническую мажоранту как в верхней, так и в нижней полуплоскости. К этому классу функций принадлежат, в частности, целые функции $f(z)$ с простыми вещественными нулями, обладающие тем свойством, что $f^{-1}(z)$ разлагается в простую сумму элементарных дробей. Оказывается, что эти функции всегда не выше экспоненциального типа и обладают особой регулярностью роста.

При построении теории эрмитовых операторов с индексом дефекта (1,1) и ее приложений к обобщенной проблеме моментов ([1]) автору пришлось пользоваться различными положениями теории функций комплексного переменного и, в частности, использовать ряд новых характеристик некоторых классов целых функций экспоненциального типа.

Так как эти характеристики, возможно, сами по себе представляют некоторый интерес, а опубликование развернутого изложения полученных автором результатов по спектральной теории эрмитовых операторов по ряду обстоятельств затягивается, автор посвящает этим характеристикам настоящую статью.

§ 1. Функции класса (N) в единичном круге

1. В дальнейшем нам понадобятся некоторые из результатов R. Nevanlinna [([2]) и ([3])] относительно класса функций, который определяется ниже.

Пусть G — некоторая односвязная область комплексной плоскости. Условимся говорить, что функция $f(z)$ $(z \in G)$ есть функция класса (N) в G, если она голоморфна внутри G и $\overset{+}{\log}|f(z)|$ * имеет в G гармоническую мажоранту. Последнее условие означает, что найдется по крайней мере одна гармоническая в G функция $U(z)$, для которой

$$\overset{+}{\log}|f(z)| \leqslant U(z) \quad (z \in G).$$

* $\overset{+}{\log} a = \frac{1}{2}(|\log a| + \log a) \quad (a > 0)$.

Очевидно, при взаимно однозначном конформном отображении области G на некоторую область G' всякая функция класса (N) в G перейдет в некоторую функцию класса (N) в G'.

Как показал R. Nevanlinna, для того чтобы некоторая функция $F(z)$ $(|z|<1)$ была класса (N) в единичном круге, необходимо и достаточно, чтобы она допускала следующее представление:

$$F(z) = \varepsilon B(z) \exp\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\sigma(t)\right) \quad (|z|<1), \tag{1}$$

где $|\varepsilon|=1$, $\sigma(t)$ $(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$ — некоторая вещественная функция ограниченной вариации, а $B(z)$ — функция Бляшке, т. е. конечное или бесконечное произведение вида

$$B(z) = z^{\lambda} \prod \frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (|z|<1), \tag{2}$$

где натуральное $\lambda \geqslant 0$, а $|\alpha_k|<1$ $(k=1, 2, \ldots)$ и в случае бесконечного произведения

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k|) < \infty. \; * \tag{3}$$

Другим условием того, чтобы голоморфная функция $F(z)$ $(|z|<1)$ была класса (N) в единичном круге, является

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |F(re^{i\varphi})|\, d\varphi < \infty. \tag{4}$$

Мы будем также пользоваться результатом В. И. Смирнова ([4]) [см. также ([3]), стр. 102], согласно которому для того чтобы голоморфная функция $F(z)$ $(z \in G)$ была класса (N) в G, достаточно, чтобы ее вещественная (или мнимая) часть сохраняла в G знак.

Заметим, наконец, что совокупность всех функций класса (N) в некоторой области образует линейное кольцо; при этом, если две функции входят в это кольцо и их частное голоморфно в G, то и это частное входит в кольцо.

2. После этих предварительных замечаний докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Для всякой функции Бляшке $B(z)$ найдется возрастающая и стремящаяся к единице последовательность положительных чисел $\{r_n\}$ такая, что равномерно относительно φ*

$$\lim_{n\to\infty} (1-r_n) \log |B(r_n e^{i\varphi})| = 0 \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi). \tag{5}$$

Доказательство. Положим

$$m(r) = \min_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} |B(re^{i\varphi})| \quad (0<r<1).$$

---

* Как известно, условие (3) является необходимым и достаточным условием сходимости произведения (2).

Так как

$$\left|\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\right|^2 = 1 - \frac{(1-a_k^2)(1-r^2)}{|1-\bar{\alpha}_k z|^2} \geqslant 1 - \frac{(1-a_k^2)(1-r^2)}{(1-a_k r)^2} = \left(\frac{r-a_k}{1-a_k r}\right)^2,$$

где

$$r=|z|<1, \quad a_k=|\alpha_k| \quad (k=1,2,\ldots),$$

то, согласно (2),

$$r^{-\lambda} m(r) \geqslant \prod_1^\infty \left|\frac{r-a_k}{1-a_k r}\right| = B_1(r) \quad (0<r<1),$$

где

$$B_1(z)=\prod_1^\infty \frac{a_k-z}{1-a_k z} \quad (|z|<1).$$

Рассмотрим, с другой стороны, функцию

$$\varphi(\zeta)=\prod_{k=1}^\infty \left(1-\frac{\zeta}{\zeta_k}\right),$$

где

$$\zeta=\frac{1+a_k}{1-a_k}>0 \quad (k=1,2,\ldots).$$

Так как

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\zeta_k} = \sum_1^\infty \frac{1-a_k}{1+a_k} < \sum_1^\infty (1-a_k) < \infty,$$

то $\varphi(\zeta)$ есть целая функция от ζ нулевого рода и, следовательно, минимального типа. Таким образом [см. ([5])], при любом θ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$

$$\limsup_{\rho\to\infty} \frac{\log|f(\rho e^{i\theta})|}{\rho}=0.$$

В частности, так как $f(-\rho)>1$ $(\rho>0)$, то

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{\log f(-\rho)}{\rho}=0$$

и, следовательно, найдутся такие $\rho_1<\rho_2<\ldots$ $(\rho_n\to\infty)$, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|f(\rho_n)|}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log|f(-\rho_n)|}{\rho_n}=0.$$

С другой стороны, как нетрудно проверить,

$$B_1(z)=\frac{f(\zeta)}{f(-\zeta)} \quad \text{при} \quad z=\frac{\zeta-1}{\zeta+1}.$$

Стало быть, полагая

$$r_n=\frac{\rho_n-1}{\rho_n+1} \quad (n=1,2,\ldots),$$

найдем, что

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\rho_n+1}\log\left|\frac{f(\rho_n)}{f(-\rho_n)}\right|=\lim_{n\to\infty}(1-r_n)\log B_1(r_n),$$

и так как

$$\lambda\log r+\log|B_1(r)|\leqslant\log m(r)\leqslant\log|B(re^{i\varphi})|<0 \quad (0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r<1),$$

то лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть $B(z)$ — функция Бляшке, а Γ — некоторый некасательный гладкий путь, идущий внутри единичного круга $|z|<1$ в точку 1. Тогда*

$$\limsup_{z\to 1} |1-z| \log |B(z)| = 0 \quad (z \in \Gamma). \tag{6}$$

Доказательство. В самом деле, верхний предел, стоящий в левой части равенства, во всяком случае неположителен. С другой стороны, если $\{r_n\}$ — последовательность такая, что имеет место (5), то, определяя числа $z_n \in \Gamma$ так, чтобы $|z_n| = r_n$ (начиная с некоторого значения натурального n), будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} |1-z_n| \log |B(z_n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-z_n|}{1-r_n} \cdot \lim (1-r_n) \log |B(z_n)| = 0,$$

ибо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|1-z_n|}{1-r_n} = \cos\theta,$$

где $\theta = \theta(\Gamma)$ — угол, образуемый касательной к Γ в точке 1 с осью X.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $F(z)$ — функция класса (N) в единичном круге, а Γ и $\theta = \theta(\Gamma)$ имеют вышеуказанный смысл. Тогда*

$$\limsup_{z\to 1} |1-z| \log |F(z)| = d\cos\theta \quad (z\in\Gamma), \tag{7}$$

где число d не зависит от выбора пути Γ.

Доказательство. Согласно представлению (1),

$$\log F(z) = \log B(z) + \frac{d}{2}\frac{1+z}{1-z} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\sigma_0(t) + i\log\varepsilon,$$

где d — удвоенный скачок функции $\sigma(t)$ в точке 0 ($2d = \sigma(+0) - \sigma(-0)$), а $\sigma_0(t)$ — соответственно измененная функция $\sigma(t)$. Таким образом, если положить

$$F_1(z) = F(z) / \varepsilon B(z),$$

то

$$|1-z| \log F_1(z)| = \frac{d}{2}|1-z| + d\cos\varphi + |1-z| \operatorname{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\sigma_0(t)\right),$$

где φ определяется из равенства

$$z = 1 - \rho e^{i\varphi} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Заметим, что

$$\varphi \to \theta \quad \text{при} \quad z \to 1 \quad (z\in\Gamma).$$

С другой стороны, очевидно, что, каково бы ни было $\delta > 0$ ($\delta < \pi$), при $z \in \Gamma$

$$\limsup_{z\to\infty} |1-z| \operatorname{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\right) \leqslant \limsup_{z\to 1} \left|\int_{-\pi}^{\pi}\right| =$$

$$= \limsup_{z\to 1} \left|(1-z)\int_{-\delta}^{\delta}\right| \leqslant 2\lim_{z\to 1} \frac{|1-z|}{1-|z|} \int_{-\delta}^{\delta} d\sigma_0(t) = \frac{2}{\cos\theta}[\sigma_0(\delta) - \sigma_0(-\delta)],$$

а так как последняя величина сколь угодно мала вместе с δ, то

$$\lim_{z\to 1} |1-z|\log|F_1(z)| = d\cos\theta \qquad (z\in\Gamma).$$

Это равенство в соединении с (6) дает (7). Теорема доказана.

Замечание 1. Из наших рассуждений нетрудно усмотреть, что предельное равенство

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \rho\log|F_1(1-\rho e^{i\theta})| = d\cos\theta$$

имеет место равномерно относительно θ, изменяющегося в каком-либо интервале $-\gamma\leqslant\theta\leqslant\gamma$ $\left(0<\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$ и, следовательно, относительно тех же θ предельное равенство (7) имеет место равномерно сверху, т. е. для любого $\varepsilon>0$ и $\gamma\left(0<\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$ найдется такое $\rho_\varepsilon>0$, что

$$\rho\log|F(1-\rho e^{i\theta})|\leqslant d\cos\theta+\varepsilon$$

при $0<\rho<\rho_\varepsilon$ и $|\theta|\leqslant\gamma$.

§ 2. Функции класса (N) в полуплоскости

1. Пусть $f(z)$ $(\operatorname{Im} z>0)$—функция класса (N) в верхней полуплоскости. Образуем функцию

$$F(\zeta)=f(z), \quad \text{где} \quad z=i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad \zeta=\frac{z-i}{z+i}, \tag{8}$$

которая, очевидно, будет класса (N) в единичном круге.

Заметив теперь, что преобразование $\zeta=\zeta(z)$ переводит всякий луч $z=re^{i\varphi}$ $(0<r<\infty)$ в некоторую дугу окружности, начинающуюся в точке -1 и кончающуюся в точке 1, где ее касательная образует с осью X угол $\theta(\gamma)=\frac{\pi}{2}-\varphi$, а также, что

$$\lim_{|z|\to\infty}(|1-\zeta|\cdot|z|)=2,$$

мы получим из теоремы 1 для $F(\zeta)$ первую часть следующего утверждения для $f(z)$:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f(z)$—функция класса (N) в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Тогда существует вещественная константа μ такая, что в любом секторе $\delta\leqslant\varphi\leqslant\pi-\delta$ $(0<\delta<\pi)$ равномерно сверху:*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r}=\mu\sin\varphi \qquad (0<\varphi<\pi). \tag{9}$$

Если, кроме того, функция $f(z)$ имеет конечное число нулей внутри угла $|\varphi-\varphi_0|<\delta$ $(0<\delta<\varphi_0<\pi)$, то в каждом внутреннем угле $|\varphi-\varphi_0|\leqslant\delta_1$ $(\delta_1<\delta)$ существует равномерный по φ предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r}=\mu\sin\varphi \qquad (|\varphi-\varphi_0|<\delta_1).$$

Доказательство. Докажем вторую часть теоремы. Соответственно разложению

$$F(\zeta) = \varepsilon B(\zeta) F_1(\zeta),$$

где $F_1(\zeta)$ — функция без нулей класса (N) в единичном круге, мы можем написать

$$f(z) = b(z) f_1(z),$$

где $f_1(z)$ — функция без нулей класса (N) в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, причем

$$|b(z)| = \prod_1^\infty \left| \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k} \right|,$$

где $\{z_k\}$ — полная последовательность всех нулей функции $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Условие (3) теперь означает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z_k}\right) < \infty.$$

В силу замечания 1 о функции F_1, можно утверждать, что в каждом угле $\gamma \leqslant \varphi \leqslant \pi - \gamma$ существует равномерный по φ предел

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log |f_1(re^{i\varphi})|}{r} = \mu \sin \varphi. \tag{10}$$

Так как по условию внутри угла U_δ $(|\varphi - \varphi_0| < \delta)$ находится конечное число нулей функции $f(z)$, то при достаточно большом N

$$|z - z_k| \geqslant |\tilde{z}_k| \sin(\delta - \delta_1) \qquad (z \in U_{\delta_1}, \quad k > N),$$

где U_{δ_1} — угол $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \delta_1$, и, следовательно,

$$\left| \frac{z - \bar{z}_k}{z - z_k} \right|^2 - 1 = \frac{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z_k}{|z - z_k|^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(\delta - \delta_1)} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z_k}\right) \cdot |z| \tag{11}$$

$$(z \in U_{\infty 1},\ k > N).$$

Таким образом, если для данного $\varepsilon > 0$ выбрать $N > 0$ так, чтобы имело место (11) и

$$\sin^{-2}(\delta - \delta_1) \sum_{k=N+1}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z_k}\right) < \varepsilon,$$

то мы будем иметь

$$\prod_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{z - \bar{z}_k}{z - z_k} \right| < \exp(\varepsilon |z|) \qquad (z \in U_{\delta_1}),$$

а следовательно, при достаточно большом R_ε

$$1 \geqslant |b(z)| \geqslant \frac{1}{2} \exp(-\varepsilon |z|) \quad (z \in U_{\delta_1}, \quad |z| > R_\varepsilon).$$

Этим доказано, что внутри угла U_{δ_1} равномерно по φ

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log |b(re^{i\varphi})|}{r} = 0.$$

Это обстоятельство в соединении со сказанным относительно (10) дает второе утверждение теоремы 2.

2. Для дальнейшего нам понадобится следующая

ЛЕММА 3. *Пусть $f(z)$—функция, непрерывная в полуплоскости* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ *и голоморфная внутри нее. Если, кроме того, $f(z)$ удовлетворяет условиям:*

$$1^\circ \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f(x)|}{1+x^2}\, dx < \infty,$$

$$2^\circ \qquad \limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log |f(z)|}{|z|} < \infty \quad (\operatorname{Im} z \geqslant 0),$$

то функция $f(z)$ есть функция класса (N) в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Доказательство. Обозначим через K_R полукруг, имеющий диаметром отрезок $(-R, R)$ и лежащий в верхней полуплоскости.

Рассмотрим гармоническую внутри K_R функцию

$$U_R(z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \log \frac{R-z}{R+z} = \frac{2}{\pi} \arg \frac{R-z}{R+z},$$

обращающуюся в 0 при вещественных z. Легко видеть, что

a) $\qquad U_R(z) \geqslant 0$ при $z \in K_R$,

b) $\qquad U_R(Re^{i\varphi}) = 1 \quad (0 < \varphi < \pi)$, (12)

c) $\qquad U_R(z) = \frac{4}{\pi} \frac{y}{R} + O\left(\frac{z^2}{R^2}\right) \quad (y = \operatorname{Im} z)$. (13)

Условие 1° позволяет ввести в рассмотрение неотрицательную гармоническую функцию

$$H(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f(t)|}{(x-t)^2+y^2}\, dt \quad (z = x+iy,\ y > 0).$$

Эта функция имеет непрерывные предельные значения $H(x)$, а именно,

$$H(x) = \overset{+}{\log} |f(x)| \geqslant \log |f(x)| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{14}$$

В силу условия 2°, найдутся константы $A > 1$ и $B > 0$ такие, что

$$|f(z)| \leqslant A \exp(B|z|) \quad (\operatorname{Im} z \geqslant 0). \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что имеет место неравенство

$$\log |f(z)| \leqslant H(z) + BRU_R(z) + \log A \quad (z \in K_R). \tag{16}$$

В самом деле, достаточно его проверить на границе K_R, состоящей из открытой полуокружности Γ_R и отрезка $(-R, R)$. На Γ_R неравенство (16) есть следствие (12) и (15), а на отрезке $(-R, R)$ — следствие неравенства (14).

Устремляя в неравенстве (16) R к ∞, мы, в силу (13), получим

$$\log |f(z)| \leqslant H(z) + \frac{4}{\pi} By + \overset{+}{\log} A \quad (\operatorname{Im} z \geqslant 0).$$

Так как справа стоит неотрицательная гармоническая функция, то лемма 3 доказана.

Заметим, что условие 2° леммы выражает свойство, близкое свойству функций класса (N), утверждаемому в первой части теоремы 2. Что же касается условия 1° леммы, то здесь следует отметить, что для всякой функции $f(z)$ класса (N) в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ существуют почти для всех $x \in (-\infty, \infty)$ по некасательным путям предельные значения $f(x)$, которые удовлетворяют условию 1° леммы [см. ([3]), стр. 81].

§ 3. Целые функции класса (N) в каждой из двух полуплоскостей

1. Для таких функций имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы целая функция $f(z)$ была функцией класса (N) в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1° $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|f(x)|}{1+x^2}\,dx < \infty;$$

2° *функция $f(z)$ — типа не выше экспоненциального* *.

Доказательство. Достаточность условий установлена в лемме 3; докажем их необходимость.

Если $f(z)$ есть функция класса (N) в верхней полуплоскости, то для функции $F(\zeta)$, определяемой равенством (8) § 2, найдется $M < \infty$ [см. ([4]), § 1] такое, что

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|F(re^{i\varphi})|\,d\varphi < M \quad (0 < r < 1), \tag{17}$$

а тогда

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(\operatorname{ctg}\theta)|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|F(\theta)|\,d\theta \leqslant \lim_{r\uparrow 1}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|F(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant M.$$

Таким образом, f обладает свойством 1°.

Умножая неравенство (17) на $r\,dr$ и интегрируя в пределах 0,1, получим

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \overset{+}{\log}|F(re^{i\varphi})|\,r\,dr\,d\varphi \leqslant \frac{M}{2}.$$

Переходя от F к f, найдем

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|f(z)|}{|i+z|^4}\,dx\,dy \leqslant \frac{M}{2}.$$

---

* т. е.

$$h = \limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty.$$

Если при этом $h > 0$, то будем говорить, что $f(z)$—экспоненциального типа.

Используя, аналогично, что f — класса (N) в нижней полуплоскости, получим для всей плоскости

$$L = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|f(z)|}{1+|z|^4}\,dx\,dy < \infty.$$

Возьмем теперь произвольное комплексное ζ ($|\zeta| \geqslant 1$) и обозначим через K_ζ круг с центром в точке ζ радиуса $R = |\zeta|$.

Пользуясь субгармоничностью функции $\overset{+}{\log}|f(z)|$, можно утверждать:

$$\overset{+}{\log}|f(\zeta)| \leqslant \frac{1}{\pi|\zeta|^2}\iint_{K_\zeta} \overset{+}{\log}|f(z)|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+16|\zeta|^4}{\pi|\zeta|^2}\iint_{K_\zeta}\frac{\overset{+}{\log}|f(z)|\,dx\,dy}{1+|z|^4} < L\frac{1+16|\zeta|^4}{\pi|\zeta|^2} \leqslant \frac{17L}{\pi}|\zeta|^2 \quad (|\zeta| \geqslant 1).$$

Следовательно, найдутся такие $\alpha, \beta > 0$, что при любом z

$$|f(z)| \leqslant \alpha \exp(\beta|z|^2). \tag{18}$$

Пусть $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$; введем в рассмотрение углы U_δ ($\delta \leqslant \arg \leqslant \pi - \delta$) и V_δ ($|\arg z| \leqslant \delta$).

В угле U_δ, согласно теореме 2, функция $f(z)$ имеет не более, чем экспоненциальный рост. Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для угла U'_δ, симметричного с углом U_δ относительно начала.

Что же касается угла V_δ, то так как его раствор $2\delta < \frac{\pi}{2}$ и так как, согласно только что отмеченному, на его сторонах функция $f(z)$ имеет не более, чем экспоненциальный рост, то, учитывая (18), мы можем применить к $f(z)$ теорему Фрагмена-Линделефа и тогда найдем, что $f(z)$ будет не более, чем экспоненциального типа и в угле V_δ.

Так как аналогичное заключение применимо и к углу V'_δ, симметричному с V_δ относительно начала, то теорема доказана.

Как известно [см. ([6]) или ([7])], всякая целая функция $f(z)$ экспоненциального типа имеет непрерывную индикатрису

$$h(\varphi) = \limsup_{r\to\infty}\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi); \tag{19}$$

при этом для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R_\varepsilon > 0$ такое, что

$$r^{-1}\log|f(re^{i\varphi})| \leqslant h(\varphi) + \varepsilon \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ r > R_\varepsilon). \tag{20}$$

Для рассматриваемой функции $f(z)$ индикатриса $h(\varphi)$ находится по формуле (9) в верхней полуплоскости и по аналогичной формуле — в нижней полуплоскости.

Таким образом, в нашем случае

$$h(\varphi)=\begin{cases}\mu\sin\varphi & (0\leqslant\varphi\leqslant\pi),\\ \mu'\,|\sin\varphi| & (0\leqslant\varphi\leqslant\pi),\end{cases}\tag{21}$$

а следовательно, диаграмма * функции $f(z)$ есть отрезок мнимой оси, соединяющий точки μi и $-\mu' i$ $(\mu\geqslant-\mu')$.

2. Мы предоставляем читателю доказать следующее предложение, обобщающее теорему 3 в ее главной части:

Пусть функция $f(z)$ голоморфна всюду внутри круга $K: |z-\alpha|<r$ за исключением точки α. Пусть, кроме того, круг K разбивается с помощью аналитической дуги, проходящей через точку α, на две области, в каждой из которых функция $f(z)$ класса (N). Тогда существует равномерный верхний предел

$$\limsup_{\rho\to\infty}\log|f(\alpha+\rho e^{i\varphi})|=h(\varphi),$$

причем $h(\varphi)$ будет опорной функцией некоторого отрезка.

3. С помощью теоремы 3 немедленно устанавливается

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $f(z)$—целая функция, имеющая вещественные простые нули α_k $(k=1, 2, \ldots)$, и такая, что при некотором натуральном $p\geqslant 0$*

1) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_k|^p f'(\alpha_k)}<\infty,$$

2) $$\frac{1}{f(z)}=R(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{f'(\alpha_k)}\left\{\frac{1}{z-\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_k}+\frac{z}{\alpha_k}+\ldots+\frac{z^{p-1}}{\alpha_k^p}\right\},\tag{22}$$

где $R(z)$ — некоторый полином.

Тогда $f(z)$ есть целая функция типа не выше экспоненциального, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{+}{\log}|f(x)|}{1+x^2}\,dx<\infty.\tag{23}$$

Доказательство. Разложение (22) можно проще записать так:

$$\frac{1}{f(z)}=R(z)+z^p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z-\alpha_k}\quad\left(\sum_{1}^{\infty}|c_k|<\infty\right).$$

С другой стороны, всякая функция $\varphi(z)$ вида

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}\frac{\rho_k}{z-\alpha_k},$$

---

* Как показал Г. Полиа [(6), (7)], индикатриса $h(\varphi)$ всякой целой функции экспоненциального типа есть опорная функция к некоторому выпуклому контуру, который и называется диаграммой функции $f(z)$.

где $\rho_k > 0$ $(k=1, 2, \ldots)$ принадлежит классу (N) в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, ибо

$$\operatorname{Im} \varphi(z) / \operatorname{Im} z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{|z-\alpha_k|^2} > 0.$$

Так как сумму, стоящую коэффициентом при z^p в (22), можно представить, как

$$\varphi_1(z) - \varphi_2(z) + i\varphi_3(z) - i\varphi_4(z),$$

где функции $\varphi_k(z)$ $(k=1, 2, 3, 4)$—указанного выше вида, то эта сумма, а вместе с ней и функция $f^{-1}(z)$, принадлежат классу (N) в каждой из полуплоскостей (полиномы, очевидно, входят в линейное кольцо (N)).

Но если $f^{-1}(z)$ есть функция класса (N) в некоторой полуплоскости, то целая функция $f(z) = 1/f^{-1}(z)$—также класса (N) в этой полуплоскости.

Следовательно, утверждения теоремы вытекают из теоремы 3 *.

З а м е ч а н и е. Очевидно, согласно теореме 3, теорема 4 сохранит силу в предположении, что в разложении (22) функция $R(z)$—не полином, а любая функция типа не выше экспоненциального, удовлетворяющая условию (23); при этом окажется, что $R(z)$—полином степени не выше p. Последнее утверждение станет ясным из рассуждений, которые следуют ниже.

4. Для функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям теоремы 4, индикатриса роста будет иметь вид (21).

Ниже мы приведем еще одну характеристику роста этих функций.

Без ограничения общности можно предположить, что для функции $f(z)$ в разложении (22) $R(z) \equiv 0$, $p=0$, т. е., что

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\alpha_k - z}, \tag{24}$$

где

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

В самом деле, если имеет место разложение (22), то, полагая

$$Q(z) = (z-\beta_1) \cdots (z-\beta_q),$$

где q больше p и степени полинома $R(z)$, а $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_q$ отличны от нулей α_k, мы легко обнаружим, что для функции $f_1(z) = Q(z) f(z)$

* В одной из своих последних работ по теории эрмитовых операторов и проблеме моментов H. L. Hamburger (3) рассматривает целые функции $f(z)$ с вещественными нулями, удовлетворяющие двум условиям:

1) $f(z)$—целая функция конечного рода,

2) для $f(z)$ имеет место разложение (22) при $p=0$, $R(z) \equiv 0$.

Согласно нашей теореме, условие 1) есть следствие условия 2).

$$f_1^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{q} \frac{b_k}{\beta_k - z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k'}{\alpha_k - z},$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k'| < \infty.$$

Пусть, теперь, μ и μ' ($\mu > -\mu'$) — числа, фигурирующие в формуле (21) для индикатрисы $f(z)$.

Рассмотрим функцию $\exp(-i\lambda z) f(z)$, где

$$-\mu' < \lambda < \mu. \tag{25}$$

В силу (22), будем иметь

$$\frac{e^{-i\lambda z}}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k e^{-i\lambda\alpha_k}}{\alpha_k - z} + g(z),$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция.

Левая часть этого равенства, так же как и сумма, стоящая справа, суть функции класса (N) в каждой из двух полуплоскостей. Следовательно, по теореме 3, целая функция $g(z)$ — типа не выше экспоненциального. С другой стороны, согласно (25) и (21),

$$\lim_{r\to\infty} g(re^{i\varphi}) = 0 \text{ при } e^{i\varphi} \neq \pm 1,$$

следовательно, $g(z) \equiv 0$.

Из соображений непрерывности мы заключаем, что вообще *

$$\frac{e^{-i\lambda z}}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k e^{-i\lambda\alpha_k}}{\alpha_k - z} \text{ при } -\mu' \leqslant \lambda \leqslant \mu. \tag{26}$$

Заметим теперь, что индикатриса роста $h(\varphi, f_1)$ функции

$$f_1(z) = \exp\left(i\frac{\mu - \mu'}{2} z\right) f(z)$$

имеет вид

$$h(\varphi, f_1) = \frac{\mu - \mu'}{2} \sin\varphi + h(\varphi, f) = \frac{\mu + \mu'}{2} |\sin\varphi|.$$

---

* Из аналогичных соображений получается, что если индикаторная диаграмма функции $f(z)$ не сводится к точке и содержит в себе индикаторную диаграмму некоторой целой функции $F(z)$, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k F(\alpha_k)}{\alpha_k} \right| < \infty,$$

то

$$\frac{F(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k F(\alpha_k)}{z - \alpha_k}.$$

Но тогда в разложении $f_1(z)$ в бесконечное произведение

$$f_1(z)=ce^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{\frac{z}{\alpha_k}},$$

коэффициент γ вещественен и, следовательно, $f_1(z)$ может отличаться от вещественной функции только постоянным комплексным множителем.

Таким образом, мы доказали, что если некоторая целая функция $f(z)$ допускает представление (24) (или в более общем случае, представление (22)), то она имеет вид

$$f(z)=C\exp(i\nu z)f_1(z)\quad(-\infty<\nu<\infty),$$

где $f_1(z)$ — вещественная целая функция, допускающая представление того же типа.

Предположим поэтому сразу, что $f(z)$—вещественная функция. Тогда $\mu=\mu'$ и из (26) при $\lambda=\mu$ находим

$$\left|\frac{\exp(-\mu iz)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{\omega}{|y|}\quad(y=\operatorname{Im}z).$$

Таким образом, предельное равенство

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r}=\mu|\sin\varphi|\quad(0<|\varphi|<\pi)$$

можно дополнить неравенством

$$|f(z)|\geqslant\frac{1}{\omega}|y|\exp(\mu|y|)\quad(y=r\sin\varphi=\operatorname{Im}z).\tag{27}$$

5. Распределение нулей целых функций экспоненциального типа, удовлетворяющих условию (22), изучалось многими авторами. В частности, N. Levinson ([9]) показал, что для таких функций

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_1(r)}{r}=\lim_{r\to\infty}\frac{n_2(r)}{r}=\frac{\mu}{\pi},\tag{28}$$

где $n_1(r)$ и $n_1(r)$—число нулей функции, не превосходящих по модулю r и лежащих, соответственно, в правой и левой полуплоскостях.

Для функций $f(z)$, допускающих представление (24), мы можем добавить к (28) следующую оценку снизу для $n(r)=n_1(r)+n_2(r)$:

$$\int_0^r\frac{n(\rho)}{\rho}\,d\rho\geqslant\frac{2\mu r}{\pi}+\log r+C,$$

которая немедленно вытекает из (28) и формулы Якоби-Иенсена:

$$\int_0^r\frac{n(\rho)}{\rho}\,d\rho=\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi-\frac{1}{2\pi}\log|f(0)|.$$

§ 4. Обобщение теоремы 4

1. Если отбросить в теореме 4 условие вещественности нулей α_k ($k=1, 2, \ldots$), то она будет неверна. В самом деле, если, например, для некоторой функции $f(z)$ экспоненциального типа имеет место разложение (24), то также *

$$\frac{1}{f(z^2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{2\sqrt{\alpha_k}}\left\{\frac{1}{z-\sqrt{\alpha_k}}-\frac{1}{z+\sqrt{\alpha_k}}\right\}; \tag{29}$$

вместе с тем $f(z^2)$ уже не будет экспоненциального типа. Ввиду этого представляет интерес следующая

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $f(z)$ — целая функция, имеющая простые нули α_k ($k=1, 2, \ldots$), для которых*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\operatorname{Im}\alpha_k|}{|\alpha_k|^2}<\infty. \tag{30}$$

Если при этом

$$\frac{1}{f(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z-\alpha_k}\quad\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{c_k}{\alpha_k}\right|<\infty\right), \tag{31}$$

то $f(x)$ — типа не выше экспоненциального и для $f(z)$ выполняется условие (23).

Доказательство. Разобьем правую часть (31) на две суммы:

$$\frac{1}{f(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k'}{z-\alpha_k'}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_k''}{z-\alpha_k''}=g_1(z)+g_2(z),$$

где

$$\operatorname{Im}\alpha_k>0,\quad \operatorname{Im}\alpha_k''\leqslant 0\quad (k=1, 2, \ldots).$$

Положим

$$b(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z-\alpha_k'}{z-\bar{\alpha}_k'}\cdot\frac{i-\alpha_k'}{i-\alpha_k'}\quad (\operatorname{Im}z>0);$$

в силу (30), это произведение будет сходиться. Если мы теперь покажем, что функция $b(z)/f(z)$ — класса (N) в полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$, то этим самым будет показано, что и функция $f(z)/b(z)$, а значит, и функция $f(z)$, — класса (N) в верхней полуплоскости.

Заметим теперь, что функция $\varphi(z)$ вида

$$\varphi(z)=\sum\frac{\rho_k}{z-\beta_k}, \tag{32}$$

* Отметим кстати, что из разложения (29) и теоремы 4 вытекает, что если в (22) или в (24) все $\alpha_k>0$ ($k=1, 2, \ldots$), то

$$\limsup_{|z|\to\infty}\frac{\log|f(z)|}{\sqrt{|z|}}<\infty.$$

где $\rho_k > 0$, $\operatorname{Im}\beta_k < 0$ $(k=1, 2, \ldots)$, $\sum \frac{\rho_k}{|\beta_k|} < \infty$, есть функция класса (N) в верхней полуплоскости, ибо

$$-\operatorname{Im}\varphi(z) = \sum \frac{\rho_k \operatorname{Im}(z-\beta_k)}{|z-\beta_k|^2} \geqslant 0.$$

Так как функция $g_2(z)$ очевидным образом может быть представлена в виде линейной комбинации четырех функций φ_j $(j=1, 2, 3, 4)$ указанного типа, то $g_2(z)$, а с ней и $b(z)\, g_2(z)$, — класса (N) в верхней полуплоскости.

Для исследования произведения $b(z)\, g_1(z)$ представим каждый коэффициент c_k' в виде суммы

$$c_k' = c_k^{(1)} - c_k^{(2)} + ic_k^{(3)} - ic_k^{(4)} \quad (k=1, 2, \ldots),$$

где

$$c_k^{(1)} c_k^{(2)} = 0, \quad c_k^{(3)} c_k^{(4)} = 0, \; c_k^{(j)} b'(\alpha_k) \geqslant 0 \; * \; (k=1, 2, \ldots; \; j=1, 2, 3, 4);$$

соответственно этому разбиению будем иметь

$$g_1(z) = g^{(1)}(z) - g^{(2)}(z) + g^{(3)}(z) - g^{(4)}(z),$$

$$g^{(j)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^{(j)}}{z - \alpha_k'} \quad (j=1, 2, 3, 4).$$

Покажем, что каждая из функций $g^{(j)}(z)\, b(z)$ $(j=1, 2, 3, 4)$ есть функция класса (N) в верхней полуплоскости. Для этого положим

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\alpha_k'}{z-\bar{\alpha}_k'} \cdot \frac{i-\bar{\alpha}_k'}{i-\alpha_k'} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

и представим каждый коэффициент c_k' $(k=1, 2, \ldots, n)$ в виде суммы

$$c_k' = c_{kn}^{(1)} - c_{kn}^{(2)} + ic_{kn}^{(3)} - ic_{kn}^{(4)} \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\begin{gathered} c_{kn}^{(1)} c_{kn}^{(2)} = 0, \quad c_{kn}^{(3)} c_{kn}^{(4)} = 0, \quad c_{kn}^{(j)} b'(\alpha_k) \geqslant 0 \\ (k=1, 2, \ldots, n; \; j=1, 2, 3, 4). \end{gathered} \tag{33}$$

Пусть

$$g_n^{(j)}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{kn}^{(j)}}{z-\alpha_k'} \quad (j=1, 2, 3, 4; \; n=1, 2, \ldots).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} b_n'(\alpha_k') = b'(\alpha_k') \quad (k=1, 2, \ldots),$$

то

---

* $b'(\alpha) = \dfrac{db(\alpha)}{d\alpha}$.

$$\lim_{n\to\infty} c_{kn}^{(j)} = c_k^{(j)} \quad (k=1, 2, \ldots; \ j=1, 2, 3, 4).$$

Учитывая, что

$$|c_k^{(j)}| \leqslant |c_k| \quad (k=1, 2, \ldots; \ j=1, 2, 3, 4)$$

и

$$|c_{kn}^{(j)}| \leqslant |c_k| \quad (k=1, 2, \ldots, n; \ j=1, 2, 3, 4; \ n=1, 2, \ldots),$$

мы получаем

$$\lim g_n^{(j)}(z) = g^{(j)}(z) \quad (j=1, 2, 3, 4; \ z \neq \alpha_k; \ k=1, 2, \ldots),$$

а следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} b_n(z)\, g_n^{(j)}(z) = b(z)\, g^{(j)}(z) \quad (j=1, 2, 3, 4; \ \operatorname{Im} z > 0).$$

С другой стороны,

$$b_n(z)\, g_n^{(j)}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{kn}^{(j)} b'_n(\alpha_k)}{z - \alpha'_k}$$

и, следовательно, согласно (33), того же типа, что и функция $\varphi(z)$ вида (32). Таким образом, при $\operatorname{Im} z > 0$

$$\operatorname{Im}(b_n(z)\, g_n^{(j)}(z)) \leqslant 0 \quad (n=1, 2, \ldots; \ j=1, 2, 3, 4),$$

а значит и

$$\operatorname{Im}(b(z)\, g^{(j)}(z)) \leqslant 0 \quad (j=1, 2, 3, 4; \ \operatorname{Im} z > 0).$$

Отсюда функции $b(z)\, g^{(j)}(z)$ $(j=1, 2, 3, 4)$, а с ними и функции $b(z)\, g_1(z)$, $b(z)\, g_1(z) + b(z)\, g_2(z) = b(z)/f(z)$—класса (N) в верхней полуплоскости.

Мы доказали, что $f(z)$ есть функция класса (N) в верхней полуплоскости. Аналогично показывается, что $f(z)$—класса (N) в нижней полуплоскости. После этого остается вспомнить теорему 3, чтобы убедиться в справедливости теоремы 5.

Поступило
22. XI. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крейн М., Об одном замечательном классе эрмитовых операторов, Доклады Ак. Наук СССР, т. 44 (5) (1944), 191—195.

[2] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, гл. VII, §§ 1—3, ОГИЗ, 1941.

[3] Привалов И. И., Граничные свойства однозначных аналитических функций, изд. МГУ, Москва, 1941.

[4] Smirnoff V., Sur les valeurs limites des fonctions, régulières à l'intérieur d'un cercle, Журнал Ленинградск. физ.-матем об ва, т. II (1929), 22—37.
[5] Полиа Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, ч. I, М.—Л., 1937.
[6] Polya G., Über die Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Zeitschr., Bd. 29 (1929), 549—640.
[7] Гельфонд А. О., Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка, Успехи матем. наук, III (1937), 148—151.
[8] Hamburger H. L., Hermitian Transformations of defficiency-index (1, 1), Jacobi Matrices and undetermined moment problems, Amer. Journal of Mathem., vol. LXVI, 4 (1944), 489—522.
[9] Levinson N., Gap and density theorems, Amer. Mathem. Soc. Colloquium Publications, v. XXVI (1940), 13.

M. KREIN. A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF ENTIRE FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE

SUMMARY

Herein are given some characteristics of a class of entire functions of exponential type, which were used by the author in the construction of the theory of Hermitian operators with deficiency-index (1,1) and its application to the generalized moment problem.

A function $f(z)$ analytic in an open region G is said to be of the class (N) in G if the function $\overset{+}{\log}|f(z)|$ has a harmonic majorant in G.

THEOREM A. *In order that an entire function* $f(z)$ *should be of the class* (N) *in either of the half-planes* $\operatorname{Im} z > 0$ *or* $\operatorname{Im} z < 0$, *it is necessary and sufficient that*:

1) $$\limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty,$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|f(x)|\,dx}{1+x^2} < \infty.$$

Theorem A has the following corollary:

THEOREM B*. *Let* $f(z)$ *be an entire function such that*

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z - z_k} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{c_k}{z_k}\right| < \infty\right) \tag{*}$$

where

* In a recent paper H. L. Hamburger [8] considers also in connection with the theory of Hermitian operators with deficiency-index (1,1) the entire functions with only real zeros, for which (*) holds and which are required to be of finite order. Our theorem shows that the second condition is a consequence of the first one.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{Im} \alpha_k|}{|\alpha_k|^2} < \infty,$$

then $f(z)$ satisfies the two conditions of theorem A.

Theorem B remains true if (*) is replaced by

$$\frac{1}{f(z)} = R(z) + z^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z - \alpha_k} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{\alpha_k} \right| < \infty \right),$$

where $R(z)$ is a polynomial.

Some characteristics for the growth of entire functions $f(z)$ satisfying the conditions of theorem B, are given.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 327–344 Série mathématique

М. А. НАЙМАРК

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В статье рассматривается критерий экстремальности спектральной функции и некоторые его применения.

Настоящая статья* является продолжением ряда работ автора по теории спектральных функций [см. (2), (3), (4), (5)] и предполагает знакомство с этими работами.

Напомним, что функция $B(\lambda)$, определенная для любого действительного λ, называется *спектральной функцией* данного симметрического оператора H, если выполнены следующие условия:

1° для любого действительного λ $B(\lambda)$ есть ограниченный позитивный оператор;

2° для любого элемента f гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, в котором рассматриваются H и $B(\lambda)$, $(B(\lambda)f, f)$ не убывает при возрастании λ;

3° для любого $f \in \mathfrak{H}$ $B(\lambda)f$ есть непрерывная слева в смысле нормы элемента функция λ;

4° для любого $f \in \mathfrak{H}$ $B(\lambda)f \to 0$ при $\lambda \to -\infty$ и $B(\lambda)f \to f$ при $\lambda \to +\infty$, причем эти предельные соотношения рассматриваются в смысле нормы элемента;

5° для любого конечного интервала $\Delta = (\alpha, \beta)$ и любого элемента $f \in \mathfrak{H}$ элемент

$$B(\Delta)f = B(\beta)f - B(\alpha)f$$

принадлежит области определения H^* и

$$H^* B(\Delta)f = \int_\Delta \lambda \, dB(\lambda) f.$$

Спектральная функция называется *ортогональной*, если $B(\lambda)$ есть проекционный оператор при любом действительном значении λ. Если оператор H — самосопряженный, то он имеет только одну спектральную функцию и эта функция ортогональна.

* Краткое изложение результатов этой статьи дано в (1).

Обратно, всякая ортогональная функция однозначно определяет самосопряженный оператор H.

Если же оператор H несамосопряженный, то он имеет неортогональные спектральные функции.

Как было показано в ([3]), все эти спектральные функции можно получить, расширяя оператор H до самосопряженного оператора H' в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}'$, содержащем исходное пространство $\mathfrak{H}$, и проектируя ортогональную спектральную функцию такого расширения на исходное пространство.

При этом можно ограничиться *минимальными* расширениями, т. е. такими операторами H', которые не приводятся ни пространством $\mathfrak{H}$, ни любым его подпространством, отличным от (0).

Спектральные функции данного симметрического оператора образуют, очевидно, выпуклое множество. Это означает, что если $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ — две спектральные функции симметрического оператора H, то функция

$$B(\lambda) = \rho_1 B_1(\lambda) + \rho_2 B_2(\lambda)$$

при условии $\rho_1 \geqslant 0$, $\rho_2 \geqslant 0$, $\rho_1 + \rho_2 = 1$ также является спектральной функцией этого оператора.

Пользуясь геометрической терминологией, можно сказать, что при фиксированных $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ функция $B(\lambda)$ пробегает отрезок, концами которого являются $B_1(\lambda)$ и $B_2(\lambda)$, а внутренние точки которого получаются при $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$.

Спектральную функцию $B(\lambda)$ оператора H назовем *экстремальной*, если она не является внутренней точкой никакого отрезка, т. е. если ее нельзя представить в виде

$$B(\lambda) = \rho_1 B_1(\lambda) + \rho_2 B_2(\lambda),$$

где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, а $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ — различные спектральные функции того же оператора H.

Целью настоящей статьи является получение некоторых критериев экстремальности спектральных функций в терминах самосопряженных расширений. Эти критерии применяются затем в качестве примера к так называемым конечномерным расширениям.

Кроме того, отсюда получается один результат для неопределенного случая степенной проблемы моментов в интервале $(-\infty, \infty)$.

§ 1. Общий критерий экстремальности спектральной функции

Согласно данному выше определению, спектральная функция $B(\lambda)$ данного симметрического оператора не является экстремальной, если она представима в виде

$$B(\lambda) = \rho_1 B_1(\lambda) + \rho_2 B_2(\lambda),$$

где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\rho_1 + \rho_2 = 1$ и $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ — различные спектральные функции того же оператора. Следующая теорема показывает, что это условие можно ослабить.

ТЕОРЕМА 1. *Если при* $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\rho_1 + \rho_2 = 1$ *функция*

$$B(\lambda) = \rho_1 B_1(\lambda) + \rho_2 B_2(\lambda)$$

есть спектральная функция симметрического оператора H *и если* $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ — *операторные функции, удовлетворяющие только условиям* 1°—4° *определения спектральной функции, то* $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ — *также спектральные функции данного симметрического оператора* H.

Доказательство. Пусть $E(\lambda)$, $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$ — ортогональные спектральные функции в пространстве $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$, проекции которых на $\mathfrak{H}$ равны, соответственно, $B(\lambda)$, $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$, так что, обозначая через P оператор проектирования в $\mathfrak{H}'$ на $\mathfrak{H}$, для любого $f \in \mathfrak{H}$ имеем:

$$B(\lambda) f = PE(\lambda) f, \quad B_1(\lambda) f = PE_1(\lambda) f, \quad B_2(\lambda) f = PE_2(\lambda) f. \tag{1}$$

Пусть, далее, H', H_1, H_2 — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}'$, спектральными функциями которых являются, соответственно, $E(\lambda)$, $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$.

Для любого $f \in \mathfrak{D}(H)$ сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^3 d(E(\lambda) f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E(\lambda) f, Pf) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(PE(\lambda) f, f) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(B(\lambda) f, f) = \rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(B_1(\lambda) f, f) + \rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(B_2(\lambda) f, f) =$$
$$= \rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_1(\lambda) f, f) + \rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_2(\lambda) f, f). \tag{2}$$

Но тогда сходятся также интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_1(\lambda) f, f), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_2(\lambda) f, f),$$

следовательно, элемент f принадлежит области определения H_1 и H_2. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E(\lambda) f, f) = |H'f|^2, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_1(\lambda) f, f) = |H_1 f|^2,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_2(\lambda) f, f) = |H_2 f|^2;$$

поэтому равенство (2) перепишется в виде

$$|H'f|^2 = \rho_1 |H_1 f|^2 + \rho_2 |H_2 f|^2. \tag{3}$$

С другой стороны, для $f \in \mathfrak{D}(H)$ имеем: $Hf \in \mathfrak{H}$. Поэтому

$$Hf = H'f = PH'f = P \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda) f = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dB(\lambda) f = \rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dB_1(\lambda) f +$$
$$+ \rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dB_2(\lambda) f = P\left[\rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_1(\lambda) f + \rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_2(\lambda) f\right] =$$
$$= \rho_1 PH_1 f + \rho_2 PH_2 f, \tag{4}$$

где интегралы следует рассматривать в смысле сходимости по норме элементов в $\mathfrak{H}'$.

Из (4) следует, что

$$|Hf|^2 = \rho_1^2 |PH_1 f|^2 + \rho_2^2 |PH_2 f|^2 + \rho_1\rho_2 (PH_1 f, PH_2 f) + \\ + \rho_2\rho_1 (PH_2 f, PH_1 f). \qquad (4a)$$

С другой стороны, принимая во внимание очевидные равенства

$$|PH_1 f|^2 + |(1-P) H_1 f|^2 = |H_1 f|^2,$$
$$|PH_2 f|^2 + |(1-P) H_2 f|^2 = |H_2 f|^2,$$

мы можем переписать (3) в виде

$$|Hf|^2 = \rho_1 |(1-P) H_1 f|^2 + \rho_2 |(1-P) H_2 f|^2 + \rho_1 |PH_1 f|^2 + \rho_2 |PH_2 f|^2. \qquad (5)$$

Вычитая из (5) равенство (4a) и пользуясь соотношениями

$$\rho_1 - \rho_1^2 = \rho_1 (1-\rho_1) = \rho_1\rho_2, \quad \rho_2 - \rho_2^2 = \rho_2 (1-\rho_2) = \rho_1\rho_2, \qquad (6)$$

получим

$$0 = \rho_1 |(1-P) H_1 f|^2 + \rho_2 |(1-P) H_2 f|^2 + \rho_1\rho_2 |PH_1 f|^2 + \rho_1\rho_2 |PH_2 f|^2 - \\ - \rho_1\rho_2 (PH_1 f, PH_2 f) - \rho_1\rho_2 (PH_2 f, PH_1 f),$$

т. е.

$$\rho_1 |(1-P) H_1 f|^2 + \rho_2 |(1-P) H_2 f|^2 + \rho_1\rho_2 |P(H_1 - H_2) f|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что порознь

$$(1-P) H_1 f = 0, \quad (1-P) H_2 f = 0, \quad P(H_1 - H_2) f = 0. \qquad (7)$$

Первые два равенства в (7) означают, что

$$PH_1 f = H_1 f, \quad PH_2 f = H_2 f, \qquad (8)$$

т. е. что $H_1 f \in \mathfrak{H}$, $H_2 f \in \mathfrak{H}$. Тогда третье равенство в (7) дает

$$H_1 f = H_2 f.$$

Подставляя в (4) $H_1 f$ вместо $PH_1 f$ и $PH_2 f$, получим

$$Hf = \rho_1 H_1 f + \rho_2 H_1 f = (\rho_1 + \rho_2) H_1 f = H_1 f,$$

т. е. H_1 есть расширение оператора H. Аналогично, H_2 есть также расширение оператора H. Но тогда [см. ([3]), теорема 5] $B_1(\lambda)$ и $B_2(\lambda)$ — спектральные функции оператора H и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $B(\lambda)$ — спектральная функция симметрического оператора H в пространстве $\mathfrak{H}$ и пусть оператор H' в пространстве $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$ есть минимальное самосопряженное расширение H, определяющее $B(\lambda)$.*

Функцию $B(\lambda)$ можно представить в виде

$$B(\lambda) = \rho_1 B_1(\lambda) + \rho_2 B_2(\lambda),$$

где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\rho_1 + \rho_2 = 1$, а $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ различны и удовлетворяют условиям $1^\circ - 4^\circ$ тогда и только тогда, когда существует ограничен-

ный позитивный эрмитов оператор A в $\mathfrak{H}'$, коммутирующий с H', неприводимый пространством $\mathfrak{H}$ и удовлетворяющий условию

$$(Af, g) = (f, g) \text{ для всех } f, g \in \mathfrak{H}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть имеет место представление

$$B(\lambda) = \rho_1 B_1(\lambda) + \rho_2 B_2(\lambda),$$

где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\rho_1 + \rho_2 = 1$, $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ различны и удовлетворяют условиям $1^\circ - 4^\circ$. Из условий 1° и 2° следует, что для любого интервала Δ

$$(B(\Delta) f, f) = \rho_1 (B_1(\Delta) f, f) + \rho_2 (B_2(\Delta) f, f) \geqslant \rho_1 (B_1(\Delta) f, f),$$

следовательно,

$$(B_1(\Delta) f, f) \leqslant \frac{1}{\rho_1} (B(\Delta) f, f). \tag{10}$$

Пусть $E(\lambda)$ — спектральная функция H'. В силу минимальности H', пространство $\mathfrak{H}'$ есть замыкание совокупности всех конечных сумм вида

$$f = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) f_k, \tag{11}$$

в которых Δ_k — произвольные непересекающиеся интервалы (конечные или бесконечные), а f_k — произвольные элементы $\mathfrak{H}$.

Для двух таких элементов

$$f = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) f_k, \quad g = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) g_k$$

путем раздробления интервалов Δ_k и введения элементов f_k, g_k, равных нулю, мы можем добиться того, чтобы в обеих суммах интервалы Δ_k были, соответственно, одинаковыми. Тогда для их скалярного произведения (f, g) имеем

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{n} (E(\Delta_k) f_k, g_k) = \sum_{k=1}^{n} (E(\Delta_k) f_k, Pg_k) = \sum_{k=1}^{n} (B(\Delta_k) f_k, g_k). \tag{12}$$

Положим для этих элементов f, g

$$(f, g)_1 = \sum_{k=1}^{n} (B_1(\Delta_k) f_k, g_k). \tag{13}$$

В силу неравенства (10),

$$(f, f)_1 = \sum_{k=1}^{n} (B_1(\Delta_k) f_k, g_k) \leqslant \frac{1}{\rho_1} \sum_{k=1}^{n} (B(\Delta_k) f_k, f_k) \leqslant \frac{1}{\rho_1} (f, f), \tag{14}$$

следовательно, форма $(f, g)_1$ не зависит от выбора представления (11) для f и g,

Из неравенства (14) следует также, что форму $(f, g)_1$ можно по непрерывности доопределить на все $f, g \in \mathfrak{H}'$, причем неравенство (14) будет иметь место также для всех $f, g \in \mathfrak{H}'$. Но тогда существует ограниченный позитивный эрмитов оператор A в $\mathfrak{H}$ такой, что

$$(f, g)_1 = (Af, g) \tag{15}$$

для всех $f, g \in \mathfrak{H}'$.

Для

$$f = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) f_k, \quad g = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) g_k, \quad f_k, g_k \in \mathfrak{H}$$

имеем

$$(E(\Delta) f, g) = \sum_{k=1}^{n} (E(\Delta\Delta_k) f_k, g_k) = \sum_{k=1}^{n} (B(\Delta\Delta_k) f_k, g_k),$$

следовательно,

$$(E(\Delta) f, g)_1 = \sum_{k=1}^{n} (B_1(\Delta\Delta_k) f_k, g_k) \tag{16}$$

и, аналогично,

$$(f, E(\Delta) g)_1 = \sum_{k=1}^{n} (B_1(\Delta\Delta_k) f_k, g_k). \tag{17}$$

Поэтому

$$(f, E(\Delta) g)_1 = (E(\Delta) f, g)_1. \tag{18}$$

По непрерывности это равенство имеет место для всех $f, g \in \mathfrak{H}$ и, в силу (15), его можно переписать в виде

$$(Af, E(\Delta) g) = (AE(\Delta) f, g),$$

т. е.

$$(E(\Delta) Af, g) = (AE(\Delta) f, g). \tag{19}$$

Это означает, что $E(\Delta) A = AE(\Delta)$, т. е. что A коммутирует со всеми $E(\Delta)$. Поэтому A коммутирует также с H'.

Пусть $f, g \in \mathfrak{H}$. Полагая в (16) $n = 1$, $f_1 = f$, $g_1 = g$, $\Delta_1 = (-\infty, \infty)$, получаем

$$(E(\Delta) f, g)_1 = (B_1(\Delta) f, g), \tag{20}$$

и, следовательно, в силу (15),

$$(AE(\Delta) f, g) = (B_1(\Delta) f, g). \tag{21}$$

В частности, при $\Delta = (-\infty, \infty)$ получаем

$$(Af, g) = (f, g) \text{ для всех } f, g \in \mathfrak{H}. \tag{22}$$

Если $\mathfrak{H}$ приводит A, то из (22) следует, что $A = 1$ на $\mathfrak{H}$, откуда, в силу (21),

$(B_1(\Delta) f, g) = (E(\Delta) f, Ag) = (E(\Delta) f, g) = (B(\Delta) f, g)$ для всех $f, g \in \mathfrak{H}$.

Это равенство означает, что $B_1(\Delta) = B(\Delta)$ в противоречии с условием теоремы.

Таким образом, существование оператора A, удовлетворяющего всем перечисленным условиям, доказано.

Пусть, обратно, такой оператор A существует. Так как A и $E(\lambda)$ коммутируют, то равенство

$$(B(\lambda) f, g) = (AE(\lambda) f, g) \quad (f, g \in \mathfrak{H}) \tag{23}$$

определяет позитивный ограниченный эрмитов оператор $B_1(\lambda)$; легко видеть, что он удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3°. Что касается условия 4°, то оно легко получается из аналогичного свойства $E(\lambda)$ и равенства (9).

Пусть M — верхняя граница A. В силу условия (9), $M \geqslant 1$. Пусть, далее, M' — любое число, большее M. Положим

$$A' = \frac{1}{M'-1}(M' - A).$$

Оператор A' также позитивен, коммутирует с H' и для $f, g \in \mathfrak{H}$

$$(A'f, g) = \frac{1}{M'-1}[M'(f, g) - (Af, g)] = \frac{1}{M'-1}[M'(f, g) - (f, g)] = (f, g),$$

т. е. A' также удовлетворяет условию (9). Поэтому равенство

$$(B_2(\lambda) f, g) = (A'E(\lambda) f, g) \quad (f, g \in \mathfrak{H}) \tag{24}$$

определяет функцию $B_2(\lambda)$, удовлетворяющую условиям $1^\circ - 4^\circ$.

Положим теперь

$$\rho_1 = \frac{1}{M'}, \quad \rho_2 = \frac{M'-1}{M'}.$$

Очевидно, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ и $\rho_1 + \rho_2 = 1$. Для $f, g \in \mathfrak{H}$ имеем

$$\rho_1(B_1(\lambda) f, g) + \rho_2(B_2(\lambda) f, g) = \frac{1}{M'}(AE(\lambda) f, g) + \frac{M'-1}{M'}(A'E(\lambda) f, g) =$$
$$= \frac{1}{M'}(AE(\lambda) f, g) + \frac{M'-1}{M'}\left(\frac{M'-A}{M'-1}E(\lambda) f, g\right) = (E(\lambda) f, g) =$$
$$= (E(\lambda) f, Pg) = (B(\lambda) f, g),$$

откуда

$$\rho_1 B_1(\lambda) + \rho_2 B_2(\lambda) = B(\lambda).$$

Остается доказать, что $B_1(\lambda) \not\equiv B(\lambda)$ и $B_2(\lambda) \not\equiv B(\lambda)$.

Пусть, например, $B_1(\lambda) \equiv B(\lambda)$. Тогда для

$$f = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) f_k, \quad g = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) g_k$$

имеем

$$(f, g)_1 = \sum_{k=1}^{n} (B_1(\Delta_k) f_k, g_k) = \sum_{k=1}^{n} (B(\Delta_k) f_k, g_k) = (f, g),$$

откуда следует, что $A \equiv 1$. Но тогда, конечно, $\mathfrak{H}$ приводит A, что противоречит условию.

Таким образом, $B_1(\lambda) \not\equiv B(\lambda)$ и теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть H, $B(\lambda)$, $\mathfrak{H}$, H', $\mathfrak{H}'$ — те же, что и в теореме 2. Функция $B(\lambda)$ экстремальна тогда и только тогда, когда всякий позитивный эрмитов оператор A, коммутирующий с H' и удовлетворяющий условию $(Af, g) = (f, g)$ для всех $f, g \in \mathfrak{H}$, приводится пространством $\mathfrak{H}$.*

Это следствие является простой перефразировкой теоремы 2.

Следствие 2. *Если $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$, то $B(\lambda)$ экстремальна.*

В самом деле, тогда A — оператор в $\mathfrak{H}$, а потому тривиальным образом приводится пространством $\mathfrak{H}$.

Замечания: 1. *Для оператора A, удовлетворяющего условиям следствия 1, приводимость пространством $\mathfrak{H}$ эквивалентна равенству $A \equiv 1$.*

В самом деле, если это равенство выполняется, то, очевидно, $\mathfrak{H}$ приводит A. Обратно, если $\mathfrak{H}$ приводит A, то из (9) следует, что $Af = f$ для $f \in \mathfrak{H}$. Но тогда для $f, g \in \mathfrak{H}$

$$(B_1(\lambda) f, g) = (AE(\lambda) f, g) = (E(\lambda) A f, g) = (E(\lambda) f, g) = (B(\lambda) f, g),$$

т. е.

$$B_1(\lambda) = B(\lambda).$$

Отсюда, как и в конце доказательства теоремы 2, следует, что $(f, g)_1 = (f, g)$ для всех $f, g \in \mathfrak{H}$ и, следовательно, $A \equiv 1$.

2. *Из существования ограниченного оператора A, коммутирующего с H', неприводимого пространством $\mathfrak{H}$ и удовлетворяющего условию (9), следует существование ограниченного позитивного эрмитова оператора A', обладающего теми же свойствами.*

В самом деле, если A коммутирует с H', то A^* также коммутирует с H', следовательно, эрмитовы операторы $A_1 = \frac{A + A^*}{2}$ и $A_2 = \frac{A - A^*}{2i}$ также коммутируют с H'.

Далее, если $(Af, g) = (f, g)$ для $f, g \in \mathfrak{H}$, то

$$(A^* f, g) = (f, Ag) = (\overline{Ag, f}) = (\overline{g, f}) = (f, g). \tag{25}$$

Отсюда

$$(A_1 f, g) = \frac{1}{2}\left[(Af, g) + (A^* f, g)\right] = (f, g) \tag{26}$$

и

$$(A_2 f, g) = \frac{1}{2i}\left[(Af, g) - (A^* f, g)\right] = 0. \tag{27}$$

Операторы $A_1 + A_2$ и $A_1 - A_2$ также эрмитовы и коммутируют с H'; кроме того, в силу (26) и (27),

$$((A_1 + A_2) f, g) = (f, g), \quad ((A_1 - A_2) f, g) = (f, g), \tag{28}$$

т. е. $A_1 + A_2$ и $A_1 - A_2$ удовлетворяют условию (9).

Наконец, по крайней мере один из операторов $A_1 + A_2$, $A_1 - A_2$ не приводится пространством $\mathfrak{H}$. В самом деле, если $\mathfrak{H}$ приводит оба эти оператора, то оно приводит также A_1 и A_2, а значит и $A = A_1 + iA_2$, что противоречит условию.

Итак, существует ограниченный эрмитов оператор ($A_1 + A_2$ или $A_1 - A_2$), также обладающий всеми перечисленными свойствами. Обозначим этот оператор через A. Пусть M — верхняя граница A;

тогда, очевидно, оператор $\frac{1}{M-1}(M-A)$ позитивен и обладает теми же свойствами, что и оператор A.

§ 2. Случай конечномерных расширений

Пусть H — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, H' — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$ и пусть H' — расширение оператора H. Это расширение назовем *конечномерным*, если ортогональное дополнение $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}' - \mathfrak{H}$ конечномерно.

В этом параграфе мы рассмотрим те спектральные функции, которые соответствуют конечномерным расширениям.

Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА. *Если H' — конечномерное минимальное самосопряженное расширение оператора H и $\mathfrak{D}(H') \cdot \mathfrak{H}_2 = (0)$, то H' определяет экстремальную функцию оператора H.*

Доказательство. Согласно общей теории расширений, в случае $\mathfrak{D}(H') \cdot \mathfrak{H}_2 = (0)$ [см. ([3]), теорема 3] область определения H' состоит из элементов вида

$$f = g - \varphi_1 + V_{11}\varphi_1 + V_{12}\varphi_2 + V_{21}\varphi_1 + V_{22}\varphi_2, \tag{29}$$

где $g \in \mathfrak{D}(H)$, φ_1, φ_2 — произвольные элементы дефектных подпространств $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$, $\mathfrak{M}_\lambda$ оператора H, а $\| V_{jk} \|_{j,\,k=1,\,2}$ — матрица из операторов, которая задает изометрический оператор V, отображающий $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}} + \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{M}_\lambda + \mathfrak{H}_2$.

При этом из $V_{12}\varphi_2 = 0$ следует $\varphi_2 = 0$, так что V_{12} отображает $\mathfrak{H}_2$ взаимно однозначно на некоторое замкнутое подпространство $\mathfrak{M}_\lambda$.

Введем обозначения:

$$\overline{\mathfrak{M}}_\lambda = V_{12}\mathfrak{H}_2, \quad \mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda - \overline{\mathfrak{M}}_\lambda. \tag{30}$$

Очевидно, $V_{12}^*\mathfrak{N}_\lambda = 0$, следовательно, для $f \in \mathfrak{N}_\lambda$ имеем

$$V^*f = V_{12}^*f + V_{11}^*f = V_{11}^*f, \tag{31}$$

т. е. V^* изометрически отображает $\mathfrak{N}_\lambda$ на некоторое подпространство $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$. Положим

$$\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = V^*\mathfrak{N}_\lambda, \quad \overline{\mathfrak{M}}_{\bar{\lambda}} = \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}} - \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}. \tag{32}$$

Очевидно

$$V\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = \mathfrak{N}_\lambda. \tag{33}$$

Оператор V, рассматриваемый только как отображение $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ на $\mathfrak{N}_\lambda$, определяет замкнутое симметрическое расширение $\overline{H}$ оператора H. Оператор H', в свою очередь, является, очевидно, расширением оператора $\overline{H}$; поэтому в дальнейшем вместо H можно рассматривать $\overline{H}$.

Очевидно также, что дефектными подпространствами $\overline{H}$ будут $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{\lambda}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$.

Для размерностей подпространств мы имеем, в силу (30),

$$\dim \overline{\mathfrak{M}}_\lambda = \dim \mathfrak{H}_2.$$

Кроме того, очевидно,

$$\dim (\overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda} + \mathfrak{H}_2) = \dim (\overline{\mathfrak{M}}_\lambda + \mathfrak{H}_2).$$

Таким образом, в силу конечномерности $\mathfrak{H}_2$,

$$\dim \overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda} = \dim \overline{\mathfrak{M}}_\lambda = \dim \mathfrak{H}_2. \tag{34}$$

Из (30) следует, что также

$$V_{12}^* \overline{\mathfrak{M}}_\lambda = \mathfrak{H}_2. \tag{35}$$

В частности,

$$\text{из } V_{12}^* \psi_1 = 0, \ \psi_1 \in \overline{\mathfrak{M}}_\lambda \text{ следует } \psi_1 = 0. \tag{36}$$

Докажем, что

$$\text{из } V_{21} \varphi_1 = 0, \ \varphi_1 \in \mathfrak{M}_{\bar\lambda} \text{ следует } \varphi_1 = 0. \tag{37}$$

Пусть $V_{21}\varphi_1 = 0$, $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_{\bar\lambda}$. Тогда из

$$V\varphi_1 = V_{11}\varphi_1 + V_{21}\varphi_1 = V_{11}\varphi_1$$

следует, что $V\varphi_1 \in \mathfrak{M}_\lambda$.

Положим $\psi_1 = V\varphi_1$, следовательно, $V^*\psi_1 = \varphi_1$. Мы имеем тогда

$$V^*\psi_1 = V_{11}^*\psi_1 + V_{12}^*\psi_1 = V_{11}^*\psi_1,$$

следовательно, $V_{12}^*\psi_1 = 0$. В силу (36), $\psi_1 = 0$, а значит и $\varphi_1 = 0$. Доказанное соотношение (37) вместе с (34) дает

$$V_{21} \overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda} = \mathfrak{H}_2, \quad V_{21}^* \mathfrak{H}_2 = \overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}. \tag{38}$$

Пусть, теперь, U' — трансформация Кели оператора H'. Тогда U' — унитарный оператор в $\mathfrak{H}'$, коммутирующий с A. Операторам U' и A соответствуют матрицы:

$$U' \sim \begin{Vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{Vmatrix}, \quad A \sim \begin{Vmatrix} 1 & B \\ B^* & C \end{Vmatrix},$$

где U_{jk} — оператор из $\mathfrak{H}_k$ в $\mathfrak{H}_j$ ($j, k = 1, 2$; $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$), 1 — единичный оператор в $\mathfrak{H}$ [см. условие (9)], B — оператор из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}$, C — оператор в $\mathfrak{H}_2$.

Из условия коммутативности U' и A найдем, в частности, что

$$U_{11} + U_{12}B^* = U_{11} + BU_{21},$$

т. е. что

$$U_{12}B^* = BU_{21}. \tag{39}$$

Так как на $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda} + \mathfrak{H}_2$ оператор U' совпадает с V, то на $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda} + \mathfrak{H}_2$ операторы U_{21} и U_{12} совпадают, соответственно, с V_{21} и V_{12}. Аналогичное обстоятельство имеет место и для U_{21}^*, U_{12}^*, V_{21}^*, V_{12}^*.

Применим теперь обе части равенства (39) к $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}$. В силу (38) и только что сказанного, получим

$$U_{12}B^*\overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda} = B\mathfrak{H}_2,$$

следовательно,

$$B\mathfrak{H}_2 \subset \overline{\mathfrak{M}}_\lambda. \tag{40}$$

Далее, возьмем * от обеих частей (39); мы получим

$$BU^*_{12} = U^*_{21}B^*. \tag{41}$$

Применяя обе части (41) к $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ и учитывая (35), придем к равенству

$$B\mathfrak{H}_2 = U^*_{21}B^*\overline{\mathfrak{M}}_\lambda,$$

откуда

$$B\mathfrak{H}_2 \subset \overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}. \tag{42}$$

Из (40) и (42) следует, что

$$B\mathfrak{H}_2 \subset \overline{\mathfrak{M}}_\lambda \cdot \overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}. \tag{43}$$

Но $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ и $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}$, как дефектные пространства симметрического оператора $\overline{H}$, линейно независимы, так что их пересечение $=(0)$. Поэтому (43) означает, что $B\equiv 0$. Таким образом, матрица A приобретает вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{Vmatrix},$$

т. е. $\mathfrak{H}$ приводит A.

Итак, всякий ограниченный эрмитов оператор A, коммутирующий с H' и удовлетворяющий условию (9), приводится пространством $\mathfrak{H}_2$. В силу следствия 1, спектральная функция, определяемая оператором H', экстремальна.

ТЕОРЕМА 3. *Всякое конечномерное расширение H' замкнутого симметрического оператора H определяет экстремальную спектральную функцию.*

Доказательство. Пусть A — ограниченный эрмитов оператор, коммутирующий с H' и удовлетворяющий условию (9). Оператор H' можно, очевидно, считать минимальным. Требуется доказать, что $\mathfrak{H}$ приводит A.

Согласно общей теории расширений [см. ([3]), теорема 3], область определения H' состоит из элементов f вида

$$f = f_1 - \varphi_1 + V_{11}\varphi_1 + V_{12}\varphi_2 + f_2 - \varphi_2 + V_{21}\varphi_1 + V_{22}\varphi_2, \tag{44}$$

где $f_1 \in \mathfrak{D}(H_1)$, $f_2 \in \mathfrak{D}(H')\,\mathfrak{H}_2$, $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_{\bar\lambda}$, $\varphi_2 \in \overset{2}{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}$ и $\overset{2}{\mathfrak{M}}_\lambda$ — дефектное подпространство оператора H_2 в $\mathfrak{H}_2$, определенного в $\mathfrak{D}(H')\cdot\mathfrak{H}_2$ и равного там H'.

Далее, $\|V_{jk}\|_{j,k=1,2}$ — матрица из операторов, определяющая изометрическое отображение $\mathfrak{M}_{\bar\lambda} + \overset{2}{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}$ на $\mathfrak{M}_\lambda + \overset{2}{\mathfrak{M}}_\lambda$.

При этом из $V_{12}\varphi_2 = 0$ следует, что $\varphi_2 = 0$. Положим

$$\mathfrak{M}_\lambda = V_{12}\overset{2}{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}, \quad \mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda - \overline{\mathfrak{M}}_\lambda.$$

Рассуждая так же, как в начале доказательства леммы, получаем

$$V^*\mathfrak{N}_\lambda \subset \mathfrak{M}_{\bar\lambda};$$

поэтому, полагая

$$V^*\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{N}_{\bar\lambda}, \quad \overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda} = \mathfrak{M}_{\bar\lambda} - \mathfrak{N}_{\bar\lambda},$$

имеем

$$\mathfrak{N}_{\bar\lambda} \subset \mathfrak{M}_{\bar\lambda} \quad \text{и} \quad V\mathfrak{N}_{\bar\lambda} = \mathfrak{N}_\lambda.$$

Оператор V, рассматриваемый только как отображение $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ на $\mathfrak{N}_\lambda$, определяет симметрический оператор $\overline{H}$ в $\mathfrak{H}$, который является расширением оператора H и имеет дефектные подпространства $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}$ и $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$. При этом H' является также расширением $\overline{H}$, так что в дальнейшем вместо H мы будем рассматривать $\overline{H}$.

Из конечномерности $\mathfrak{H}_2$ следует, что $\mathfrak{M}^2_\lambda$, $\mathfrak{M}^2_\lambda$ также конечномерны. Поэтому из определения $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ следует, что $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ конечномерно. Кроме того, в силу равенства

$$\dim(\overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda} + \mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}) = \dim(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda + \mathfrak{M}^2_\lambda),$$

$\overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}$ также конечномерно. Другими словами, $\overline{H}$ — оператор с конечным индексом дефекта. Но тогда все степени $\overline{H}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определены на многообразиях, плотных в $\mathfrak{H}$ [см. ([6])], и являются замкнутыми симметрическими операторами [см. ([7]), теорема 2].

Оператор H'^n является самосопряженным оператором в $\mathfrak{H}'$ и расширением оператора $\overline{H}^n$.

Легко видеть, что

$$\mathfrak{D}(H'^n)\,\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{D}(H_2^n). \tag{45}$$

Далее, очевидно, что

$$\mathfrak{D}(\overline{H}_2) \supset \mathfrak{D}(H_2^2) \supset \mathfrak{D}(H_2^3) \supset \ldots \tag{46}$$

В силу конечномерности $\mathfrak{H}_2$ существует n_0 такое, что

$$\mathfrak{D}(H_2^{n_0}) = \mathfrak{D}(H_2^{n_0+1}). \tag{47}$$

Очевидно, $\mathfrak{D}(H_2^{n_0})$ (конечномерное) подпространство $\mathfrak{H}_2$.

Обозначим его через $\mathfrak{N}_2$ и докажем, что $\mathfrak{N}_2$ приводит H'. В самом деле, пусть $f \in \mathfrak{N}_2$. Тогда равенство $H'f = H_2 f$ имеет смысл. Так как, с другой стороны, $f \in \mathfrak{D}(H_2^{n_0+1})$, то равенство $H^{n_0}H'f = H_2^{n_0+1}f$ также имеет смысл, т. е. $H'f \in \mathfrak{N}_2$. Это и означает, что $\mathfrak{N}_2$ приводит H'. В силу предполагаемой минимальности H', это возможно только тогда, когда $\mathfrak{N}_2 = (0)$.

Итак,

$$\mathfrak{D}(H'^{n_0}) \cdot \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{N}_2 = (0),$$

H'^{n_0} — самосопряженное расширение симметрического оператора $\overline{H}^{n_0}$, A коммутирует с H', а следовательно, и с H'^{n_0} и удовлетворяют условию (9).

Согласно доказанной лемме, H'^{n_0} определяет экстремальную спектральную функцию $\overline{H}^{n_0}$, следовательно, $\mathfrak{H}$ приводит A, что и требовалось доказать.

Применим доказанную теорему к формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dB(\mu)g}{\mu-\lambda} = (H-\lambda 1)^{-1}\left[g-(g, \psi_{\bar\lambda})\psi_\lambda\right] - \frac{1}{\bar\lambda-\lambda}(g, \psi_{\bar\lambda})\psi_{\bar\lambda} +$$

$$+\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}\frac{(\bar\lambda_0-\bar\lambda)(\psi_{\bar\lambda_0}, \psi_\lambda)F(\lambda)-(\lambda_0-\bar\lambda)(\psi_{\lambda_0}, \psi_\lambda)}{(\lambda_0-\lambda)(\psi_{\lambda_0}, \psi_{\bar\lambda})F(\lambda)-(\lambda_0-\lambda)(\psi_{\lambda_0}, \psi_\lambda)}(g, \psi_{\bar\lambda})\psi_\lambda, \qquad (48)$$

определяющей все спектральные функции $B(\lambda)$ оператора H с индексом дефекта (1,1) [см. ([4]), теорема 2]. Здесь ψ_λ — нормированный элемент $\mathfrak{M}_\lambda$, $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 < 0$, а $F(\lambda)$ — произвольная функция λ, аналитическая в λ-полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 < 0$ и удовлетворяющая там условию $|F(\lambda)| \leqslant 1$.

Из построения $F(\lambda)$ легко следует, что в случае конечномерного $\mathfrak{H}_2$ и только в этом случае $F(\lambda)$ — рациональная функция.

Таким образом, мы получаем

Следствие 3. *Если в формуле* (48) $F(\lambda)$ *есть рациональная функция, то спектральная функция* $B(\lambda)$ *экстремальна.*

Частным случаем формулы (48) является известная формула Неванлинна ([8]) для решений проблемы моментов в неопределенном случае. Поэтому следствие 3 применимо, в частности, к формуле Неванлинна.

§ 3. Применение к степенной проблеме моментов

Как известно, степенная проблема моментов в интервале $(-\infty, \infty)$ заключается в нахождении неубывающей функции $\sigma(\mu)$, удовлетворяющей условиям

$$S_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^n d\sigma(\mu) \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \qquad (49)$$

где

$$S_0 = 1, \ S_1, \ S_2, \ \ldots \qquad (50)$$

— заданная последовательность действительных чисел.

Необходимым условием существования решения является, очевидно, позитивность всех форм

$$\sum_{p,q=0}^{n} S_{p+q} x_p \bar{x}_q \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \qquad (51)$$

Пусть условие (51) выполнено; рассмотрим совокупность всех полиномов $P(\mu)$ с комплексными коэффициентами и положим для

$$P(\mu) = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu^k$$

$$S(P) = \sum_{k=0}^{n} c_k s_k \qquad (52)$$

и

$$(P, Q) = S(P\bar{Q}), \qquad (53)$$

где $\bar{Q}$ означает полином с комплексно сопряженными коэффициентами.

В силу позитивности форм (51), $(P, P) \geqslant 0$.

Будем считать $P \sim 0$, если $(P, P) = 0$. Тогда совокупность всех полиномов образует неполное гильбертово пространство со скалярным произведением (53). Пополнение этого пространства обозначим через $\mathfrak{H}$.

Пусть H — оператор в $\mathfrak{H}$, определенный сперва на полиномах равенством

$$HP(\mu) = \mu P(\mu). \tag{54}$$

Очевидно, H — эрмитов оператор, следовательно, его можно замкнуть. Замыкание H снова обозначим через H. Легко видеть, что H либо самосопряженный оператор, либо симметрический с индексом дефекта (1,1).

Пусть $B(\mu)$ — спектральная функция H; положим

$$\sigma(\mu) = (B(\mu)\ 1,\ 1).$$

Тогда $\sigma(\mu)$—неубывающая функция и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu^n d\sigma(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^n d(B(\mu)\,1,\ 1) = (H^n 1,\ 1) = (x^n 1,\ 1) =$$
$$= (x^n,\ 1) = S\,(x^n) = S_n, \tag{55}$$

т. е. $\sigma(\mu)$ является решением проблемы моментов*. Таким образом, позитивность форм (51) является также достаточным условием для разрешимости проблемы моментов.

Пусть теперь, обратно, $\sigma(\mu)$ — какое-нибудь решение проблемы моментов. Обозначим через $L_\sigma^{(2)}$ гильбертово пространство всех функций $f(\mu)$, измеримых по мере $d\sigma(\mu)$ и удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\mu)|^2 d\sigma(\mu) < +\infty$$

со скалярным произведением

$$(f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\overline{g(\mu)}\, d\sigma(\mu).$$

Очевидно, $\mathfrak{H} \subset L_\sigma^{(2)}$. Пусть, далее, H' — оператор в $L_\sigma^{(2)}$, определенный на всех функциях $f(\mu) \in L_\sigma^{(2)}$, для которых $\mu f(\mu) \in L_\sigma^{(2)}$, равенством

$$H'f = \mu f(\mu). \tag{56}$$

Тогда H' — самосопряженный оператор и, кроме того, расширение оператора H. Это расширение минимально, ибо 1 является циклическим элементом H'.

Пусть $E(\mu)$ — спектральная функция H', $B(\mu)$ — соответствующая спектральная функция H, так что для $f \in \mathfrak{H}$

$$PE(\mu)f = B(\mu)f,$$

* Кроме того, $\sigma(\mu)$ пронормирована так, что $\sigma(-\infty) = 0$ и $\sigma(\mu)$ непрерывна слева. В дальнейшем мы считаем все решения проблемы моментов нормированными таким образом.

где P — оператор проектирования в $L_\sigma^{(2)}$ на $\mathfrak{H}$. Очевидно,

$$E(\mu_1)f(\mu)=\begin{cases} f(\mu) & \text{при} \quad \mu_1\leqslant\mu \\ 0 & \text{при} \quad \mu_1>\mu \end{cases}$$

и поэтому

$$(B(\mu_1)1, 1)=(E(\mu_1)1, 1)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\mu_1)1\,d\sigma(\mu)=\int_{-\infty}^{\mu_1}d\sigma(\mu)=\sigma(\mu_1). \quad (57)$$

Отсюда следует, что *все решения проблемы моментов определяются спектральными функциями* H.

Обратно, *все классы эквивалентных минимальных самосопряженных расширений* H *задаются решениями проблемы моментов* (49); *именно, каждое минимальное расширение* H *эквивалентно оператору* (56) *в* $L_\sigma^{(2)}$, *где* σ — *некоторое решение проблемы моментов* (49).

Проблема моментов является определенной тогда и только тогда, когда H имеет только одну спектральную функцию, т. е. когда H — самосопряженный оператор.

Рассмотрим случай неопределенной проблемы моментов; здесь H — симметрический оператор с индексом дефекта (1,1).

Решение $\sigma(\mu)$ проблемы моментов назовем экстремальным, если его нельзя представить в виде

$$\sigma(\mu)=\rho_1\sigma_1(\mu)+\rho_2\sigma_2(\mu), \quad (58)$$

где $\rho_1>0$, $\rho_2>0$, $\rho_1+\rho_2=1$ и $\sigma_1(\mu)$, $\sigma_2(\mu)$ — решения той же проблемы моментов, отличные от $\sigma(\mu)$.

Пусть $B(\mu)$—спектральная функция H, определяющая $\sigma(\mu)$ по формуле (57), и пусть имеет место равенство

$$B(\mu)=\rho_1B_1(\mu)+\rho_2B_2(\mu), \quad (59)$$

где $\rho_1>0$, $\rho_2>0$, $\rho_1+\rho_2=1$ и $B_1(\mu)$, $B_2(\mu)$—спектральные функции H, отличные от $B(\mu)$.

Тогда из (57) следует, что равенство, аналогичное (58), имеет место также для $\sigma(\mu)$, так что $\sigma(\mu)$ не экстремальна.

Пусть, обратно, $\sigma(\mu)$ не экстремальна, так что имеет место (58). Тогда для любых двух полиномов $P(\mu)$, $Q(\mu)$ имеем

$$(B(\mu_1)P,Q)=\int_{-\infty}^{\mu_1}P(\mu)\overline{Q(\mu)}\,d\sigma(\mu)=\rho_1\int_{-\infty}^{\mu_1}P(\mu)\overline{Q(\mu)}\,d\sigma_1(\mu)+$$

$$+\rho_2\int_{-\infty}^{\mu_1}P(\mu)\overline{Q(\mu)}\,d\sigma_2(\mu)=\rho_1(B_1(\mu_1)P, Q)+\rho_2(B_2(\mu_1)P, Q),$$

где $B_1(\mu)$, $B_2(\mu)$—спектральные функции H, определяющие соответственно $\sigma_1(\mu)$ и $\sigma_2(\mu)$.

Таким образом, имеет место (59), т. е. $B(\mu)$ не экстремальна.

Итак, *решение* $\sigma(\mu)$ *проблемы моментов экстремально тогда и только тогда, когда соответствующая спектральная функция оператора* H *экстремальна*.

Найдем теперь условие экстремальности $\sigma(\mu)$. Если $\sigma(\mu)$ не экстремальна, то и соответствующая спектральная функция $B(\mu)$ не экстремальна.

Согласно теореме 2, существует оператор A в $L_\sigma^{(2)}$, коммутирующий с H', удовлетворяющий (9) и $\neq 1$.

Так как A коммутирует с H', то A есть оператор умножения на функцию $a(\mu)$, ограниченную почти всюду относительно $\sigma(\mu)$, и так как $A \neq 1$, то $a(\mu) \neq 1$ на множестве положительной меры относительно $\sigma(\mu)$.

Наконец, условие (9), примененное к полиномам $P(\mu)$ и $Q(\mu)=1$, дает

$$0=((A-1)P, Q)=\int_{-\infty}^{\infty}(a(\mu)-1)P(\mu)\,d\sigma(\mu). \qquad (60)$$

Обозначим через L_σ пространство всех функций $f(\mu)$ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\mu)|\,d\sigma(\mu)<+\infty$$

с нормой

$$\|f\|=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\mu)|\,d\sigma(\mu).$$

Так как $a(\mu)-1\neq 0$ на множестве положительной меры, то из (60) следует, что совокупность всех полиномов $P(\mu)$ не плотна в L_σ в смысле нормы в L_σ.

Обратно, если совокупность всех полиномов не плотна в L_σ, то существует функция $a(\mu)-1\neq 0$ на множестве положительной меры и такая, что (60) выполнено для всех полиномов $P(\mu)$. Подставляя сюда вместо P произведение $P\overline{Q}$, получаем, что для любых двух полиномов P и Q

$$((A-1)P, Q)=\int_{-\infty}^{\infty}((a(\mu)-1)P(\mu)\overline{Q(\mu)}\,d\sigma(\mu)=0. \qquad (61)$$

Из (61) следует по непрерывности, что условие (9) выполнено для всех $f, g \in \mathfrak{H}$.

Итак, A удовлетворяет всем условиям теоремы 2, следовательно, $\sigma(\mu)$ неэкстремальна.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4. *Решение $\sigma(\mu)$ проблемы моментов является экстремальным тогда и только тогда, когда совокупность всех полиномов $P(\mu)$ плотна в L_σ в смысле нормы в L_σ.*

Можно дать другое доказательство этой теоремы, которое не опирается на изложенную здесь теорию*.

---

* Это доказательство нашел И. М. Гельфанд, после того как автор доложил результаты этой статьи.

Именно, пусть $\sigma(\mu)$ — неэкстремальное решение проблемы моментов и пусть

$$\sigma(\mu) = \rho_1 \sigma_1(\mu) + \rho_2 \sigma_2(\mu),$$

где $\sigma_1(\mu)$, $\sigma_2(\mu)$ — решения той же проблемы моментов, существенно отличные от $\sigma(\mu)$.

Тогда функционалы

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\, d\sigma(\mu), \quad F_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\, d\sigma_1(\mu)$$

ограничены в L_σ. Действительно,

$$|F(f)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(\mu)|\, d\sigma(\mu) = \|f\|,$$

$$|F_1(f)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(\mu)|\, d\sigma_1(\mu) \leqslant \frac{1}{\rho_1} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\mu)|\, d\sigma_1(\mu) = \frac{1}{\rho_1}\|f\|.$$

Поэтому разность

$$F_0(f) = F(f) - F_1(f)$$

есть ограниченный функционал в L_σ, отличный от тождественного нуля и равный нулю на всех полиномах. Следовательно, совокупность всех полиномов не плотна в L_σ.

Обратно, пусть совокупность всех полиномов не плотна в L_σ. Тогда существует функционал $F_0(f)$, ограниченный в L_σ, отличный от тождественного нуля и равный нулю на всех полиномах.

Пусть норма $F_0(f)$ в L_σ равна единице. Положим

$$F_1(f) = F(f) - F_0(f), \quad F_2(f) = F(f) + F_0(f).$$

Функционалы $F_1(f)$, $F_2(f)$ позитивны. Действительно, если $f(\mu)$ — неотрицательная функция, то

$$|F_0(f)| \leqslant \|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\, d\sigma(\mu) = F(f),$$

поэтому и

$$F(f) \pm F_0(f) \geqslant 0.$$

Кроме того, $F_1(f)$, $F_2(f)$ и $F(f)$ принимают одни и те же значения на всех полиномах и существенно различны. Следовательно, $F_1(f)$, $F_2(f)$ определяют решения той же проблемы моментов, существенно отличные от $F(f)$ и

$$F(f) = \frac{1}{2}[F_1(f) + F_2(f)].$$

Это означает, что $\sigma(\mu)$ есть неэкстремальное решение проблемы моментов. Теорема доказана.

Поступило
25.VII.1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Наймарк М. А., Об экстремальных спектральных функциях симметрического оператора, Доклады Ак. Наук СССР, LIV, № 1 (1946), 7—9.
[2] Наймарк М. А., Самосопряженные расширения второго рода симметрического оператора, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 4 (1940), 53—104.
[3] Наймарк М. А., Спектральные функции симметрического оператора, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 4 (1940), 277—318.
[4] Наймарк М. А., О спектральных функциях симметрического оператора, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 7 (1943), 285—296.
[5] Наймарк М. А., Об одном представлении аддитивной операторной функции множеств, Доклады Ак. Наук СССР, XLI, № 9 (1943), 373—375.
[6] Наймарк М. А., О квадрате замкнутого симметрического оператора, Доклады Ак. Наук СССР, XXVI, № 9 (1940), 863—866.
[7] Neumark M. A., Direkte Polynome von symmetrischen Operatoren und ihre selbst-adjungierte Fortsetzungen. I, Матем. сборник, т. 9 (51): 3 (1941) 629—666.
[8] Nevanlinna R., Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjesche Momenten problem, Annales Acad. Sc. Fennicae (A), 18 (1922), N. 5; 32 (1929), N. 7.

M. A. NEUMARK. EXTREMAL SPECTRAL FUNCTIONS OF A SYMMETRIC OPERATOR

SUMMARY

A brief exposition of the results of this paper is given in C. R. Acad. Sc. USSR (Doklady), LIV, № 1 (1946), pp. 7—9.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947), 345–362 Série mathématique

З. И. ХАЛИЛОВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком **И. Г. Петровским***)*

В работе рассматривается общая линейная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, где производные, входящие в граничные условия, имеют любые порядки.

Строится эквивалентное интегральное уравнение и определяются условия, при которых краевая задача имеет решение; устанавливается, что оно есть мероморфная функция параметра, входящего в коэффициенты уравнения и граничного условия.

§ 1. Постановка задачи. Пусть S — конечная односвязная область плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная замкнутой простой кривой L.

Пусть дано однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными вида

$$L(u)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A(x, y; \lambda)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x, y; \lambda)\frac{\partial u}{\partial y}+C(x, y; \lambda)u=0, \quad (1.1)$$

где коэффициенты $A(x, y; \lambda)$, $B(x, y; \lambda)$, $C(x, y; \lambda)$ — заданные вещественные функции вещественных переменных x, y в области S при любом фиксированном значении параметра λ из некоторого заданного интервала $\Delta(\lambda_1, \lambda_2)$ вещественной оси плоскости комплексного переменного λ.

Очевидно, (1,1) является уравнением эллиптического типа.

Далее, пусть дано линейное граничное условие

$$R(u)\equiv\sum_{0\leq p+q\leq N} a_{pq}(s, \lambda)\left[\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\,\partial y^p}\right]_s=b(s, \lambda), \quad (1.2)$$

где N — произвольно заданное натуральное число, большее или меньшее двух (порядка уравнения (1.1)), или равное двум, $a_{pq}(s, \lambda)$ $(p, q=0, 1, \ldots, N)$ — заданные функции s (дуги контура L) при любом фиксированном значении параметра λ из того же интервала $\Lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ и под $[\;\;]_s$ понимается значение функции, указанной в скобках, в точке s контура L.

В настоящей работе рассматривается следующая краевая задача: *при заданном значении параметра* $\lambda\in\Delta(\lambda_1, \lambda_2)$ *найти в области* S *вещественную функцию* $u\equiv u(x, y)$, *удовлетворяющую уравнению* (1,1) * *в области* S *и граничному условию* (1.2) *на* L.

* Не ограничивая общности, мы рассматриваем однородное уравнение (1,1).

Как известно, к частным случаям этой краевой задачи приводят многие задачи математической физики, например, краевые задачи теории изгиба и колебания двумерных упругих систем.

В дальнейшем эту краевую задачу будем называть задачей $\mathfrak{A}$.

Если $b(s, \lambda) \equiv 0$ на L, то задачу $\mathfrak{A}$ будем называть задачей $\mathfrak{A}^\circ$.

Множество значений параметра λ, каждому элементу которого соответствует по крайней мере одно нетривиальное ($u \not\equiv 0$) решение задачи $\mathfrak{A}^\circ$, будем называть спектром задачи $\mathfrak{A}$ или задачи $\mathfrak{A}^\circ$ и обозначать через $\mathfrak{M}$.

Каждое число множества $\mathfrak{M}$ будем называть фундаментальным числом задачи $\mathfrak{A}$, а соответствующие этому числу линейно независимые решения задачи $\mathfrak{A}^\circ$,—фундаментальными функциями задачи $\mathfrak{A}$, соответствующими данному фундаментальному числу.

Число фундаментальных функций, соответствующих данному фундаментальному числу, будем называть рангом этого фундаментального числа и обозначать через r.

Настоящая работа имеет целью выяснить признаки существования решения задачи $\mathfrak{A}$, определить характер зависимости решения задачи $\mathfrak{A}$ от параметра λ и установить некоторые свойства множества $\mathfrak{M}$.

Ради простоты будем считать, что параметр λ меняется в одном интервале Δ. Как будет видно из дальнейшего, наши результаты окажутся годными и для случая, когда Λ представляет собою совокупность интервалов.

Для исследования вышеуказанных вопросов мы в этой работе пользуемся, главным образом, работами И. Н. Векуа [(1), (2) и (3)].

Пусть $f(t)$ — какая-нибудь функция точки t контура L, принимающая, вообще говоря, комплексные значения.

Функцию $f(t)$ будем считать принадлежащей классу H ($f \in H$) и называть кратко H-функцией, если она удовлетворяет условию Hölder'a:

$$|f(t_1)-f(t_2)| \leqslant A\,|t_1-t_2|^\alpha,$$

где t_1, t_2—произвольные точки контура L и A, $\alpha\ (0<\alpha\leqslant 1)$—некоторые вещественные положительные числа.

Будем говорить, что данная функция произвольного числа аргументов принадлежит классу H_μ в некоторой области, если эта функция вместе со всеми своими производными до порядка $\leqslant \mu$ удовлетворяет условию Hölder'a в указанной области*.

Пусть μ—какое-нибудь натуральное число или нуль.

Мы скажем, что функция $\varphi(z)$ является H_μ-голоморфной в области S, если:

1) $\varphi(z)$ голоморфна в области S;

2) $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, ..., $\varphi^\mu(z)$—непрерывны в области $S+L$;

* В дальнейшем самую функцию будем считать производной нулевого порядка, так что обозначения H_0 и H имеют один и тот же смысл.

3) функции $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, ..., $\varphi^{\mu}(t)$, где

$$\varphi^{(k)}(t)=\lim_{z\to t}\varphi^{(k)}(z) \quad (k=0, 1, \ldots, \mu),$$

при произвольном стремлении точки z изнутри области S к точке контура t, представляют собою функции класса H на L.

Если $f(M, \lambda)$ — функция некоторой совокупности точек M и параметра λ, то будем ее называть $H(\lambda)$-аналитической, если она является H-функцией относительно каждой из точек M соответственно в ее области изменения и аналитической относительно λ в некоторой области B.

Отметим, что методы, примененные в настоящей работе, позволяют исследовать более общую краевую задачу $\mathfrak{A}$, когда, например, область S многосвязна, а коэффициенты $a_{pq}(s; \lambda)$ кусочно-регулярны. Но для простоты в данной статье мы ограничиваемся рассмотрением краевой задачи при следующих ограничениях:

1°. Коэффициенты уравнения (1,1) — целые вещественные функции переменных x, y при каждом фиксированном значении параметра λ и аналитические функции λ при любых x, y.*

2°. Коэффициенты граничного условия $a_{pq}(s, \lambda)$ $(p, q=0, 1, \ldots, N)$ вместе со свободным членом $b(s, \lambda)$ являются H-функциями дуги s на L при любом фиксированном значении параметра $\lambda\in\Delta(\lambda_1, \lambda_2)$ и аналитическими функциями параметра λ в интервале $\Delta(\lambda_1, \lambda_2)$ при любом фиксированном значении $s\in L$.

В дальнейшем нам будет необходимо придавать λ комплексные значения. Отметим, что при вышеуказанном условии существует такая связная область B плоскости комплексного переменного λ, содержащая интервал Δ, что каждая из функций $A(x, y; \lambda)$, $B(x, y; \lambda)$, $C(x, y; \lambda)$ является целой функцией относительно x, y при каждом $\lambda\in\Delta$ и вместе с частными производными по x, y любого порядка является аналитической функцией параметра λ в области B при любых x, y.

Очевидно, при этом условии функции $a_{pq}(s, \lambda)$, $b(s, \lambda)$ являются H-функциями относительно s при любом $\lambda\in B$ и аналитическими функциями λ в области B при любом $s\in L$.

3°. Граничные значения коэффициентов уравнения (1.1) и коэффициенты граничного условия (1.2) удовлетворяют некоторому условию, называемому *условием нормальности* задачи $\mathfrak{A}$, которое будет сформулировано в § 3.

Под $[\quad]_s$ мы будем понимать предел выражения, указанного внутри скобок, когда точка (x, y) изнутри области S по любому пути стремится к точке $t(s)$ контура L.

4°. Контур L имеет непрерывную кривизну**.

* Это условие принято для удобства и может быть значительно смягчено.

** Исследование можно обобщить для контуров с угловыми точками, пользуясь, например, методами, примененными в [7].

Предположим, что точка $z=0$ находится внутри области S. Направление L, оставляющее область S слева, будем принимать за положительное направление L.

В этой работе мы рассматриваем краевую задачу $\mathfrak{A}$: при заданном значении параметра λ из интервала Λ найти в области S вещественную функцию $u(x, y)$, непрерывную вместе со всеми ее частными производными порядка $\leqslant 2$, H_N-регулярную в области $S+L$ и удовлетворяющую уравнению (1.1) в области S и граничному условию (1.2) на L.

Непрерывную функцию $u(x, y)$, имеющую в области S непрерывные частные производные порядка $\leqslant 2$ и удовлетворяющую уравнению (1.1), будем называть в дальнейшем регулярным решением уравнения (1.1).

По условию 1°, всякое регулярное решение уравнения (1,1) является аналитической функцией переменных x, y в области S ([8]).

§ 2. Вспомогательные теоремы. Дальнейшее исследование базируется на некоторых теоремах, которые для удобства чтения настоящей работы приводятся ниже (без доказательства).

ТЕОРЕМА 1. *Сумма и произведение двух H-функций есть H-функция, причем, если α_1, α_2 — соответствующие показатели* Hölder'*а данных функций, то показатель* Hölder'*а и суммы и произведения равен* $\min[\alpha_1, \alpha_2]$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $A(z, \zeta)$ есть H-функция относительно z в области S при любом ζ и непрерывная функция ζ при любом z в области S, то*

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z, \zeta)\, d\zeta \in H,$$

где интегрирование произведено по любому кусочно-гладкому контуру, соединяющему точки z_1, z_2 и находящемуся в области S.

В дальнейшем, при отсутствии особой оговорки, если пределы интеграла не указаны, то будем предполагать, что интегрирование производится по всему контуру L.

ТЕОРЕМА 3. *Если $K(t, t_1)$ есть H-функция на L относительно каждого из переменных t, t_1, то*

$$\text{v. p.} \int \frac{K(t, t_1)}{t_1 - t}\, dt_1$$

есть H-функция относительно t на L.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть L — кусочно-гладкая линия. Предположим, что $A(t, \lambda)$ при любом фиксированном λ из некоторой связной области B плоскости комплексного переменного λ есть непрерывная функция переменной t на L и при любом $t \in L$ является аналитической функцией параметра λ в области B. Тогда каждый из интегралов*

$$\int A(t, \lambda)\, dt, \quad \int \frac{A(t_1, \lambda)}{|t_1 - t|^{\nu}}\, dt_1 \quad (0 < \nu < 1)$$

представляет аналитическую функцию переменного λ в области B.

Утверждение теоремы 4 справедливо также для интеграла

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta, \lambda)\, d\zeta,$$

где $f(\zeta, \lambda)$ — непрерывная функция ζ в области S при любом $\lambda \in B$ и аналитическая функция λ в области B при любом $\zeta \in S$, а интегрирование производится по любому кусочно-гладкому пути, соединяющему точки z_1, z_2 и находящемуся внутри S.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть L — гладкая линия и функция $A(t, \lambda)$ $(t \in L, \lambda \in B)$ есть $H(\lambda)$-аналитическая. Тогда и*

$$\text{v. p.} \int \frac{A(t_1, \lambda)}{t_1 - t}\, dt_1$$

есть $H(\lambda)$-аналитическая.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть функция $K(t, t_1; \lambda)$ $(t, t_1 \in L)$ есть $H(\lambda)$-аналитическая. Тогда*

$$\frac{K(t, t_1; \lambda) - K(t, t; \lambda)}{t_1 - t} = \frac{A(t, t_1; \lambda)}{|t_1 - t|^{\nu}} \quad (\nu < 1),$$

где функция $A(t, t_1; \lambda)$ $(t \in L, t_1 \in L, \lambda \in B)$ является $H(\lambda)$-аналитической.

ТЕОРЕМА 7. *Если $A_1(t, t_1; \lambda)$, $A_2(t, t_1; \lambda)$ $(t, t_1 \in L, \lambda \in B)$ суть $H(\lambda)$-аналитические функции, то*

$$\int \frac{A(t, t_2; \lambda) A(t_2, t_1; \lambda)}{|t_2 - t|^{\nu_1}\ |t_1 - t_2|^{\nu_2}}\, dt_2 = \frac{B(t, t_1; \lambda)}{|t_1 - t|^{\nu}} \quad (\nu_1 < 1, \nu_2 < 1, \nu < 1),$$

где функция $B(t, t_1; \lambda)$ $(t, t_1 \in L, \lambda \in B)$ есть $H(\lambda)$-аналитическая, причем $\nu \leqslant \nu_1 + \nu_2 - 1$.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть функция $A(t, t_1; \lambda)$ $(t, t_1 \in L)$ есть $H(\lambda)$-аналитическая. Тогда*

$$\int \frac{A(t, t_2; \lambda)}{(t_2 - t)\,|t_1 - t_2|^{\nu}}\, dt_2 = \frac{B(t, t_1; \lambda)}{|t_1 - t|^{\nu}} \quad (\nu < 1),$$

где функция $B(t, t_1; \lambda)$ $(t, t_1 \in L, \lambda \in B)$ есть $H(\lambda)$-аналитическая.

Отметим, наконец, что если L — гладкая линия, то всякая функция, удовлетворяющая условию Hölder'а относительно дуги s, удовлетворяет тому же условию относительно t — аффикса контура L и наоборот.

§ 3. Приведем задачу 𝔄 к краевой задаче для одной голоморфной функции одного комплексного переменного. Для этого используем общее комплексное представление всех регулярных решений уравнения (1.1) при помощи одной голоморфной функции одного комплексного переменного $z = x + iy$, определенной в области S.

Упомянутое представление принадлежит И. Н. Векуа [1] и является обобщением известной формулы Э. Гурса для бигармонического уравнения.

В дальнейшем нам будет необходимо считать λ меняющимся в области B. Следовательно, в соответствующем месте будем считать, что λ взято из области B.

Пусть, теперь, $u \equiv u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1.1), вещественное при вещественном λ, $\lambda \in \Lambda$. Тогда из вышеупомянутого вытекает, что оно определяется равенством *

$$u(x, y) = \alpha(z, \lambda)\varphi(z) + \alpha^*(z, \lambda)\overline{\varphi(z)} + \int_0^z \beta(z, \zeta; \lambda)\varphi(\zeta)\,d\zeta + \int_0^{\bar z} \beta^*(z, \zeta; \lambda)\overline{\varphi(\zeta)}\,d\bar\zeta, \tag{3.1}$$

где $\varphi(z)$ — голоморфная в области S функция,

$$\alpha(z, \lambda) \equiv \alpha(z, \bar z; \lambda) = \exp\left[-\int_0^{\bar z} a(z, \bar\zeta; \lambda)\,d\bar\zeta\right],$$
$$4a(z, \bar z; \lambda) = A\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) - iB\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right), \tag{3.2}$$

$$\beta(z, \zeta; \lambda) = \int_0^{\bar z} V(z, \bar z; \zeta, \bar\zeta; \lambda)\,d\bar\zeta, \tag{3.3}$$

$$V(z, \bar\zeta; \zeta, \bar\zeta; \lambda) = \gamma(\zeta, \bar\zeta; \lambda)\exp\left[-\int_\zeta^z \bar a(\zeta_1, \bar\zeta; \lambda)\,d\zeta_1\right],$$
$$V(\zeta, \bar z; \zeta, \bar\zeta; \lambda) = \gamma(\zeta, \bar\zeta; \lambda)\exp\left[-\int_{\bar\zeta}^{\bar z} a(\zeta, \bar\zeta_1; \lambda)\,d\bar\zeta_1\right],$$

а

$$-\gamma(z, \bar z; \lambda) = \frac{\partial\alpha(z, \bar z; \lambda)}{\partial z\,\partial\bar z} + a(z, \bar z; \lambda)\frac{\partial\alpha(z, \bar z; \lambda)}{\partial z} + a^*(z, \bar z; \lambda)\frac{\partial\alpha(z, \bar z; \lambda)}{\partial\bar z} + c(z, \bar z; \lambda)\,\alpha(z, \bar z; \lambda), \tag{3.4}$$
$$4c(z, \bar z; \lambda) = C\left(\frac{z+\bar z}{2}; \frac{z-\bar z}{2i}; \lambda\right).$$

Интегралы, входящие в (3.1), распространены по кусочно-гладкому контуру, соединяющему точки $0, z \in S$ и находящемуся целиком в области S.

Очевидно, если λ вещественное и взято из Δ, то

$$u(x, y) = 2\mathrm{Re}\left[\alpha(z, \lambda)\varphi(z) + \int_0^z \beta(z, \zeta; \lambda)\varphi(\zeta)\,d\zeta\right]. \tag{3.1'}$$

Таким образом, функция $\alpha(z, \lambda)$ определяется непосредственно, а для нахождения функции $\beta(z, \zeta; \lambda)$ необходимо иметь функцию $V(z, \bar z; \zeta, \zeta; \lambda)$, которая определяется как решение задачи Гурса по условиям (3.4) методом последовательных приближений.

---

* Здесь и в дальнейшем через $\overline{\varphi(z)}$ будем обозначать функцию, комплексно сопряженную с $\varphi(z)$, а знак* над характеристикой функции будет иметь следующий смысл: $\alpha^*(z, \lambda) = \bar\alpha(\bar z, \lambda)$.

Наоборот, функция $\varphi(z)$ выражается функцией $u(x, y)$ при помощи равенства

$$\varphi(z) = u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) -$$

$$-\frac{1}{2} u(0, 0) \exp\left\{-\frac{1}{4}\int_0^z \left[\alpha\left(\frac{\zeta}{2}, \frac{\zeta}{2i}; \lambda\right) - i\beta\left(\frac{\zeta}{2}, \frac{\zeta}{2i}; \lambda\right)\right] d\zeta\right\}. \quad (3.5)$$

Если принять условие

$$\operatorname{Im} \varphi(0) = 0, \quad (3.6)$$

то формула (3.1) установит взаимно однозначное соответствие между множествами регулярных решений задачи $\mathfrak{A}$ и голоморфных функций $\varphi(z)$.

Введя комплексные переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, можно граничное условие (1.2) преобразовать в равенство *

$$R(u) \equiv \sum_{k}^{0,N} \sum_{j}^{m_k, N-m_k-k} b_{N-k-j,j}(t; \lambda) \frac{\partial^{N-k} u}{\partial t^{N-k-j} \partial \bar{t}^j} = b(t; \lambda), \quad (3.7)$$

где

$$b_{pq}(t; \lambda) = \sum_{\mu}^{0,\, p+q} \sum_{\nu}^{0,\, q} (-1)^{\nu} i^{\mu} \binom{p+q-\mu}{q-\nu} \binom{q}{\nu} a_{p+q-\mu,}\ (s; \lambda), \ ** \quad (3.8)$$

и m_k $(k = 0, 1, \ldots, N)$ — некоторые натуральные числа, получающиеся в результате вышеуказанного преобразования и обладающие свойством:

$$0 \leqslant m_k < N - k, \quad (3.9)$$

так что $m_{N-1} = m_N = 0$.

Из (3.8) видно, что все коэффициенты $b_{p,q}$, $p + q = k$, определяются только и только коэффициентами $a_{r,q}$, $p + q = k$. Нетрудно показать и обратное, причем если $a_{p,q} = 0$, $p + q = k$, то $b_{p,q} = 0$, $p + q = k$ и наоборот.

Заметим, что при $\lambda \in \Delta$ коэффициенты a_{pq} граничного условия (1.2), если их расположить по строкам с номерами $\nu = p + q$, $\nu = N, N-1, \ldots, 0$ образуют либо симметричный, либо несимметричный «треугольник» (коэффициенты, равные нулю, не выписываем). Но коэффициенты граничного условия (3.7) при указанном расположении всегда дадут форму симметричного «треугольника».

Теперь мы можем сформулировать условие нормальности краевой задачи $\mathfrak{A}$.

---

* В дальнейшем, при перестановке переменных s и t характеристику функции менять не будем, т. е. будем считать $\varphi(t) = \varphi(s)$.

** В выражении (3.8) принято, что $\binom{m}{n} = 0$, если $n > m$.

Если коэффициенты уравнения (1.1) и граничного условия (1.2) таковы, что для всех чисел k, удовлетворяющих условию

$$N-m_k-k=M \qquad (M=\max\{N-m_0,\ N-m_1-1,\ \ldots\}),$$

величины Δ, Δ^*, где

$$\Delta=\sum_k g_{Mm_kM}(t,\lambda)\,b_{Nm_k}(t,\lambda), \tag{3.10}$$

$$g_{\mu\nu j}\equiv g_{\mu\nu j}(z,\lambda)=\frac{\partial^\nu}{\partial\bar z^\nu}\left\{\binom{\mu}{j}\frac{\partial^{\mu-j}\alpha}{\partial z^{\mu-j}}+\right.$$
$$\left.+\sum_s^{1,\,\mu-1}\frac{\partial^{\mu-j-s}}{\partial z^{\mu-j-s}}\left[\left(\frac{\partial^{s-1}\beta}{\partial z^{s-1}}\right)_{\zeta=z}\right]\right\}, \tag{3.11}$$

отличны от нуля на L при любом $\lambda\in B$, то краевую задачу $\mathfrak{A}$ будем называть н о р м а л ь н о й *.

В настоящей работе задачу $\mathfrak{A}$ всегда будем считать нормальной.

Любопытно отметить, что нормальность задачи $\mathfrak{A}$ определяется, в частности, не только коэффициентами старших членов граничного условия (1.2). Легко привести пример, когда нормальность задачи $\mathfrak{A}$ определяется одними коэффициентами младших членов граничного условия. В самом деле, если

$$R(u)\equiv h\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\,\partial\bar t^2}+h_1\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\bar h_1\frac{\partial^3 u}{\partial\bar t^3},$$

то, очевидно, $\Delta=\alpha h_1$.

Нетрудно убедиться, что если наивысший порядок производных, входящих в граничное условие, не превосходит единицы, то вышеприведенное замечание не имеет места, ибо в этом случае

$$m_{N-1}=m_N=0.$$

Для полноты отметим, что если $N=0$ (задача Дирихле), то число M также равно нулю.

Теперь, пользуясь общим представлением (3.1) регулярного решения задачи $\mathfrak{A}$, составим граничное условие для функции $\varphi(z)$:

$$\sum_{j=0}^{M}\left[P_j(t,\lambda)\,\varphi^{(j)}(t)+P_j^*(t,\lambda)\,\overline{\varphi^{(j)}(t)}\right]+$$
$$+\int_0^t Q(t,\zeta;\lambda)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta+\int_0^{\bar t} Q^*(t,\zeta;\lambda)\,\overline{\varphi(\zeta)}\,d\bar\zeta=b(t,\lambda), \tag{3.12}$$

---

* Значок * над характеристикой функции в этой работе имеет следующий смысл: $\alpha^*(z,\lambda)=\bar\alpha(\bar z,\lambda)$.

Отметим, что в общем случае из условия: $f(t,\lambda)\neq 0$ не вытекает условие: $f^*(t,\lambda)\neq 0$. Например, если $f(t,\lambda)=t+\lambda\neq 0$ на L при любом $\lambda\in B$, то $f(t,\lambda)$ обращается в нуль при $\operatorname{Im}\lambda=\operatorname{Im}t$, если $\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{Re}t=0$.

где

$$P_j(t, \lambda) = \sum_{\mu}^{j, M} \sum_{\nu}^{0, M-\mu} g_{\mu\nu j}(t, \lambda)\, b_{\mu\nu}(t, \lambda),$$

$$Q(t, \zeta; \lambda) = \sum_{0 \leq \mu+\nu \leq N} b_{\mu\nu}(t, \lambda) \frac{\partial^{\mu+\nu}\beta}{\partial t^{\mu}\, \partial \bar{t}^{\nu}}.$$

Нетрудно показать, что

$$\Delta \equiv P_M. \tag{3.13}$$

Таким образом, мы приходим к следующей краевой задаче теории функций одного комплексного переменного: при заданном $\lambda \in \Delta$ найти в области S голоморфную функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую условию (3.12) и условию нормировки $\operatorname{Im} \varphi(0) = 0$.

Эту краевую задачу в дальнейшем будем называть задачей $\mathfrak{A}_1$. Соответствующую однородную задачу $(b(t, \lambda) \equiv 0)$ будем называть задачей $\mathfrak{A}_1^0$.

Легко видеть, что задачи $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ вполне эквивалентны, т. е. всякому решению задачи $\mathfrak{A}$ соответствует единственное решение задачи $\mathfrak{A}_1$ и наоборот.

В самом деле, первая часть утверждения вытекает из вышеприведенного рассуждения. Теперь предположим, что $\varphi(z)$ — решение задачи $\mathfrak{A}_1$; тогда, так как оно представляет собою голоморфную в S функцию, то ему по формуле (3.1) соответствует регулярное решение u, которое в силу (3.12) удовлетворяет граничному условию (1.2).

Если принять во внимание условия регулярности 1°, 2°, 4° (§ 1) и соответствующие теоремы § 2, то можно утверждать, что функции $P(t, \lambda)$, $Q(t, \zeta; \lambda)$ $(t \in L,\ \zeta \in S + L,\ \lambda \in B)$ суть $H(\lambda)$-аналитические.

§ 4. **Приведение задачи $\mathfrak{A}_1$ к интегральному уравнению.** Для решения краевой задачи $\mathfrak{A}_1$ построим сингулярное интегральное уравнение, пользуясь интегральным представлением H_M-голоморфной в области S функции, принадлежащим И. Н. Векуа ([2]).

Тогда решение задачи $\mathfrak{A}$ можно искать в виде

$$\varphi(z) = \int \left[\left(1 - \frac{z}{t}\right)^{M-1} \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) + 1 \right] \psi(t)\, ds, \tag{4.1}$$

где $\psi(t)$ — вещественная H-функция на L и под $\ln\left(1 - \frac{z}{t}\right)$ понимается главная ветвь, т. е. ветвь, удовлетворяющая условию

$$\left[\ln\left(1 - \frac{z}{t}\right)\right]_{z=0} = 0.$$

Между совокупностями H_M-голоморфных в области S функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих условию нормировки, и вещественных H-функций $\psi(t)$, определенных на L, существует взаимно однозначное соответствие.

Пользуясь представлением (4.1), приведем функциональное уравнение (3.12) к следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$L(\psi) \equiv A(t, \lambda)\, \psi(t) - \int_L \frac{K(t, t_1; \lambda)}{t_1 - t} \psi(t_1)\, dt_1 = b(t, \lambda), \tag{4.2}$$

где

$$A(t,\lambda)=(-1)^M(M-1)!\,\pi i\left[t^{1-M}\frac{d\bar t}{ds}P_M-\bar t^{1-M}\frac{dt}{ds}P_M^*\right], \tag{4.3}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{K(t,t_1;\lambda)}{t_1-t}=\sum_j^{0,M}\left[P_jK_j+P_j^*\bar K_j\right]\frac{ds_1}{dt_1}+\\
&+\left\{\int_0^t Q(t,\zeta;\lambda)\left[\left(1-\frac{\zeta}{t_1}\right)^{M-1}\ln\left(1-\frac{\zeta}{t_1}\right)+1\right]d\zeta+\right.\\
&\left.+\int_0^{\bar t} Q^*(t,\zeta;\lambda)\left[\left(1-\frac{\bar\zeta}{\bar t_1}\right)^{M-1}\ln\left(1-\frac{\bar\zeta}{\bar t_1}\right)+1\right]d\bar\zeta\right\}\frac{ds_1}{dt_1},\\
&K_j(t,t_1)=(-1)^j\frac{(M-1)\cdots(M-j)}{t_1^j}\left(1-\frac{t}{t_1}\right)^{M-1-j}\left\{\ln\left(1-\frac{t}{t_1}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{M-1}+\ldots+\frac{1}{M-j}\right\}\quad (j=0,1,\ldots,M-1),\\
&K_M(t,t_1)=(-1)^M\frac{(M-1)!\,t_1^{1-M}}{t_1-t}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Аналогично может быть получено интегральное уравнение задачи $\mathfrak{A}$ при $N=0$ (задача Дирихле) *.

Нетрудно установить, что $A(t,\lambda)$ $(t\in L,\ \lambda\in B)$ является $H(\lambda)$-аналитической функцией.

В самом деле, по условию, накладываемому на контур L, очевидно, что $\frac{dt}{ds}$ есть H-функция на L. С другой стороны, функции $P_M(t,\lambda)$, $P_M^*(t,\lambda)$ $(t\in L,\ \lambda\in B)$ — $H(\lambda)$-аналитические, откуда следует вышеуказанное утверждение.

Также легко видеть, что $K(t,t_1;\lambda)$ $(t,t_1\in L,\ \lambda\in B)$ есть $H(\lambda)$-аналитическая функция.

В самом деле, как мы отметили выше, $P_j(t,\lambda)$ $(t\in L,\ \lambda\in B,\ j=0,1,\ldots,M)$ — $H(\lambda)$-аналитические функции. Далее, в силу того, что функция $\left(1-\frac{t}{t_1}\right)^k\ln\left(1-\frac{t}{t_1}\right)$ $(k\geqslant 1)$ есть H-функция относительно каждого из переменных t, t_1 на L, то все функции

$$K_j(t,t_1)(t-t_1)\qquad (j=0,1,\ldots,M-1)$$

суть H-функции относительно каждого из переменных.

Нам остается исследовать функцию

$$\Phi(t,t_1;\lambda)=\int_0^t Q(t,\zeta;\lambda)\left(1-\frac{\zeta}{t_1}\right)^{M-1}\ln\left(1-\frac{\zeta}{t_1}\right)d\zeta.$$

Очевидно, $\Phi(t,t_1;\lambda)$ $(t,t_1\in L,\ \lambda\in B)$ есть $H(\lambda)$-аналитическая функция. В самом деле, мы указали выше, что $Q(t,\zeta;\lambda)$ $(t\in L,\ \zeta\in S+L,\ \lambda\in B)$ есть $H(\lambda)$-аналитическая функция, а тогда, в силу замечания к теореме 4 § 2, при $M>1$ получается справедливость нашего утвержде-

* На этом случае особо не останавливаемся.

ния относительно функции $\Phi(t, t_1; \lambda)$. Что касается случая $M=1$, то для него вышеуказанное утверждение вытекает из преобразования

$$\int_0^t Q(t, \zeta; \lambda) \ln\left(1-\frac{\zeta}{t_1}\right) d\zeta = Q(t, t; \lambda) R(t, t_1) - \int_0^t R(\zeta, t) \frac{\partial Q(t, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta,$$

где

$$R(t, t_1) = \int_0^t \ln\left(1-\frac{\zeta}{t_1}\right) d\zeta = (t-t_1) \ln\left(1-\frac{t}{t_1}\right) - t.$$

Покажем теперь, что сингулярное интегральное уравнение (4.2) вполне эквивалентно краевой задаче $\mathfrak{A}_1$.

Из вышесказанного вытекает, что всякому решению $\varphi(z)$ задачи $\mathfrak{A}_1$ соответствует решение $\psi(t)$ уравнения (4.2), представляющее H-функцию на L. Покажем обратное. Пусть $\psi(t)$ есть решение уравнения (4.2), представляющее H-функцию. Тогда по формуле (4.1) ему соответствует решение задачи $\mathfrak{A}_1$.

Сингулярное интегральное уравнение типа (4.2) было предметом исследования многих авторов. В этой работе мы пользуемся результатами И. Н. Векуа ([3]). Наше интегральное уравнение (4.2) удовлетворяет всем условиям регулярности, требуемым в вышеупомянутой теории. Нам остается только установить нормальность сингулярного уравнения (4.2). Вычисления показывают, что

$$A^2(t, \lambda) + \pi^2 B^2(t, \lambda) = 4(M-1)!\, 2\pi^2 t^{2(1-M)} P_M P_M^*, \tag{4.5}$$

где $B(t, \lambda) = K(t, t; \lambda)$.

В силу нормальности рассматриваемой краевой задачи $\mathfrak{A}$ и на основании формулы (3.13), $A^2(t, \lambda) + \pi^2 B^2(t, \lambda)$ при любом $\lambda \in B$ нигде на L не обращается в нуль. Следовательно, уравнение (4.2) нормально при любом $\lambda \in B$.

Таким образом, интегральное уравнение (4.2) удовлетворяет всем условиям вышеупомянутой теории сингулярного интегрального уравнения.

Далее, нетрудно установить, что индекс уравнения (4.2) определяется формулой

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} L = n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{A(t, \lambda) + \pi i B(t, \lambda)}{A(t, \lambda) - \pi i B(t, \lambda)}\right]_L = \\ &= 2M + \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{P_M^*(t, \lambda)}{P_M(t, \lambda)}\right]_L, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где под $[\ ]_L$ подразумевается приращение величины, находящейся внутри скобок, при полном движении точки t по контуру L.

§ 5. **Исследование краевой задачи.** В этом параграфе мы приводим теоремы, которые устанавливают некоторые признаки для разрешимости проблем, поставленных в § 1 настоящей работы.

Сначала приведем основные теоремы, которые были частично доказаны в предыдущих параграфах.

ТЕОРЕМА 1. *Краевая задача* $\mathfrak{A}$ *вполне эквивалентна краевой задаче* $\mathfrak{A}_1$, *т. е. всякому регулярному решению* u *задачи* $\mathfrak{A}$ *соответствует единственная* H_M*-голоморфная функция* $\varphi(z)$, *представляющая решение задачи* $\mathfrak{A}_1$ *и, наоборот, всякому решению* $\varphi(z)$ *задачи* $\mathfrak{A}_1$ *соответствует единственная функция* u, *представляющая регулярное решение задачи* $\mathfrak{A}$, *причем эти решения связаны равенством* (3.1).

Доказательство вытекает из § 3.

ТЕОРЕМА 2. *Краевая задача* $\mathfrak{A}_1$ *вполне эквивалентна сингулярному интегральному уравнению*

$$L\psi = b, \tag{5.1}$$

т. е. всякому решению $\varphi(z)$ *краевой задачи* $\mathfrak{A}_1$ *соответствует единственная вещественная функция* $\psi(t)$, *представляющая решение интегрального уравнения* (5.1), *и наоборот, причем эти решения связаны равенством* (4.1).

(Здесь и в дальнейшем под решением уравнения (5.1) понимается его непрерывное на L решение, которое по виду самого уравнения (5.1) является H-функцией на L).

Из этих двух теорем непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Краевая задача* $\mathfrak{A}$ *вполне эквивалентна сингулярному интегральному уравнению* (5.1).

ТЕОРЕМА 4. *Однородная краевая задача* $\mathfrak{A}^0$ *вполне эквивалентна однородному интегральному уравнению*

$$L\psi = 0. \tag{5.2}$$

В самом деле, на основании (3.1) и (4.1), всякому нетривиальному (тривиальному) решению $\mathfrak{A}^0$ соответствует нетривиальное (тривиальное) решение (5.2) и наоборот.

Если λ—фундаментальное число краевой задачи $\mathfrak{A}$ с рангом, равным r, то оно является фундаментальным числом уравнения (5.2) с тем же рангом, т. е. $r = l$, где l—ранг фундаментального числа уравнения (5.2). Следовательно, спектры краевой задачи $\mathfrak{A}^0$ и уравнения (5.2) совпадают.

Для формулировки остальных теорем введем очень важное число, характеризующее с некоторой точки зрения краевую задачу $\mathfrak{A}$: индекс интегрального уравнения [3] (5.1) будем называть и н д е к с о м соответствующей краевой задачи $\mathfrak{A}$ и обозначать через n ($n = \operatorname{ind}\mathfrak{A}$), определяя этот индекс по формуле (4.6).

Отметим, что индекс краевой задачи $\mathfrak{A}$ есть функция параметра λ, который непосредственно определяется коэффициентами уравнения (1.1) и граничного условия (1.2). Следовательно,

$$\operatorname{ind}\mathfrak{A} = \operatorname{ind}\mathfrak{A}^0.$$

Для облегчения чтения настоящей статьи мы приводим ниже одну теорему, имеющую существенное значение для теории сингулярных интегральных уравнений [3]:

ТЕОРЕМА А. *Если* $\operatorname{ind} L_0 = n \geqslant 0$, *то уравнение*

$$L_0\psi \equiv A\psi - B\int \frac{\psi(t_1)}{t_1 - t}\, dt_1 = b \tag{5.3}$$

разрешимо для любой b *и решение дается формулой*

$$\psi = B_0\gamma b + aP_{n-1};$$

если же $n < 0$, *то уравнение* (5.3) *имеет решение тогда и только тогда, когда соблюдены условия:*

$$(b, \gamma t^k) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, -n-1),$$

причем решение в этом случае единственно и определяется формулой

$$\varphi = B_0\gamma b.$$

Однородное уравнение $L_0\psi = 0$ *имеет* n *линейно независимых решений при* $n > 0$ *и не имеет решения при* $n \leqslant 0$.

В этой теореме $P_{n-1}(t)$ обозначает полином $(n-1)$-ой степени с произвольными комплексными коэффициентами ($P_{n-1}(t) = 0$ при $n = 0$),

$$B\psi \equiv a\psi + b\int \frac{\psi(t_1)}{t_1 - t}\, dt_1,$$

$$a = \frac{A}{(A^2 + \pi^2 B^2)\gamma}, \qquad b = \frac{B}{(A^2 + \pi^2 B^2)\gamma},$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{t^n}{A^2 + \pi^2 B^2}} \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int \left(\ln \frac{A(t_1) + i\pi B(t_1)}{A(t_1) - i\pi B(t_1)}\, t_1^n\right)\frac{dt_1}{t_1 - t}\right].$$

Из теорем 4 и 5 второй работы [3] вытекает

ТЕОРЕМА 5. *Если* $\operatorname{ind} \mathfrak{A} \geqslant 0$, *то задача* $\mathfrak{A}$ *вполне эквивалентна регулярному интегральному уравнению Фредгольма* *

$$L_0' L\psi = L_0' b, \tag{5.4}$$

где

$$L_0'\psi \equiv A(t, \lambda)\psi(t) + \int \frac{B(t_1, \lambda)}{t_1 - t}\psi(t_1)\, dt_1 \tag{5.5}$$

и $B(t, \lambda) \equiv K(t, t; \lambda)$.

Если $\operatorname{ind} \mathfrak{A} \leqslant 0$, *то задача* $\mathfrak{A}$ *вполне эквивалентна регулярному интегральному уравнению Фредгольма*

$$L L_0'\chi = b, \tag{5.6}$$

где

$$L_0'\chi = \psi. \tag{5.7}$$

ТЕОРЕМА 6. *Если* $\operatorname{ind} \mathfrak{A}^0 \geqslant 0$, *то задача* $\mathfrak{A}^0$ *вполне эквивалентна однородному регулярному интегральному уравнению*

$$L_0' L\psi = 0, \tag{5.8}$$

т. е., если λ *есть какое-нибудь фундаментальное число задачи* $\mathfrak{A}^0$ *с рангом, равным* r, *то оно является также фундаментальным числом уравнения* (5.8) *с тем же рангом и наоборот, причем соответствующие фундаментальные функции* $\mathfrak{A}^0$ *и* (5.8) *связаны формулой* (4.1).

---

* Под регулярным интегральным уравнением будем понимать как регулярное, так и квази-регулярное интегральные уравнения в смысле определений И. И. Привалова [4].

Доказательство теоремы получается из представления (4.1) и из того, что по условию теоремы $\operatorname{ind} L_0' \leqslant 0$ ([3]).

Отметим, что если $\operatorname{ind} \mathfrak{A}^0 < 0$, то краевая задача $\mathfrak{A}^0$ не вполне эквивалентна уравнению

$$L L_0' \chi = 0. \qquad (5.9)$$

В самом деле, мы знаем, что если u есть решение (нетривиальное) задачи $\mathfrak{A}^0$, то ему соответствует решение (нетривиальное) (5.9), которое определяется равенством (5.7). Но здесь $\operatorname{ind} L_0' > 0$. Следовательно, ψ соответствует не одно единственное решение уравнения $L_0' \chi = \psi$, так как $L_0' \chi = 0$ имеет $\operatorname{ind} L_0'$ нетривиальных решений (см. теорему А).

Таким образом, спектры задачи $\mathfrak{A}^0$ и уравнения (5.9) не совпадают, и спектр $\mathfrak{A}^0$ принадлежит спектру уравнения (5.9). Далее, если r— ранг некоторого фундаментального числа $\lambda \in \Lambda$ для задачи $\mathfrak{A}^0$, то $r \leqslant r'$, где r'—ранг того же числа λ относительно (5.9).

Наконец, имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Краевая задача $\mathfrak{A}$ вполне эквивалентна регулярному интегральному уравнению*

$$(L_1 L)(L_1 L)_0' \rho = L_1 b, \qquad (5.10)$$

где

$$(L_1 L)_0' \rho = \psi, \qquad (5.11)$$

$$L_1 f \equiv f(t) - \frac{t^k - a}{\pi i (t^k + a)} \int \frac{f(t_1)}{t_1 - t} dt, \qquad (5.12)$$

$(L_1 L)_0$ — характеристическая часть оператора $L_1 L$, a — число, удовлетеоряющее только условию $t_k + a \neq 0$ на L, k — целое неположительное число, удовлетворяющее только условию $\operatorname{ind} L + k \leqslant 0$ для всех $\lambda \in \Delta$.

В самом деле, легко показать, что $\operatorname{ind} L_1 = k$ *; так как по условию k — неположительное число, то уравнение (5.1) вполне эквивалентно уравнению $L_1 L \psi = L_1 b$ (см. теорему А).

С другой стороны,

$$\operatorname{ind} L_1 L = \operatorname{ind} L_1 + \operatorname{ind} L = k + \operatorname{ind} L \leqslant 0$$

и, следовательно, применима вторая часть теоремы 5, которая приводит к (5.10).

Применим теперь результаты теории сингулярных интегральных уравнений типа (4.2) ([3]) к исследованию краевой задачи $\mathfrak{A}$.

ТЕОРЕМА I. *Каждое фундаментальное число λ краевой задачи $\mathfrak{A}$ имеет конечный ранг.*

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы 3 настоящего параграфа и первой теоремы F. Noether'а.

ТЕОРЕМА II. *Для разрешимости краевой задачи $\mathfrak{A}$ при заданном $\lambda \in \Delta$ необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия*

$$\int_L b(t, \lambda) \psi_j(t) dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, l'), \qquad (5.13)$$

---

* См. первую часть формулы (4.6).

где $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{l'}$ — *полная система линейно-независимых решений соответствующего союзного однородного интегрального уравнения*

$$L'\psi = 0, \tag{5.14}$$

где

$$L'\psi \equiv A(t, \lambda)\,\psi(t) + \int \frac{K(t_1 t; \lambda)}{t_1 - t}\,\psi(t_1)\,dt_1.$$

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы 3 настоящего параграфа и второй теоремы Noether'а ([3]).

ТЕОРЕМА III. *Если при заданном* $\lambda \in \Delta$ $\operatorname{ind} \mathfrak{A}^0 \geqslant 1$, *то* λ *всегда есть фундаментальное число краевой задачи* $\mathfrak{A}^0$ *и его ранг не меньше* $\operatorname{ind} \mathfrak{A}^0$.

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы 3 настоящего параграфа и третьей теоремы Noether'а.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА IV. *Ранг* r *данного фундаментального числа* λ *краевой задачи* $\mathfrak{A}^0$ *равен* $\operatorname{ind} \mathfrak{A}^0$, *если соответствующее союзное уравнение* (5.14) *при указанном* λ *не имеет решения (нетривиального).*

Из третьей теоремы Noether'а следует также

ТЕОРЕМА V. *Если* λ *не есть фундаментальное число союзного уравнения и* $\operatorname{ind} \mathfrak{A}^0 < 0$, *то* λ *не является фундаментальным числом.*

Далее, имеет место

ТЕОРЕМА VI. *Если* $\operatorname{ind} \mathfrak{A}^0 = 0$, *то задача* $\mathfrak{A}$ *всегда разрешима и имеет единственное решение, если соответствующая задача* $\mathfrak{A}^0$ *имеет только нулевое решение.*

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы 3 настоящего параграфа и второй и третьей теорем Noether'а.

Из вышеуказанных теорем усматриваем, что классическая альтернатива в нашем случае, вообще говоря, нарушается. Например, если индекс краевой задачи $\mathfrak{A}$ больше нуля, то одновременно могут иметь решение (нетривиальное) как неоднородная краевая задача $\mathfrak{A}$ при любом $b(t, \lambda)$, так и однородная задача $\mathfrak{A}^0$. В самом деле, пусть $l' = 0$, тогда неоднородная задача $\mathfrak{A}$ имеет решение при любом $b(s, \lambda)$.

Далее, так как по условию $n > 0$, то $l > 0$, т. е. соответствующая однородная задача $\mathfrak{A}^0$ также имеет решение.

Классическая альтернатива нарушается также в случае $n < 0$.

В самом деле, если $l' \neq 0$, то может оказаться, что краевые задачи $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^0$ одновременно не имеют решения (для $\mathfrak{A}^0$ понимается нетривиальное решение).

Перейдем теперь к теоремам, устанавливающим характер зависимости решения краевой задачи $\mathfrak{A}$ от параметра λ.

ТЕОРЕМА VII. *Если индекс нормальной краевой задачи* $\mathfrak{A}$ *равен нулю для всех* $\lambda \in \Delta$, *то или неоднородная задача* $\mathfrak{A}$ *не имеет единственного решения для всех* $b(s, \lambda)$ *при любых* $\lambda \in \Delta$, *или же, если она имеет единственное решение для всех* $b(s, \lambda)$ *по крайней мере для одного значения параметра* $\lambda \in \Delta$, *то она имеет решение при любом*

λ, за исключением, быть может, счетного множества значений λ с точками сгущения, если они существуют, на концах интервала Δ.

Доказательство этой теоремы вытекает из предыдущих результатов и одной теоремы Я. Д. Тамаркина ([5]) [см. также ([6])], которая устанавливает характер зависимости решения интегрального уравнения с ядром, аналитическим относительно параметра λ.

ТЕОРЕМА VIII. *Если индекс нормальной краевой задачи $\mathfrak{A}$ равен нулю для всех $\lambda \in \Delta$, то или она не имеет единственного решения для всех $b(s, \lambda)$ при всех $\lambda \in \Delta$, или же всякое решение $\mathfrak{A}$ есть мероморфная функция параметра λ в том же интервале для всех $(x, y) \in S + L$.*

Справедливость этой теоремы также вытекает из вышеупомянутой теоремы Я. Д. Тамаркина.

ТЕОРЕМА IX. *Если индекс краевой задачи $\mathfrak{A}$ не отрицателен, то спектр однородной задачи $\mathfrak{A}^0$ или непрерывный, т. е. совпадает с интервалом Δ, или же дискретный; в последнем случае фундаментальные числа определяются как вещественные нули функции $D(\lambda)$, где $D(\lambda)$—знаменатель Фредгольма ядра интегрального уравнения* (5.4):

$$D(\lambda) = \sum_{m}^{0,\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_a^b \ldots \int_a^b K \begin{pmatrix} t_1, t_2, \ldots, t_m \\ t_1, t_2, \ldots, t_m \end{pmatrix}; \lambda \Big) \, ds_1 \, ds_2 \ldots ds_m, \tag{5.15}$$

где

$$K \begin{pmatrix} \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_m \\ \beta_1 \, \beta_2 \ldots \beta_m \end{pmatrix}; \lambda \Big) = \begin{vmatrix} K(\alpha_1, \alpha_1; \lambda) & \ldots & K(\alpha_1, \alpha_m; \lambda) \\ K(\alpha_2, \alpha_1; \lambda) & \ldots & K(\alpha_2, \alpha_m; \lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K(\alpha_m, \alpha_1; \lambda) & \ldots & K(\alpha_m, \alpha_m; \lambda) \end{vmatrix}$$

и $K(x, s; \lambda)$ — ядро интегрального уравнения (5.4), *записанного в виде* ([6])

$$\psi(t) = \int K(t, t_1; \lambda) \, \psi(t_1) \, dS + f(t).$$

В случае, если индекс краевой задачи $\mathfrak{A}$ отрицателен, то на основании теорем 1—5 *настоящего параграфа можно утверждать, что некоторые нули функции $D(\lambda)$ ядра уравнения* (5.6) *могут не быть фундаментальными числами соответствующей краевой задачи $\mathfrak{A}$.*

Сектор математики
Ак. Наук Азербайджанской ССР

Поступило
23. IV. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Векуа И., Замечания об общем представлении решений дифференциальных уравнений эллиптического типа, Сообщения Ак. Наук Груз. ССР, т. IV, № 5 (1943), 385—392.

[2] Векуа И., Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложения, Сообщения Ак. Наук Груз. ССР, т. II, № 6 (1941), 477—484.

[3] Векуа И., Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши, Труды Тбилисского матем. института, т. X (1941), 45—72.

[4] Привалов И. И., Интегральные уравнения, М.—Л., 1935.

[5] Tamarkin J. D., On Fredholm's integral equations, whose kernels are analytic in a parametr, Annals of Mathematics, vol. 28 (1927), 127—152.
[6] Халилов З. И., Об одном общем методе решения задачи о собственных значениях, Труды Сектора Математики Ак. Наук Азерб. ССР, т. 1 (1946), 3—40.
[7] Магнарадзе Л., Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками, Труды Тбилисского матем. института, т. IV (1938), 43—76.
[8] Levi E., Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, v. 24 (1907), 275—317 [русский перевод в «Успехах матем. наук», VIII (1941), 249—292].

Z. I. KHALILOV. SUR LES PROBLÈMES AUX LIMITES POUR L'ÉQUATION ELLIPTIQUE

RÉSUMÉ

Dans cet article nous considérons les problèmes aux limites linéaires relatifs à l'équation différentielle:

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(x, y; \lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y; \lambda)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y; \lambda)\, u = 0, \qquad (1.1)$$

où $A \equiv A(x, y; \lambda)$, $B \equiv B(x, y; \lambda)$, $C \equiv C(x, y; \lambda)$ sont les fonctions entières en x, y dans un domaine simple S limité par un contour L possédant en chaque point une courbure; les fonctions A, B, C sont des fonctions analytiques relativement au paramètre λ dans un intervalle Λ (λ_1, λ_2) de l'axe reel du plan de la variable complexe λ.

Sur le contour L nous avons la condition suivante:

$$R(u) \equiv \sum_{0 \leq p+q \leq N} a_{pq}(s, \lambda)\left[\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p\, \partial y^q}\right]_s = b(s, \lambda), \qquad (1.2)$$

où N est un nombre intégral positif qui est plus grand ou plus petit que l'ordre de l'équation (1.1).

Nous supposons que les fonctions $a_{pq}(s, \lambda)$, $b(s, \lambda)$ soient les fonctions analytiques du paramètre λ dans l'intervalle Λ satisfaisants à la condition de Hölder par rapport à $s \in L$.

Nous considérons le problème $\mathfrak{A}$ suivant: étant donnée une valeur de $\lambda \in \Delta$, trouver une fonction réelle et régulière $u = u(x, y)$, qui satisfasse à (1.1) dans le domaine S aussi bien qu'à la condition (1.2) sur le contour L.

Le problème homogène $(b(s, \lambda) \equiv 0)$ est désigné par $\mathfrak{A}^0$. Dans cet article nous considérons les problèmes normals (voir condition (3.10) de l'article présent).

Dans cet article nous construisons à l'aide de quelques résultats de Elias Vecoua ([1]), ([2]), ([3]) une équation intégrale singulière suivante:

$$L(\psi) \equiv A(t, \lambda)\, \psi(t) - \int_L \frac{K(t, t_1; \lambda)}{t_1 - t}\, \psi(t_1)\, dt_1 = b(t, \lambda), \qquad (4.2)$$

où les fonctions $A(t, \lambda)$, $K(t, t_1; \lambda)$ s'obtiennent des formules (4.3), (4.4); $b(t, \lambda) \equiv b(s, \lambda)$; $\psi(t)$ est une fonction réelle, si $\lambda \in \Delta$.

Solution du problème $\mathfrak{A}$ est

$$u(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\left[\alpha(z, \lambda)\varphi(z) + \int_0^z \beta(z, \zeta; \lambda)\varphi(\zeta)\,d\zeta\right], \tag{3.1'}$$

$\varphi(z)$ est ici une fonction holomorphe dans le domaine S, déterminée par l'expression

$$\varphi(z) = \int_L \psi(t)\left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{M-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+1\right]dt, \tag{4.1}$$

où M est un nombre intégral positif $\leqslant N$.

Pour le problème $\mathfrak{A}$ le nombre

$$n \equiv n(\lambda) = \mathrm{ind}\, L = 2M + \frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{P_M^*(t,\lambda)}{P_M(t,\lambda)}\right\}_L, \tag{4.6}$$

qui s'appelle l'index du problème $\mathfrak{A}$, joue un rôle important.

Ensuite, à l'aide de la théorie des équations intégrales singulières nous démontrons quelques théorèmes qui établissent des conditions pour l'existence et l'unicité des solutions du problème $\mathfrak{A}$, quelques propriétés du spectre du problème $\mathfrak{A}^0$ et le caractère de la dépendance de la solution du problème inhomogène $\mathfrak{A}$.

Les théorèmes importants sont les suivants:

THÉORÈME I. *Le rang de chaque nombre fondamental du problème* $\mathfrak{A}^0$ *est fini.*

THÉORÈME II. *Pour que la solution du problème* $\mathfrak{A}$ *existe pour* $\lambda \in \Delta$ *donné, il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\int_L b(t, \lambda)\psi_j(t)\,dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, l') \tag{5.13}$$

où $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{l'}$ *sont le système complet des fonctions fondamentales de l'équation*

$$L'\varphi = 0 \tag{5.14}$$

et L' *est l'opérateur associé.*

THÉORÈME III. *Si pour une valeur* λ *on a* $n = \mathrm{ind}\,\mathfrak{A}^0 \geqslant 1$ *alors* λ *est un nombre fondamental du problème* $\mathfrak{A}^0$ *et son rang est* $\geqslant n$.

THÉORÈME VI. *Si* $\mathrm{ind}\,\mathfrak{A}^0 = 0$, *le problème* $\mathfrak{A}$ *a une solution, si le problème* $\mathfrak{A}^0$ *correspondant ne possède que la solution triviale* ($u \equiv 0$).

THÉORÈME VIII. *Si* $\mathrm{ind}\,\mathfrak{A} = 0$ *pour tout* $\lambda \in \Delta$, *alors* $\mathfrak{A}$ *n'a pas de solution pour tout les* $b(s, \lambda)$ *avec tous les* $\lambda \in \Delta$, *ou bien chaque solution du problème* $\mathfrak{A}$ *est une fonction méromorphe de la variable* λ *pour tous* $(x, y) \in S + L$.

THÉORÈME X. *Si* $\mathrm{ind}\,\mathfrak{A} \geqslant 0$, *alors le spectre* $\mathfrak{A}^0$ *est continu, c'est-à-dire qu'il coïncide avec l'intervalle* Δ, *ou bien il est discret. Dans le second cas le spectre est composé des zéros de la fonction* $D(\lambda)$, *qui est déterminée par la formule* (5.15).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 11 (1947). 363—400 Série mathématique

Н. Я. ВИЛЕНКИН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЛНЫХ ОРТОНОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе изучаются полные ортонормальные системы, возникающие из мультипликативных характеров нульмерных компактных групп.

Пусть G—некоторая компактная абелева группа со второй аксиомой счетности. Тогда, как известно ([1]), с группой G связано счетное множество функций, непрерывных на G и удовлетворяющих уравнению

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y).$$

Эти функции называются *мультипликативными характерами* группы G и образуют полную ортонормированную систему функций на G, которую будем обозначать через X. Отметим, что все свойства системы X рассматриваются относительно меры Хаара ([1]) на группе G.

Из полноты системы X следует, что для любой функции $f(x) \in L^2$ ряд Фурье $\mathfrak{S}(f)$ относительно системы X сходится в среднем. Более тонкие результаты, как например, результаты о сходимости почти всюду, о суммируемости ряда Фурье и др. рассматривались лишь для того случая, когда группа G является группой вращения окружности. В этом случае X есть обычная система функций $e^{2\pi i n x}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $0 \leqslant x < 1$).

В настоящей работе мы показываем, что система мультипликативных характеров нульмерной компактной абелевой группы со второй аксиомой счетности обладает рядом свойств, аналогичных свойствам системы тригонометрических функций.

Как показал Фрейденталь ([2]), существует отображение любой компактной группы со второй аксиомой счетности на отрезок $[0,1]$, сохраняющее меру. Поэтому все результаты настоящей работы могут быть истолкованы как результаты, относящиеся к ортогональным системам функций действительного переменного, образующим периодическую счетную абелеву группу по умножению. Напомним, что группа характеров нульмерной группы периодична.

Частным случаем систем, изучаемых в нашей работе, является система Вальша ([3]). Эта система есть система характеров группы G,

являющейся топологической прямой суммой циклических групп второго порядка.

В § 1 мы вводим в счетную периодическую абелеву группу X упорядочивание. Применяя этот порядок к характерам компактной нульмерной абелевой группы G, мы получаем упорядоченную полную ортонормированную систему.

В § 2 оцениваются ядро Дирихле и функции Лебега системы X ([3]). Так же как и для тригонометрических систем, мы получаем, что функции Лебега постоянны на G и растут, как $\ln n$.

В § 3 изучается сходимость рядов Фурье для системы X и «симметризованной» системы $\dot{X}$. В группу G вводится порядок, определяются функции ограниченной вариации и доказывается аналог теоремы Дирихле. Для примарных групп доказывается аналог признака Дини—Липшица равномерной сходимости рядов Фурье ([4]).

§ 4 посвящен вопросу о суммируемости рядов Фурье методом Фейера. Доказывается теорема, аналогичная теореме Фейера.

В § 5 исследуется абсолютная сходимость рядов по системе X. В § 6 доказывается теорема единственности.

§ 1. Упорядочивание счетной периодической абелевой группы

1.1. Пусть X—счетная периодическая абелева группа. Тогда существует возрастающая цепочка конечных подгрупп

$$0=X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_n\subset\cdots \tag{1}$$

такая, что

$$\coprod_{n=0}^{\infty} X_n=X.$$

Очевидно, цепочку (1) можно выбрать так, чтобы все фактор-группы X_n/X_{n-1} были циклическими группами простого порядка p_n. Обозначим $p_1p_2p_3\cdots p_n$ через m_n.

Упорядочим теперь элементы группы X следующим образом. Положим $\chi_0=0$. Пусть уже упорядочены все элементы подгруппы X_n: $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{m_n-1}$. Выберем в $X_{n+1}\setminus X_n$ элемент χ, имеющий наименьший порядок среди элементов из $X_{n+1}\setminus X_n$, и обозначим его через χ_{m_n}. Для всякого k такого, что $m_n\leqslant k<m_{n+1}$, положим

$$\chi_k=a\chi_{m_n}+\chi_b,$$

где

$$k=am_n+b,\quad 1\leqslant a<p_{n+1},\quad 0\leqslant b<m_n.$$

Тогда упорядочиваются все элементы подгруппы X_{n+1}. Продолжая далее этот процесс, мы пронумеруем все элементы группы X.

1.2. Введем «каноническую запись» целых чисел:

$$k=a_0m_0+a_1m_1+\ldots+a_nm_n,$$

где $0 \leqslant a_l < p_{l+1}$, $m_0 = 1$. Тогда, как легко показать,

$$\chi_k = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{m_i}.$$

1.3. Если $p_1 \neq p_i$ при $2 \leqslant i \leqslant n$, то элементы $\chi_0, \chi_{p_1}, \chi_{2p_1}, \ldots, \chi_{m_n - p_1}$ группы X образуют подгруппу. В самом деле, тогда подгруппа X_1 является максимальной примарной по p_1 подгруппой в X_n, а потому есть прямое слагаемое в подгруппе X_n. Отсюда следует, что в каждом смежном классе группы X_n по X_1, не совпадающем с X_1, найдется элемент, порядок которого не делится на p_1. Тогда, в силу выбора элементов $\chi_{m_1}, \chi_{m_2}, \ldots \chi_{m_{n-1}}$, их порядки не делятся на p_1, равно как и порядки элементов $\chi_{p_1}, \chi_{2p_1}, \ldots \chi_{m_n - p_1}$, так как эти последние представимы в виде $\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{m_k}$. Порядки же всех остальных элементов из X_n делятся на p_1, так как они имеют вид

$$\chi_k = a\chi_1 + \chi_{l_{p_1}}, \quad a \neq 0.$$

Поэтому элементы $\chi_{k_{p_1}}$ $(k = 1, 2, \ldots, m_{n-1} - 1)$ образуют подгруппу группы X_n, состоящую из всех элементов, порядок которых не делится на p_1.

1.4. Пусть теперь G—нульмерная компактная абелева группа со второй аксиомой счетности. Тогда, как мы упоминали, группа мультипликативных характеров X будет дискретной счетной периодической группой и к ней применимо все вышеизложенное.

Аннулятор X_n мы будем обозначать через

$$[G; X_n] = G_n.$$

Очевидно, G_n есть открытая подгруппа в G индекса m_n. Так как $\prod_{n=0}^{\infty} X_n = X$, то $\prod_{n=0}^{\infty} G_n = 0$. Легко видеть, что $G_n \supset G_{n+1}$.

Отметим некоторые свойства системы X.

1.41. Если $p_l \neq p_j$ при $j < l$, то $\chi_{m_{l-1}}$ принимает лишь значения $e^{\frac{2\pi ikp}{p_l}}$ $(0 \leqslant k < p_l)$. В самом деле, из того, что p_l взаимно просто с m_{l-1}, следует, что подгруппа X_{l-1} является прямым слагаемым в подгруппе X_l, а потому в $X_l \setminus X_{l-1}$ содержится элемент порядка p_l. Но тогда и порядок $\chi_{m_{l-1}}$ равен p_l и значит $\chi_{m_{l-1}}$ может принимать лишь вышеуказанные значения.

1.42. Если функции системы X рассматривать лишь на подгруппе G_n, то значения двух характеров, принадлежащих к одному смежному классу по X_n, совпадают. Поэтому система функций $\chi_0, \chi_{m_n}, \ldots \chi_{km_n}, \ldots$ образует на G_n группу. Эта группа изоморфна фактор-группе X / X_n.

1.5. В дальнейшем систему X с заданным в ней вышеописанным образом порядком мы будем обозначать через $\hat{X}$.

Наряду с $\hat{X}$ мы будем рассматривать и «симметричный» с ним порядок $\chi_0^1, \chi_1^1, \ldots, \chi_n^1, \ldots$, полагая $\chi_n^1 = \chi_n^{-1}$. Очевидно, что $\chi_n^{-1} = \overline{\chi}_n$. Упорядоченную таким образом группу X будем обозначать через $\tilde{X}$.

§ 2. Ядро Дирихле и функции Лебега

2.1. Напомним, что n-м ядром Дирихле ортонормированной системы функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x) \ldots$ называется выражение

$$D_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)},$$

а n-й функцией Лебега называется функция

$$L_n(y) = \int_G |D_n(x, y)|\, dx.$$

Для ортонормальной системы $\hat{X}$ имеем

$$D_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \chi_i(x-y).$$

Поэтому

$$L_n(y) = \int_G \left| \sum_{i=0}^{n} \chi_i(x-y) \right| dx = \int_G \left| \sum_{i=0}^{n} \chi_i(x) \right| dx$$

(в силу инвариантности меры Хаара) и, следовательно, для систем $\hat{X}$ можно говорить не о функциях Лебега, а о константах Лебега. Будем обозначать их через L_n.

2.2. Обозначим $D_n(x, 0)$ через $D_n(x)$. Тогда $D_{m_k}(x) = m_k$ при $x \in G_n$ и $D_{m_k}(x) = 0$ при $x \notin G_k$. В самом деле,

$$D_{m_k}(x) = \sum_{t=0}^{m_k-1} \chi_t(x) = \prod_{t=0}^{k-1} \left(\sum_{i=0}^{p_{t+1}-1} \chi_{m_t}^{i}(x) \right) = \prod_{t=0}^{k-1} \frac{1-\chi_{m_t}^{p_{t+1}}(x)}{1-\chi_{m_t}(x)}.$$

Пусть $x \in G_t \setminus G_{t+1}$ и $\chi_{m_t} \in X_{t+1} \setminus X_t$. Тогда $\chi_{m_t}^{p_{t+1}} \in X_t$, откуда $\chi_{m_t}^{p_{t+1}}(x) = 1$. С другой стороны, $\chi_{m_t}(x) \neq 1$, так как иначе при $y \in G_t$ и $\chi_{m_t} \in X_t$ мы имели бы $\chi_{m_t}(y) \equiv 1$. Поэтому

$$1-\chi_{m_t}(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \notin G_{t+1}$$

и

$$1-\chi_{m_t}^{p_{t+1}}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in G_t.$$

Итак, $D_{m_k}(x) = 0$ при $x \notin G_k$.

Если же $x \in G_k$, то $\chi_i(x) = 1$ при $i \leqslant m_k - 1$ и $D_{m_k}(x) = m_k$.

2.3. Пусть $m = \sum_{i=0}^{k} a_i m_i$. Обозначим $\sum_{i=t}^{k} a_i m_i$ через l_{k-t}, $k-t$—через t' и положим $l_{-1} = 0$. Тогда

$$D_m(x) = \sum_{t=0}^{k} D_{m_t}(x) \frac{1-\chi_{m_t}^{a_t}(x)}{1-\chi_{m_t}(x)} \chi_{l_{t'-1}}(x).$$

В самом деле (ради краткости опускаем аргумент x),

$$D_m = \sum_{t=0}^{k} \sum_{n=l_{t-1}}^{l_t - 1} \chi_n,$$

$$\sum_{n=l_{t-1}}^{l_t-1} \chi_n = \sum_{r=0}^{a_{t'}-1} \sum_{n=l_{t-1}+rm_{t'}}^{l_{t-1}+(r+1)m_{t'}-1} \chi_n = \sum_{r=0}^{a_{t'}-1} \sum_{n=rm_{t'}}^{(r+1)m_{t'}-1} \chi_{l_{t-1}} \chi_n =$$

$$= \chi_{l_{t-1}} \sum_{r=0}^{a_{t'}-1} \chi_{m_{t'}}^r \sum_{n=0}^{m_{t'}-1} \chi_n = \chi_{l_{t-1}} \sum_{r=0}^{a_{t'}-1} D_{m_{t'}} \chi_{m_{t'}}^r = \chi_{l_{t-1}} D_{m_{t'}} \frac{1-\chi_{m_{t'}}^{a_{t'}}}{1-\chi_{m_{t'}}}.$$

Таким образом,

$$D_m = \sum_{t=0}^{k} \chi_{l_{t-1}} D_{m_{t'}} \frac{1-\chi_{m_{t'}}^{a_{t'}}}{1-\chi_{m_{t'}}} = \sum_{t=0}^{k} D_{m_t} \frac{1-\chi_{m_t}^{a_t}}{1-\chi_{m_t}} \chi_{l_{t'-1}}.$$

2.31. Но так как при любом t

$$\chi_m = \chi_{l_{t'-1}} \chi_{m_t}^{a_t} \cdots \chi_{m_1}^{a_1} \chi_1^{a_0},$$

то

$$D_m = \chi_m \sum_{t=0}^{k} \frac{D_{m_t}}{\chi_1^{a_0} \chi_{m_1}^{a_1} \cdots \chi_{m_t}^{a_t}} \frac{1-\chi_{m_t}^{a_t}}{1-\chi_{m_t}}.$$

Заметим, что вне G_t $D_{m_t} = 0$, а на G_t все $\chi_{m_l} = 1$ при $l < t$. Поэтому

$$D_m = \chi_m \sum_{t=0}^{k} \frac{D_{m_t}}{\chi_{m_t}^{a_t}} \frac{1-\chi_{m_t}^{a_t}}{1-\chi_{m_t}}.$$

Мы получили выражение для ядра Дирихле системы $\hat{X}$. Очевидно, для системы $\tilde{X}$ ядро Дирихле имеет вид

$$\tilde{D}_m = \bar{\chi}_m \sum_{t=0}^{k} \frac{D_{m_t}}{\bar{\chi}_{m_t}^{a_t}} \frac{1-\overline{\chi_{m_t}^{a_t}}}{1-\bar{\chi}_{m_t}}.$$

Мы будем в дальнейшем рассматривать систему

$$\dot{X} = \dot{\chi}_0, \dot{\chi}_1, \ldots, \dot{\chi}_n, \ldots,$$

где $\chi_n = \mathrm{Re}\,\chi_n$. Для этой системы

$$\dot{D}_m = \mathrm{Re}\left(\chi_m \sum_{t=0}^{k} \frac{D_{m_t}}{\chi_{m_t}^{a_t}} \frac{1-\chi_{m_t}^{a_t}}{1-\chi_{m_t}}\right).$$

2.4. При любом простом p имеет место неравенство

$$J_{p,a} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1-e^{\frac{2\pi k a}{p}i}}{1-e^{\frac{2\pi k}{p}i}} < \frac{p}{2}[\ln a + 5], \text{ где } a < p. \tag{2}$$

Неравенство (2) справедливо при $p=2$. Пусть $p>2$; тогда

$$J_{p,a} = \sum_{k=0}^{p-1}\left|\frac{\sin\frac{\pi k a}{p}}{\sin\frac{\pi k}{p}}\right| = a + 2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left|\frac{\sin\frac{\pi k a}{p}}{\sin\frac{\pi k}{p}}\right| =$$

$$= a + 2\sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{a}\right]}\left|\frac{\sin\frac{\pi k a}{p}}{\sin\frac{\pi k}{p}}\right| + 2\sum_{k=\left[\frac{p}{a}\right]+1}^{\frac{p-1}{2}}\left|\frac{\sin\frac{\pi k a}{p}}{\sin\frac{\pi k}{p}}\right|.$$

Заметим, что

$$\left|\frac{\sin\frac{\pi k a}{p}}{\sin\frac{\pi k}{p}}\right| \leqslant a.$$

Далее, при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ и поэтому при $1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}$

$$\left|\frac{\sin\frac{\pi k a}{p}}{\sin\frac{\pi k}{p}}\right| < \frac{p}{2k}.$$

Следовательно,

$$J_{p,a} \leqslant a + 2\left(a\left[\frac{p}{a}\right] + \frac{p}{2}\sum_{k=\left[\frac{p}{a}\right]+1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{k}\right) \leqslant 2p + \frac{p}{2}\ln a + C \leqslant \frac{p}{2}[\ln a + 5],$$

где C — постоянная Эйлера.

2.41. При любом $p>2$

$$\sum_{k=0}^{p-1}\left|\frac{\sin\frac{\pi k(p-1)}{2p}}{\sin\frac{\pi k}{p}}\right| > \frac{p\ln p}{\pi} + \frac{1}{2\pi}.$$

самом деле,

$$\sum_{k=0}^{p-1}\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi k}{2p}\right)}{\sin\frac{\pi k}{p}}\right|=\sum_{k=0}^{p-1}\left|\frac{\sin\frac{\pi k}{2}\cos\frac{\pi k}{2p}-\cos\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi k}{2p}}{2\sin\frac{\pi k}{2p}\cos\frac{\pi k}{2p}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1}\left|\frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\sin\frac{\pi k}{2p}}-\frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{\cos\frac{\pi k}{2p}}\right|\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1}\left|\frac{1}{\sin\frac{\pi k}{2p}}\right|\geqslant\frac{p}{\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{k}\geqslant\frac{p\ln p}{\pi}+\frac{1}{2\pi}.$$

2.5. ТЕОРЕМА 1. *Если L_n—n-я константа Лебега системы X, то $L_n=O(\ln n)$.*

Доказательство.

$$L_n=\int_G|D_n(x)|\,dx=\int_G\left|\sum_{t=0}^{k}\frac{D_{m_t}}{\chi_{m_t}^{a_t}}\frac{1-\chi_{m_t}^{a_t}}{1-\chi_{m_t}}\right|dx\leqslant\sum_{t=0}^{k}m_t\int_{G_t}\left|\frac{1-\chi_{m_t}^{a_t}}{1-\chi_{m_t}}\right|dx.$$

Но

$$\int_{G_t}\left|\frac{1-\chi_{m_t}^{a_t}}{1-\chi_{m_t}}\right|dx=\frac{1}{m_{t+1}}\sum_{l=0}^{p_{t+1}-1}\left|\frac{1-e^{\frac{2\pi i a_t l}{p_{t+1}}}}{1-e^{\frac{2\pi i l}{p_{t+1}}}}\right|. \qquad (3)$$

В самом деле, если $x\in G_t$, то $p_{t+1}x\in G_{t+1}$ и потому

$$\chi_{m_t}^{p_{t+1}}(x)=\chi_{m_t}(p_{t+1}x)=1,$$

откуда

$$\chi_{m_t}(x)=e^{\frac{2\pi i l}{p_{t+1}}};$$

легко видеть, что для любого l такого, что $0\leqslant l<p_{t+1}$, множество элементов $x\in G_t$ таких, что $\chi_{m_t}(x)=e^{\frac{2\pi i l}{p_{t+1}}}$, имеет меру $\frac{1}{m_{t+1}}$. Отсюда и следует равенство (3).

Итак,

$$L_n\leqslant\sum_{t=0}^{k}\frac{m_t}{m_{t+1}}\sum_{l=0}^{p_{t+1}-1}\left|\frac{1-e^{\frac{2\pi i a_t l}{p_{t+1}}}}{1-e^{\frac{2\pi i l}{p_{t+1}}}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{k}(\text{in}\,a_k+5)\leqslant\frac{1}{2}[\ln a_k+\ln m_k]+\frac{5k}{2}=O(\ln n).$$

2.6. Покажем теперь, что существует такое B, для которого

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{L_n}{\ln n}>B.$$

Положим

$$n=\sum_{t=0}^{k}a_{2t}m_{2t},$$

где $a_{2t}=\frac{p_{2t+1}-1}{2}$ при $p_{2t+1}\neq 2$ и $a_{2t}=1$ при $p_{2t+1}=2$. Тогда

$$D_n=\chi_n\sum_{t=0}^{k}\frac{D_{m_{2t}}}{\chi_{m_{2t}}^{a_{2t}}}\,\frac{1-\chi_{m_{2t}}^{a_{2t}}}{1-\chi_{m_{2t}}}.$$

Так как при $l>r$ $D_{m_l}(x)=0$ если $x\in G_r$, то (ради краткости опускаем аргумент x)

$$|D_n(x)|=\left|\sum_{t=0}^{s}\frac{D_{m_{2t}}}{\chi_{m_{2t}}^{a_{2t}}}\,\frac{1-\chi_{m_{2t}}^{a_{2t}}}{1-\chi_{m_{2t}}}\right|$$

при $x\in G\setminus G_{2s+2}$.

Поэтому при $x\in G_{2s}\setminus G_{2s+1}$

$$|D_n|>\left|D_{m_{2s}}\frac{1-\chi_{m_{2s}}^{a_{2s}}}{1-\chi_{m_{2s}}}\right|-\sum_{t=0}^{s-1}\left|\frac{D_{m_{2t}}}{\chi_{m_{2t}}^{a_{2t}}}\,\frac{1-\chi_{m_{2t}}^{a_{2t}}}{1-\chi_{m_{2t}}}\right|.$$

Но

$$\sum_{t=0}^{s-1}\left|\frac{D_{m_{2t}}}{\chi_{m_{2t}}}\,\frac{1-\chi_{m_{2t}}^{a_{2t}}}{1-\chi_{m_{2t}}}\right|\leqslant\sum_{t=0}^{s-1}a_{2t}m_{2t}$$

и значит

$$\sum_{t=0}^{s-1}\int\limits_{G_{2s}\setminus G_{2s+1}}\left|\frac{D_{m_{2t}}}{\chi_{m_{2t}}}\,\frac{1-\chi_{m_{2t}}^{a_{2t}}}{1-\chi_{m_{2t}}}\right|dx\leqslant\left(\frac{1}{m_{2s}}-\frac{1}{m_{2s+1}}\right)\sum_{t=0}^{s-1}a_{2t}m_{2t}.$$

Если $x\in G_{2s+1}\setminus G_{2s+2}$, то при $t\leqslant s$ $\chi_{2t}(x)=1$ и, следовательно,

$$|D_n|=\sum_{t=0}^{s}a_{2t}m_{2t}=\frac{m_{2s+1}}{2}.$$

Теперь

$$\int\limits_{G_{2s}\setminus G_{2s+1}}|D_n|\,dx>m_{2s}\int\limits_{G_{2s}\setminus G_{2s+1}}\left|\frac{1-\chi_{m_{2s}}^{a_{2s}}}{1-\chi_{m_{2s}}}\right|dx-\left(\frac{1}{m_{2s}}-\frac{1}{m_{2s+1}}\right)\sum_{t=0}^{s-1}a_{2t}m_{2t}$$

и

$$\int\limits_{G_{2s+1}\setminus G_{2s+2}}|D_n|\,dx=\left(\frac{1}{m_{2s+1}}-\frac{1}{m_{2s+2}}\right)\sum_{t=0}^{s}a_{2t}m_{2t}.$$

Но

$$m_{2s}\int\limits_{G_{2s}\setminus G_{2s+1}}\left|\frac{1-\chi_{m_{2s}}^{a_{2s}}}{1-\chi_{m_{2s}}}\right|dx=m_{2s}\int\limits_{G_{2s}}\left|\frac{1-\chi_{m_{2s}}^{a_{2s}}}{1-\chi_{m_{2s}}}\right|dx-\frac{a_{2s}m_{2s}}{m_{2s+1}}.$$

Следовательно

$$\int\limits_{G_{2s}\setminus G_{2s+1}} |D_n|\,dx = \int\limits_{G_{2s}\setminus G_{2s+1}} |D_n|\,dx + \int\limits_{G_{2s+1}\setminus G_{2s+2}} |D_n|\,dx \geqslant$$

$$\geqslant m_{2s}\int\limits_{G_{2s}} \left|\frac{1-\chi_{m_{2s}}^{a_{2s}}}{1-\chi_{m_{2s}}}\right| dx + \left(\frac{1}{m_{2s}} - \frac{1}{m_{2s+2}}\right)\sum_{t=0}^{s} a_{2t}m_{2t} - \frac{a_{2s}m_{2s}}{m_{2s+1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{m_{2s}}{m_{2s+1}} \sum_{r=0}^{p_{2s+1}-1} \left|\frac{1-e^{\frac{2\pi i r a_{2s}}{p_{2s+1}}}}{1-e^{\frac{2\pi i r}{p_{2s+1}}}}\right| + \frac{m_{2s-1}}{2}\left(\frac{1}{m_{2s}} - \frac{1}{m_{2s+2}}\right) - \frac{1}{2p_{2s+2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\ln p_{2s+1} + \frac{1}{p_{2s}} - \frac{1}{2p_{2s}p_{2s+1}p_{2s+2}} - \frac{1}{2p_{2s+2}} + \frac{1}{2\pi} \tag{4}$$

при $p_{2s+2} > 2$ (см. 2.41) и

$$\int\limits_{G_{2s}\setminus G_{2s+2}} |D_n|\,dx \geqslant 1 + \frac{1}{p_{2s}} - \frac{1}{4p_{2s}p_{2s+2}} - \frac{1}{p_{2s+2}}$$

при $p_{2s+2} = 2$.

Легко проверить, что выражение в правой части (4) положительно при всех значениях p_{2s}, p_{2s+1}, p_{2s+2} и эквивалентно $\ln p_{2s+1}$. Поэтому существует такое A, для которого

$$\int\limits_{G_{2s}\setminus G_{2s+2}} |D_n|\,dx > A\ln p_{2s+1}.$$

Отсюда получаем, что

$$L_n \geqslant \sum_{s=0}^{k} \int\limits_{G_{2s}\setminus G_{2s+2}} |D_n\,dx \geqslant A\sum_{s=0}^{k} \ln p_{2s+1}.$$

Почти не меняя рассуждений, получим

$$L_{n'} \geqslant A\sum_{s=1}^{k} \ln p_{2s}$$

при

$$n' = \sum_{t=0}^{k-1} a_{2t+1}m_{2t+1}.$$

Но так как $n < \frac{2}{3}m_{2k+1}$ и $\ln m_{2k+1} = \sum\limits_{s=0}^{2k+1} \ln p_s$, то

$$L_n \geqslant \frac{A}{2}\ln n.$$

Итак,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L_n}{\ln n} > \frac{A}{2} = B.$$

2.7. Из доказанного легко вытекают следствия:

Следствие I. *Если ряд* $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \ln n$ *сходится, то ряд* $\sum_{n=2}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ *сходится почти всюду.*

Следствие II. *Существует непрерывная функция* $f(x)$ *такая, что при* $x=0$ *ее ряд Фурье по системе* $\hat{X}$ *расходится.*

§ 3. Коэффициенты Фурье и сходимость рядов Фурье относительно систем $\hat{X}$ и $\dot{X}$

3.1. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на G и принимающая комплексные значения. Число

$$c_n = \int_G f(x) \overline{\chi_n(x)}\, dx$$

назовем n-ым коэффициентом Фурье функции $f(x)$ относительно системы $\hat{X}$.

Если $f(x)$ принимает лишь действительные значения и $\chi_n = \overline{\chi}_m$, то $c_n = \overline{c}_m$. Поэтому $c_n = \overline{c_n}'$ где c_n' обозначает n-й коэффициент Фурье функции $f(x)$ относительно системы X.

Ряд

$$\mathfrak{S}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x)$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$ относительно системы $\hat{X}$. Выведем формулу для его частных сумм, которые будем обозначать через $S_n(x)$.

3.11. Очевидно, что

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \chi_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) \int_G f(t) \overline{\chi_k(t)}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_G f(t) \chi_k(x-t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_G f(x-t) \chi_k(t)\, dt =$$

$$= \int_G f(x-t) D_n(t)\, dt.$$

Аналогично для системы $\tilde{X}$

$$\tilde{S}_n(x) = \int_G f(x+t) D_n(t)\, dt.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать «симметричные» частные суммы, т. е.

$$\dot{S}_n(x) = \frac{1}{2}[S_n(x) + \tilde{S}_n(x)].$$

Для них имеем

$$\dot{S}_n(x) = \frac{1}{2}\int_G [f(x+t) + f(x-t)]\, D_n(t)\, dt = \int_G f(x+t)\, \dot{D}_n(t)\, dt.$$

3.2. Выберем для каждого t в $G_t \setminus G_{t+1}$ элемент x_t так, чтобы

$$\chi_{m_t}(x_t) = e^{\frac{2\pi i}{p_{t+1}}}. \tag{5}$$

Возможность подобного выбора очевидна. Любой элемент $x \in G$ может быть записан в виде

$$x = \sum_{t=0}^{\infty} a_t x_t,$$

где для всех t $0 \leqslant a_t < p_{t+1}$. Эта запись, очевидно, однозначна.

Упорядочим теперь группу G лексикографически, полагая $x < y$, где

$$y = \sum_{t=0}^{\infty} b_t x_t, \quad 0 \leqslant b_t < p_{t+1},$$

если $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_k = b_k$, $a_{k+1} < b_{k+1}$.

Разумеется, подобное упорядочивание группы G не однозначно и зависит от выбора элементов $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Пользуясь внесенным в группу G порядком, мы можем определить вариацию функции $f(x)$, заданной на G, считая

$$\operatorname{var} f = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(z_i) - f(z_{i+1})|,$$

причем sup берется по всем системам $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ таким, что $z_k < z_{k+1}$. Если $\operatorname{var} f$ конечна, то мы говорим, что f имеет конечную вариацию.

3.21. Заметим, что понятие вариации мы могли бы ввести иначе. Как мы уже упоминали, можно отобразить группу G на отрезок $[0, 1]$. Это отображение можно выбрать так, чтобы сохранялись мера и порядок почти всех точек. Обозначим это отображение через φ.

Всякой функции $f(x)$, заданной на G, соответствует функция $f[\varphi^{-1}(x)]$, заданная почти всюду на $[0, 1]$. Легко проверить, что если $f(x)$ имеет конечную вариацию, то $f[\varphi^{-1}(x)]$ эквивалентна функции, имеющей конечную вариацию.

3.22. Обычным способом показывают, что всякая функция ограниченной вариации есть разность двух монотонных функций. Для функций ограниченной вариации можно дать оценку c_n, а именно, если $\operatorname{var} f = V$ и $m_k \leqslant n < m_{k+1}$, то $|c_n| \leqslant \frac{V}{m_k}$.

В самом деле,

$$\int\limits_{x+G_k} \overline{\chi_m(x)} = 0.$$

Поэтому

$$|c_n| = \left|\int\limits_G f(x)\overline{\chi_n(x)}\,dx\right| = \left|\sum_{G:G_k}\int\limits_{x+G_k} f(x)\overline{\chi_n(x)}\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{G:G_k}\frac{1}{m_k}\operatorname{osc}(f;\, x+G_k) < \frac{V}{m_k},$$

где $\sum\limits_{G:G_k}$ означает, что сумма распространена на все смежные классы G по G_k, а $\operatorname{osc}(f;\, x+G_k)$ обозначает колебание $f(x)$ на $x+G_k$.

3.3. $\sup|f(x_1)-f(x_2)|$, где $x_1, x_2 \in G$ и $x_1 - x_2 \in G_n$ назовем n-ым модулем непрерывности функции $f(x)$ и обозначим его через $\theta_n(f)$. Для непрерывных функций и только для них $\theta_n(f) \to 0$. Если $\theta_n(f) < \frac{c}{m_n^{\alpha}}$, то мы будем говорить, что $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α и писать $f \in \operatorname{Lip}\alpha$. Отметим, что из $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ не следует, что $f[\varphi^{-1}(x)] \in \operatorname{Lip}\alpha$, но обратное имеет место.

Для всякой функции $f(x)$ имеем

$$|c_m| < \theta_k(f), \text{ если } m_k \leqslant m < m_{k+1}.$$

В самом деле,

$$|c_m| \leqslant \sum_{G:G_k}\frac{1}{m_k}\operatorname{osc}(f;\, x+G_k) < \theta_k(f).$$

3.31. Коэффициенты Фурье всякой интегрируемой функции стремятся к нулю; это следует из того, что $|\chi_k(x)| = 1$.

3.32. Пользуясь порядком, введенным в группу G, можно определить $f(x+0)$ и $f(x-0)$, причем если точка x—крайняя справа или слева, то полагаем $f(x+0) = f(x-0)$.

Очевидно, что для функций ограниченной вариации в каждой точке существуют $f(x+0)$ и $f(x-0)$. Если назвать средним значением функции $f(x)$ в точке y

$$\lim_{s\to\infty} m_s \int\limits_{y+G_s} f(x)\,dx = \tilde{f}(y),$$

то для функций ограниченной вариации в каждой точке

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Отметим, что для интегрируемых функций $\tilde{f}(x)$ существует почти всюду и почти всюду равна $f(x)$. Более того, почти для всех точек $x \in G$

$$\int\limits_{G_s} |f(x+t)-f(x)|\,dt = o\left(\frac{1}{m_s}\right).$$

Такие точки назовем точками Лебега функции $f(x)$.

3.4. ТЕОРЕМА 2. *Если в точке y существует $\tilde{f}(y)$ и функция $f(x) \in L$, то*

$$\lim_{k\to\infty} S_{m_k}(y) = \tilde{f}(y).$$

Доказательство. В самом деле,

$$S_{m_k}(y) = \int\limits_{G} D_{m_k}(t) f(y-t)\,dt = m_k \int\limits_{G_k} f(y-t)\,dt =$$
$$= m_k \int\limits_{G_k+y} f(t)\,dt = \tilde{f}(t) + o(1).$$

Из теоремы 2 вытекает, в частности, что если $f(x)$—непрерывная функция, то всюду $S_{m_k}(y) \to f(y)$. При этом легко показать, что эта сходимость равномерна.

3.5. Обозначим разность $(f y) - f(y+t)$ через $\theta(y, t)$. Тогда при $n = \sum_{t=0}^{k} a_t m_t$ имеем

$$f(y) - S_n(y) = \int\limits_{G} \theta(y, t) D_n(t)\,dt =$$
$$= \sum_{l=0}^{k} \int\limits_{G} \theta(y, t) \frac{\chi_n(t) D_{m_l}(t)[1-\chi_{m_l}^{a_l}(t)]}{\chi_{m_l}^{a_l}(t)[1-\chi_{m_l}(t)]}\,dt =$$
$$= \sum_{l=0}^{k} m_l \int\limits_{G_l} \theta(y, t) \frac{\chi_n(t)[1-\chi_{m_l}^{a_l}(t)]}{\chi_{m_l}^{a_l}(t)[1-\chi_{m_l}(t)]}\,dt =$$
$$= \sum_{l=0}^{k-1} m_l \sum_{G_l : G_{l+1}} \int\limits_{z+G_{l+1}} \theta(y, t) \frac{\chi_n(t)[1-\chi_{m_l}^{a_l}(t)]}{\chi_{m_l}^{a_l}(t)[1-\chi_{m_l}(t)]}\,dt +$$
$$+ m_k \int\limits_{G_k} \theta(y, t) \frac{1-\chi_{m_k}^{a_k}(t)}{1-\chi_{m_k}(t)}\,dt.$$

В силу того, что χ_{m_l} постоянно на $z+G_{l+1}$

$$f(y)-S_n(y)=\sum_{l=0}^{k-1} m_l \sum_{G_l:G_{l+1}} \frac{1-\chi_{m_l}^{a_l}(z)}{\chi_{m_l}^{a_l}(z)[1-\chi_{m_l}(z)]} \int_{z+G_{l+1}} \theta(y,t)\chi_n(t)\,dt+$$

$$+m_k\int_{G_k}\theta(y,t)\frac{1-\chi_{m_k}^{a_k}(t)}{1-\chi_{m_k}(t)}\,dt$$

и потому

$$|f(y)-S_n(y)|\leqslant\sum_{l=0}^{k-1} m_l a_l \sum_{G_l:G_{l+1}} \left|\int_{z+G_{l+1}}\theta(y,t)\chi_n(t)\,dt\right|+$$

$$+m_k a_k\int_{G_k}|\theta(y,t)|\,dt\leqslant\sum_{l=0}^{k-1} m_l a_l \sum_{G_l:G_k}\left|\int_{z+G_k}\theta(y,t)\chi_n(t)\,dt\right|+$$

$$+m_k a_k\int_{G_k}|\theta(y,t)|\,dt.$$

Но так как $\int_{G_k}\chi_n(t)\,dt=0$, то

$$|f(y)-S_n(y)|\leqslant\sum_{l=0}^{k-1}\frac{m_l a_l}{m_k}\sum_{G_l:G_k}\operatorname{osc}[\theta(y,t);\ w+G_k]+$$

$$+m_k a_k\int_{G_k}|\theta(y,t)|\,dt.$$

Положим

$$\max_w \operatorname{osc}[\theta(y,t);\ w+G_k]=\max_w \operatorname{osc}[f(y);\ w+G_k]=\theta_k(f).$$

Тогда, так как $\theta(y,0)=0$, то

$$|f(y)-S_n(y)|\leqslant\sum_{l=0}^{k-1} a_l\,\theta_k(f)+a_k\,\theta_k(f)=\theta_k(f)\sum_{l=0}^{k} a_l.$$

Предположим теперь, что группа G примарна. Тогда все $a_l<p$ и

$$|f(y)-S_n(y)|\leqslant pk\,\theta_k(f).$$

Поэтому, если $\theta_k(f)=o\left(\frac{1}{k}\right)$, то ряд $\mathfrak{S}(f)$ сходится к $f(y)$. Легко видеть, что эта сходимость равномерна.

В частности, если группа G примарна и $f\in\operatorname{Lip}\alpha$, то

$$\theta_k(f)=\frac{1}{p^{k\alpha}}=o\left(\frac{1}{k}\right)$$

и ряд $\mathfrak{S}(f)$ равномерно сходится к $f(y)$.

Отметим, что $k \simeq \ln n$ и потому наше утверждение аналогично признаку Дини—Липшица равномерной сходимости ряда Фурье.

3.6. Докажем некоторые свойства ядра $\dot{D}_n(t)$. Отметим, что свойствами 3.61, 3.62 и 3.63 обладает и ядро $D_n(t)$, для которого они и будут доказаны, так как из справедливости их для $D_n(t)$ вытекает справедливость их для $\dot{D}_n(t)$.

3.61. Если $x \in G \setminus G_n$, то при любом l имеем

$$|D_l(x)| \leqslant m_n.$$

В самом деле, пусть $l = \sum_{i=0}^{k} a_i m_i$. Тогда, в силу того, что $D_{m_i}(t) = 0$ при $i \geqslant n$, имеем

$$|D_l(x)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{D_{m_i}(x)}{\chi_{m_i}^{a_i}(x)} \frac{1-\chi_{m_i}^{a_i}(x)}{1-\chi_{m_i}(x)} \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} a_i m_i \leqslant m_n$$

3.62. При любом l

$$\int_{G \setminus G_n} |D_l(x)|\, dx \leqslant m_n,$$

что вытекает из утверждения 3.61.

3.63. Каково бы ни было целое k и интегрируемая функция $f(x)$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{G \setminus G_k} f(x) D_n(x)\, dx = 0.$$

Для доказательства заметим, что при $n \geqslant m_k$ и $t \in G \setminus G_k$

$$D_n(t) = \chi_n(t) \sum_{i=0}^{k} \frac{D_{m_i}(t)}{\chi_{m_i}^{a_i}(t)} \frac{1-\chi_{m_i}^{a_i}(t)}{1-\chi_{m_i}(t)}.$$

Если $l \equiv p \pmod{m_k}$, где $0 \leqslant p < m_k$, то

$$\frac{D_l(t)}{\chi_l(t)} = \frac{D_p(t)}{\chi_p(t)} = B_p(t)$$

и поэтому

$$\int_{G \setminus G_k} f(x) D_{p+m_k s}(x)\, dx = \int_{G \setminus G_k} f(x) B_p(x) \chi_{p+m_k s}(x)\, dx,$$

откуда (см. 3.31)

$$\lim_{s\to\infty}\int\limits_{G\setminus G_k} f(x)\,D_{p+m_k s}(x)\,dx=0,$$

а значит и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{G\setminus G_k} f(x)\,D_n(x)\,dx=0.$$

Заметим, что из свойств 3.61, 3.62 и 3.63 следует, что для системы $\hat{X}$ выполнен принцип локализации, т. е. сходимость и расходимость ряда Фурье в точке y зависит лишь от поведения функции в окрестности точки y.

3.64. Под $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будем понимать интеграл, распространенный на множество всех элементов $g\in G$ таких, что $a\leqslant g\leqslant b$. Тогда при любых x и n имеем

$$\int\limits_0^x \dot{D}_n(t)\,dt<C,$$

где C не зависит от x и n.

Обозначим

$$\chi_n(t)\,\frac{D_{m_r}(t)}{\chi_{m_r}^{a_r}(t)}\,\frac{1-\chi_{m_r}^{a_r}(t)}{1-\chi_{m_r}(t)}$$

через $D_{n,r}\,(t)$ и пусть $n=\sum\limits_{r=0}^{k} a_r\,m_r$. Тогда

$$D_n(t)=\sum_{r=0}^{k} D_{n,r}(t).$$

Пусть $x\in G_l\setminus G_{l+1}$. Если $r\geqslant l+1$, то (см. обозначения 2.3 и 3.22)

$$\operatorname{Re}\int\limits_0^x D_{n,r}\,dt=\operatorname{Re}\int\limits_{G_r} D_{n,r}\,dt=$$

$$=m_r\operatorname{Re}\sum_{G_r\,:\,G_{r+1}}\ \int\limits_{G_{r+1}+y_s}\chi_{l_{k-r-1}}\,\frac{1-\chi_{m_r}^{a_r}}{1-\chi_{m_r}}\,dt.$$

Но при всех y величина

$$\frac{1-\chi_{m_r}^{a_r}(t)}{1-\chi_{m_r}(t)}$$

постоянна на $G_{r+1}+y$, а

$$\int\limits_{G_{r+1}+y}\chi_{l_{k-r-1}}\,dt=0.$$

Поэтому при $r\geqslant l+1$

$$\operatorname{Re}\int_0^x D_{n,r}(t)\,dt=0.$$

Если $r\leqslant l-1$, то

$$\int_0^x D_{n,r}(t)\,dt=a_r m_r \operatorname{mes}[0,x]<\frac{a_r m_r}{m_l}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Re}\int_0^x\sum_{r=0}^{l-1} D_{n,r}(t)\,dt\leqslant\frac{1}{m_l}\sum_{r=0}^{l-1} a_r m_r\leqslant 1.$$

Рассмотрим теперь

$$\operatorname{Re}\int_0^x D_{n,l}(t)\,dt=\operatorname{Re}\int_0^x \chi_n(t)\frac{D_{m_l}(t)}{\chi_{m_l}^{a_l}(t)}\frac{1-\chi_{m_l}^{a_l}(t)}{1-\chi_{m_l}(t)}\,dt.$$

Пусть

$$x=\sum_{t=l}^{\infty} b_t x_t,$$

где $0\leqslant b_t<p_{t+1}$. Тогда

$$\int_0^x D_{n,l}(t)\,dt=\int_0^{b_l x_l} D_{n,l}(t)\,dt+\int_{b_l x_l}^x D_{n,l}(t)\,dt=A+B.$$

Но так как $\operatorname{mes}[b_l, x_l; x]<\frac{1}{m_{l+1}}$ и $|D_{n,l}(t)|<m_{l+1}$, то

$$B\leqslant 1. \tag{6}$$

Если $n\geqslant m_{l+1}$, то, как легко видеть, $A=0$.

Пусть теперь $m_l\leqslant n<m_{l+1}$, $n=a_l m_l+q$, $q<m_l$. Тогда, так как $\chi_n=\chi_{m_l}^{a_l}\chi_q$ и $\chi_q\equiv 1$ на G_l, то

$$\operatorname{Re}\int_0^{b_l x_l} D_{n,l}(t)\,dt=m_l\operatorname{Re}\int_0^{b_l x_l}\frac{1-\chi_{m_l}^{a_l}(t)}{1-\chi_{m_l}(t)}\,dt.$$

Но подинтегральная функция равна a_l на G_{l+1} и равна

$$\frac{1-e^{\frac{2\pi i a}{p_{l+1}}}}{1-e^{\frac{2\pi i j}{p_{l+1}}}}$$

на jx_l+G_{l+1}. Поэтому

$$\operatorname{Re}\int\limits_0^{b_l x_l} D_{n,l}(t)\,dt = \operatorname{Re}\frac{m_l}{m_{l+1}}\left[a_l + \sum_{j=1}^{b_l}\frac{1-e^{\frac{2\pi i a_l j}{p_{l+1}}}}{1-e^{\frac{2\pi i j}{p_{l+1}}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{p_{l+1}}\left[a_l + \sum_{j=1}^{b_l}\frac{\sin\frac{\pi a_l j}{p_{l+1}}\cos\frac{\pi(a_l-1)j}{p_{l+1}}}{\sin\frac{\pi j}{p_{l+1}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{p_{l+1}}\left[a_l + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{b_l}\left(\frac{\sin\frac{\pi j(2a_l-1)}{p_{l+1}}}{\sin\frac{\pi j}{p_{l+1}}} + 1\right)\right] \leqslant \frac{1}{2p_{l+1}}\sum_{j=1}^{b_l}\frac{\sin\frac{\pi j(2a_l-1)}{p_{l+1}}}{\sin\frac{\pi j}{p_{l+1}}} + 2. \quad (7)$$

3.641. Нам осталось оценить

$$M = \sum_{j=1}^{b_l}\frac{\sin\frac{\pi j(2a_l-1)}{p_{l+1}}}{\sin\frac{\pi j}{p_{l+1}}}.$$

Обозначим для краткости $\frac{(2a_l-1)\pi}{p_{l+1}}$ через α. Тогда

$$\sum_{j=c}^{d}\sin j\alpha = \sum_{j=1}^{d} - \sum_{j=1}^{c-1} = \frac{\cos\frac{2c-1}{2}\alpha - \cos\frac{2d+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} < \frac{\pi}{\alpha} = \frac{2p_{l+1}}{2a_{l-1}}.$$

Но

$$M \leqslant 2p_{l+1} + 2\sum_{j=\left[\frac{p_{l+1}}{2a_{l+1}}\right]}^{\left[\frac{p_{l+1}}{2}\right]}\frac{\sin j\alpha}{\sin\frac{\pi j}{p_{l+1}}}.$$

Так как при $1 \leqslant j \leqslant \left[\frac{p_{l+1}}{2}\right]$

$$\sin\frac{\pi j}{p_{l+1}} \leqslant \sin\frac{\pi(j+1)}{p_{l+1}},$$

то, по теореме Абеля,

$$\sum_{j=\left[\frac{p_{l+1}}{2a_l-1}\right]}^{\left[\frac{p_{l+1}}{2}\right]}\frac{\sin j\alpha}{\sin\frac{\pi j}{p_{l+1}}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2a_l-1}}\,\frac{2p_{l+1}}{2a_l-1} < \frac{\pi}{2}\,\frac{2a_l-1}{\pi}\,\frac{2p_{l+1}}{2a_l-1} = p_{l+1}.$$

В результате получаем

$$M \leqslant 4p_{l+1}. \tag{8}$$

Соотношения (6), (7) и (8) доказывают утверждение.

3.65. Отметим, что при доказательстве свойства 3.64 мы пользовались лишь свойством (5) элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ и потому оно имеет место при любом выборе элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, удовлетворяющих условию (5).

3.7. ЛЕММА. *Каковы бы ни были элементы $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n, \ldots$, определяющие порядок в группе G и удовлетворяющие условию* (5), *для любого элемента $y \in G$ найдутся элементы $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ такие, что*

а) $y = \sum_{i=0}^{k} a_i x_i, \quad 0 \leqslant a_i < p_{i+1},$

б) *для $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ выполнено условие* (5),

в) *почти все $x_n = x'_n$.*

3.71. Для доказательства заметим, что каковы бы ни были целое число b и элемент $z \in G$, всегда найдутся элементы z_1 и z_2 такие, что $z = bz_1 + z_2$. При этом

$$z_2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x'_i \quad (0 \leqslant c_i < p_{i+1}),$$

где из $c_i \neq 0$ следует, что b делится на p_{i+1}. Чтобы показать это, заметим сперва, что сравнение $bv \equiv d \pmod{p_{i+1}}$ разрешимо при любом целом d, если $b \not\equiv 0 \pmod{p_{i+1}}$.

Пусть $z = c_i x'_i$. Тогда найдутся элементы z_1 и z_2 такие, что $z_2 \in G_{i+1}$, $z_1 = vx'_i$ и $z = bz_1 + z_2$ Поэтому, если $z = \sum_{j=0}^{\infty} a_i^{(0)} x'_i$, где все $a_i^{(0)} < p_{i+1}$ и k_1—первый индекс такой, что b не делится на p_{k_1}, то

$$a_{k_1} x'_{k_1} = bz_{k_1}^{(1)} + z_{k_1}^{(2)},$$

где $z_{k_1}^{(2)} = \sum_{i=k_1+1}^{\infty} a_i^{(1)} x'_i$ и поэтому

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(1)} x'_i + bz_{k_1}^{(1)},$$

причем $a_{k_1}^{(1)} = 0$ и все $a_i^{(1)} < p_{i+1}$.

Пусть уже построены элементы $z_{k_1}^{(1)}, z_{k_2}^{(1)}, \ldots, z_{k_{n-1}}^{(1)}$ такие, что

$$z = b \sum_{i=1}^{n-1} z_{k_i}^{(1)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n-1)} x'_i,$$

где все $a_{k_i}^{(n-1)}=0$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ и все $a_i^{(n-1)}<p_{i+1}$. Пусть k_n — первый индекс такой, что $k_n>k_{n-1}$ и b не делится на p_{i+1}. Тогда

$$a_{k_n}^{(n-1)} x'_{k_n}=bz_{k_n}^{(1)}+z_{k_n}^{(2)},$$

где $z_{k_n}^{(2)}=\sum\limits_{i=k_n+1}^{\infty} a_{k_n}^{(n)} x'_i$ и поэтому

$$z=b\sum_{i=1}^{n} z_{k_i}^{(1)}+\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} x'_i,$$

где все $a_{k_i}^{(n)}=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и все $a_i^{(n)}<p_{i+1}$. Продолжая этот процесс по индукции и замечая, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_{k_i}^{(1)}$ сходится к некоторому элементу z_1, так как $z_{k_i}^{(1)}\to 0$, а также, что $a_i^{(n+1)}=a_i^{(n)}=c_i$ при $i<k_{n+1}$, получаем

$$z=b\sum_{i=1}^{\infty} z_{k_i}^{(1)}+\sum_{i=0}^{\infty} c_i x'_i=bz_1+\sum_{i=0}^{\infty} c_i x'_i,$$

где все $c_i<p_{i+1}$, причем из $c_i\neq 0$ следует, что b делится на p_{i+1}.

Вернемся к доказательству леммы 3.7. Пусть

$$y=\sum_{i=0}^{\infty} d_i^{(0)} x'_i.$$

Тогда, согласно 3.71, $y=d_0^{(0)} x_0+z$, где $z_1=\sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i^{(1)} x'_i$, причем из $d_i^{(1)}\neq 0$ следует, что $d_0^{(0)}$ делится на p_{i+1}. Легко видеть также, что $x_0\in x'_0+G_1$.

Пусть уже построены элементы $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ и

$$y=\sum_{i=0}^{k_{n-1}} d_i x_i+z_n,$$

где

$$z_n=\sum_{i=k_{n-1}+1}^{\infty} d_i^{(n)} x'_i, \tag{9}$$

$d_i=d_{k_l}^{(l)}$ при $i=k_l$ и $d_l=0$ при $i\neq k_l$ $(l\leqslant n-1)$. При этом из $d_i^{(n)}\neq 0$ следует, что $d_{k_{n-1}}$ делится на p_{i+1}. Пусть $d_{k_n}^{(n)}$ — первый, не равный нулю коэффициент в (9). Тогда

$$z_n=d_{k_n}^{(n)} x_{k_n}+z_{n+1},$$

где

$$z_{n+1} = \sum_{i=k_n+1}^{\infty} d_i^{(n+1)} x_i'$$

и из $d_i^{(n)} \neq 0$ следует, что d_{k_n} делится на p_{i+1}.

Положим $x_i = x_i'$ для всех i таких, что $k_{n-1} < i < k_n$.

Тогда

$$y = \sum_{i=0}^{k_n} d_i x_i + \sum_{i=k_n+1}^{\infty} d_i^{(n+1)} x_i'.$$

Но так как всегда $d_i^{(n+1)} < p_{i+1} < d_{k_n}^{(n)}$, то наш процесс оборвется на конечном шаге, номер которого обозначим через m.

При $i \neq k_l$ полагаем $x_i = x_i'$. Имеем

$$y = \sum_{i=0}^{k_m} d_i x_i,$$

причем при любом n $x_n \in x_n' + G_{n+1}$ и потому для элементов $x_0, x_1, \ldots, \ldots, x_n, \ldots$ выполнено свойство (5). Далее, почти все $x_i = x_i'$. Лемма 3.7 доказана.

3.72. Заметим, что из $u_1 \in G_{m+1}$, $u_2 \in G_{m+1}$, $u_1 < u_2$, $b = \sum_{i=0}^{m} a_i x_i$ следует, что $b + u_1 < b + u_2$, а потому, если $f(x)$ возрастает на $b + G_{m+1}$, то $f(x+b)$ также возрастает на G_{m+1}.

3.8 ТЕОРЕМА 3. *Если $f(x)$—функция ограниченной вариации, то $\dot{s}_n(x)$ стремится в каждой точке y к $\tilde{f}(y)$* (см. 3.32).

Пусть порядок в группе G задан элементами $x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots$ Так как $\int\limits_G \dot{D}_n(t)\,dt = 1$, то

$$\dot{s}_n(y) - \tilde{f}(y) = \int\limits_G [f(y+t) - \tilde{f}(y)]\,\dot{D}_n(t)\,dt.$$

Очевидно, нам достаточно доказать теорему лишь для функций, возрастающих на G. Выберем элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ согласно лемме 3.7, примененной к элементу y и элементам $x_1', x_2', \ldots x_n', \ldots$ Обозначим упорядочивание группы G, заданное элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, через $\hat{G}$. В силу 3.72, $f(y+t)$ возрастает на G_{m+1} при упорядочивании $\hat{G}$.

Имеем

$$\dot{s}_n(y) - \tilde{f}(y) = \int\limits_{G_s} [f(y+t) - \tilde{f}(y)]\,\dot{D}_n(t)\,dt + \\ + \int\limits_{G \setminus G} [f(y+t) - \tilde{f}(y)]\,\dot{D}_n(t)\,dt = I_1 + I_2.$$

При упорядочивании $\hat{G}$ y является крайней слева точкой и потому

$$\tilde{f}(y)=f(y+0)=f(y-0).$$

Следовательно, при достаточно больших s и $t \in G_s$ $\sup\,[f(y+t)-\tilde{f}(y)]$ будет сколь угодно мал.

Так как функция $f(y+t)-\tilde{f}(y)$ возрастает на G_s при $s \geqslant m$, то к I_1 применима вторая теорема о среднем значении, легко переносящаяся на $\hat{G}$, и мы имеем

$$I_1 < \sup_{t \in G_s}[f(y+t)-\tilde{f}(y)] \int_a^b \dot{D}_n(t)\,dt \leqslant C \sup_{t \in G_s}[\tilde{f}(y+t)-\tilde{f}(y)],$$

где, в силу 3.64, C не зависит от a, b и n. Поэтому найдется такой номер s, что $I_1 < \varepsilon$.

В силу 3.63, при фиксированном s I_2 стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда имеем

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(y)-f(y)]=0.$$

§ 4. Суммирование рядов Фурье для систем $\hat{X}$ и $\dot{X}$

Мы ограничимся в этом параграфе лишь $(C, 1)$-суммированием.

4.1. Выведем формулу для ядра Фейера системы $\hat{X}$, т. е. для

$$T_n(y)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_n(y).$$

Положим

$$nT_n(y)=K_n(y).$$

Очевидно, что

$$K_n=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\chi_k.$$

Рассмотрим K_{m_h}. Если $t \in G_{l-1} \setminus G_l$, то при $h \geqslant l$

$$K_{m_h}(t)=\sum_{k=0}^{h-1}(m_h-k)\chi_k=\sum_{k=0}^{\frac{m_h}{m_l}-1}\sum_{r=0}^{m_l-1}(m_h-r-km_l)\chi_{km_l+r}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{m_h}{m_l}-1}\chi_{km_l}\sum_{r=0}^{m_l-1}(m_l-r)\chi_r.$$

Последнее равенство вытекает из того, что

$$\sum_{r=0}^{m_l-1}[m_j-(k+1)\,m_l]\,\chi_r=[m_j-(k+1)\,m_l]\sum_{r=0}^{m_l-1}\chi_r=[m_j-(k+1)\,m_l]\,D_{m_l}=0.$$

Но

$$\sum_{r=0}^{m_l-1}(m_l-r)\,\chi_r=\sum_{k=0}^{p_l-1}\sum_{s=0}^{m_{l-1}-1}(m_l-km_l-s)\,\chi_{km_{l-1}+s}=$$

$$=\sum_{s=0}^{m_{l-1}-1}\chi_s\sum_{k=0}^{p_l-1}(m_l-km_{l-1}-s)\,\chi_{m_{l-1}}^k.$$

На G_{l-1} все $\chi_s\equiv 1$ при $s<m_{l-1}$, а

$$\chi_{m_{l-1}}(t)=e^{\frac{2\pi ij}{p_l}}\quad (0\leqslant j<p_l).$$

Поэтому

$$K_{m_l}(t)=\sum_{s=0}^{m_{l-1}-1}\sum_{k=0}^{p_l-1}(m_l-s)\,e^{\frac{2\pi ijk}{p_l}}-m_{l-1}\sum_{s=0}^{m_l-1}\sum_{k=0}^{p_l-1}ke^{\frac{2\pi ijk}{p_l}}.$$

Далее,

$$\sum_{k=0}^{p_l-1}e^{\frac{2\pi ijk}{p_l}}=0$$

и, следовательно,

$$K_{m_l}(t)=-m_{l-1}^2\sum_{k=0}^{p_l-1}ke^{\frac{2\pi ijk}{p_l}}.$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{p_l-1}ke^{kx}=\frac{e^x-p_le^{p_lx}+p_le^{x(p_l+1)}-e^{(p_l+1)x}}{(1-e^x)^2},$$

то

$$\sum_{k=0}^{p_l-1}ke^{\frac{2\pi ijk}{p_l}}=-\frac{p_l}{1-e^{\frac{2\pi ij}{p_l}}},$$

так что

$$K_{m_l}(t)=\frac{p_lm_{l-1}^2}{1-\chi_{m_{l-1}}(t)}.$$

Перейдем ко второму сомножителю. Легко видеть, что

$$\sum_{k=0}^{\frac{m_h}{m_l}-1}\chi_{km_l}=\prod_{d=l}^{h-1}\left[1+\chi_{m_d}+\ldots+\chi_{m_d}^{p_{d+1}-1}\right]=\prod_{d=l}^{h-1}\frac{1-\chi_{m_d}^{p_{d+1}}}{1-\chi_{m_d}}.$$

Таким образом, при $t \in G_{l-1} \setminus G_l$

$$K_{m_h}(t) = \frac{p_l m_{l-1}^2}{1-\chi_{m_{l-1}}} \prod_{d=l}^{h-1} \frac{1-\chi_{m_d}^{p_{d+1}}}{1-\chi_{m_d}}.$$

4.11. Выведем теперь формулу для $K_n(x)$. Пусть $x \in G_{s-1} \setminus G_s$ и $n = \sum_{i=0}^{k} a_i m_i$; тогда (см. 2.3)

$$K_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} (n-m)\chi_m = \sum_{t=0}^{k} \sum_{m=l_{t-1}}^{l_t-1} (n-m)\chi_m.$$

Рассмотрим (как обычно, опуская аргумент x)

$$\sum_{m=l_{t-1}}^{l_t-1} (n-m)\chi_m = \sum_{r=0}^{a_{t'}-1} \sum_{m=l_{t-1}+rm_{t'}}^{l_{t-1}+(r+1)m_{t'}-1} (n-m)\chi_m =$$

$$= \sum_{r=0}^{a_{t'}-1} \sum_{m=0}^{m_{t'}-1} (n-l_{t-1}-rm_{t'}-m)\chi_{l_{t-1}}\chi_{m_{t'}}^r \chi_m =$$

$$= \chi_{l_{t-1}} \sum_{r=0}^{a_{t'}-1} \chi_{m_{t'}}^r \sum_{m=0}^{m_{t'}-1} (n-l_{t-1}-rm_{t'}-m)\chi_m =$$

$$= \chi_{l_{t-1}} \sum_{r=0}^{a_{t'}-1} [n-l_{t-1}-(r+1)m_{t'}] D_{m_{t'}} \chi_{m_{t'}}^r +$$

$$+ \chi_{l_{t-1}} \sum_{r=0}^{a_{t'}-1} \chi_{m_{t'}}^r \sum_{m=0}^{m_{t'}-1} (m_{t'}-m)\chi_m.$$

Вторая сумма равна

$$\chi_{l_{t-1}} K_{m_{t'}} \sum_{n=0}^{a_{t'}-1} \chi_{m_{t'}}^r = \chi_{l_{t-1}} K_{m_{t'}} \frac{1-\chi_{m_{t'}}^{a_{t'}}}{1-\chi_{m_{t'}}}.$$

Если $t' \geqslant s$, то $D_{m_{t'}}(x) = 0$ и первая сумма равна нулю. Если же $t' < s$, то $\chi_{m_{t'}}(x) = 1$, $D_{m_{t'}} = m_{t'}$ и первая сумма равна

$$A = m_{t'} \chi_{l_{t-1}} a_{t'} \left[(n-l_{t-1}) - m_{t'} \frac{a_t+1}{2} \right].$$

Отсюда следует, в частности, что при $t' < s$ $|A| \leqslant \frac{3m_s^2}{2}$. В самом деле,

$$n - l_{t-1} = \sum_{k=0}^{t'} a_k m_k < 2a_{t'} m_{t'}$$

и

$$|A| < \frac{3}{2} a_{t'}^2 m_{t'}^2 < \frac{3}{2} m_s^2. \tag{10}$$

Вернемся к $K_n(x)$. Если $x \in G_{s-1} \setminus G_s$, то

$$K_n(x) = \sum_{t=0}^{k} \chi_{l_{t-1}} K_{m_{t'}} \frac{1-\chi_{m_{t'}}^{a_{t'}}}{1-\chi_{m_{t'}}} + \sum_{t=0}^{s-1} m_{t'} a_{t'} \left[n - l_{t-1} - m \frac{a_{t'}+1}{2} \right] \chi_{l_{t-1}}. \quad (11)$$

4.2. Перейдем к изучению свойств ядер K_n и $\dot{K}_n$. Покажем, что существует такое C, не зависящее от h, что

$$\int_G |K_{m_h}(t)|\, dt < C.$$

Заметим, что $\chi_{m_d}(t) \in X_{d+1}$ и потому $\chi_{m_d}^{p_{d+1}}(t) \in X_d$ принимает постоянное значение на каждом смежном классе по G_d.

Рассмотрим один из таких смежных классов $x+G_d$ и разобьем его на смежные классы по подгруппе G_{d+1}:

$$x + G_d = \prod_{j=0}^{p_{d+1}-1} (X_j + G_{d+1}).$$

Очевидно, что значения, принимаемые $\chi_{m_d}(t)$ на $x+G_d$, будут

$$\chi_{m_d}(x_0); \quad \chi_{m_d}(x_0)\, e^{\frac{2\pi i}{p_{d+1}}}; \quad \ldots; \quad \chi_{m_d}(x_0)\, e^{\frac{2\pi i (p_{d+1}-1)}{p_{d+1}}}.$$

При этом x_0 выбрано так, что при всех k

$$|1 - \chi_{m_d}(x_0)| \leqslant |1 - \chi_{m_j}(x_0)\, e^{\frac{2\pi i k}{p_{d+1}}}|.$$

4.21. Оценим

$$A(\alpha) = \sum_{k=0}^{p_{d+1}-1} \left| \frac{\sin p_{d+1}\alpha}{\sin\left(\frac{k\pi}{p_{d+1}} + \alpha\right)} \right|.$$

Легко доказать, что $A(\alpha)$ принимает наибольшее значение при $\alpha = \frac{\pi}{2p_{d+1}}$. Но

$$\sum_{k=0}^{p_{d+1}-1} \frac{1}{\sin \frac{2k+1}{2p_{d+1}}\pi} = 2 \sum_{k=0}^{\frac{p_{d+1}-1}{2}} \frac{1}{\sin \frac{2k+1}{2p_{d+1}}\pi} =$$

$$= 2 \left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{p_{d+1}-1}{4}\right]} \frac{1}{\sin \frac{2k+1}{2p_{d+1}}\pi} + \sum_{k=\left[\frac{p_{d+1}-1}{4}\right]+1}^{\frac{p_{d+1}-1}{2}} \frac{1}{\sin \frac{2k+1}{2p_{d+1}}\pi} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} [p_{d+1} \ln p_{d+1} + p_{d+1} - 1] \leqslant \frac{p_{d+1}}{\sqrt{2}} (\ln p_{d+1} + 1).$$

Поэтому

$$\int_{x+G_d} \left| \frac{1-\chi_{m_d}^{p_{d+1}}(t)}{1-\chi_{m_d}(t)} \right| dt = \frac{A\left(\frac{\ln \chi_{m_d}(x_0)}{2\pi i}\right)}{m_{d+1}} \leqslant \frac{p_{d+1}}{\sqrt{2}\cdot m_{d+1}} (\ln p_{d+1} + 1) \leqslant \frac{\ln p_{d+1}}{m_d}.$$

4.22. Далее, заметим, что

$$\int_{x+G_l} \prod_{d=l}^{h-1} \left| \frac{1-\chi_{m_d}^{p_{d+1}}(t)}{1-\chi_{m_d}(t)} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant m_{l+1} \int_{x+G_l} \left| \frac{1-\chi_{m_l}^{p_{l+1}}(t)}{1-\chi_{m_l}(t)} \right| dt \cdot \max \int_{z+G_{l+1}} \prod_{d=l+1}^{h-1} \left| \frac{1-\chi_{m_d}^{p_{d+1}}(t)}{1-\chi_{m_d}(t)} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant p_{l+1} \ln p_{l+1} \cdot \max \int_{z+G_l} \prod_{d=l+1}^{h-1} \left| \frac{1-\chi_{m_d}^{p_{d+1}}(t)}{1-\chi_{m_d}(t)} \right| dt,$$

где максимум берется по всем смежным классам по подгруппе G_{l+1}, лежащим в $x+G_l$.

Отсюда имеем

$$\int_{x+G_l} \prod_{d=l}^{h-1} \left| \frac{1-\chi_{m_d}^{p_{d+1}}(t)}{1-\chi_{m_d}(t)} \right| dt \leqslant \frac{1}{m_l} \prod_{d=l+1}^{h} \ln p_d.$$

4.23. Оценим теперь при $h \geqslant l$

$$\int_{G_{l-1} \setminus G_l} |K_{m_h}|\, dt = \sum \int_{x+G_l} |K_{m_h}|\, dt,$$

где сумма берется по всем смежным классам по подгруппе G_l, лежащим в $G_{l-1} \setminus G_l$. Заметим, что на каждом таком смежном классе $\chi_{m_{l-1}}(t)$ имеет постоянное значение и потому

$$\int_{x+G_l} |K_{m_h}(t)|\, dt = \frac{p_l m_{l-1}^2}{|1-\chi_{m_{l-1}}(x)|} \int_{x+G_l} \prod_{d=l}^{h-1} \left| \frac{1-\chi_{m_d}^{p_{d+1}}(t)}{1-\chi_{m_d}(t)} \right| dt,$$

откуда

$$\int_{G_{l-1} \setminus G_l} |K_{m_h}(t)|\, dt \leqslant \prod_{d=l+1}^{h} \ln p_d \frac{p_l m_{l-1}^2}{m_l} \sum_{j=1}^{p_l-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{p_l}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m_l} \prod_{d=l}^{h} \ln p_d p_l^2 m_{l-1}^2 = m_l \prod_{d=l}^{h} \ln p_d, \qquad (12)$$

так как

$$\sum_{j=1}^{p_l-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{p_l}} \leqslant \ln p_l.$$

Эту оценку получаем и для

$$\int\limits_{G_{l-1}\setminus G_l} |\dot{K}_{m_h}(t)|\,dt. \tag{12'}$$

4.24. Существует случай, когда оценка (12′) может быть уточнена. Пусть элементы $\chi_0, \chi_{m_l}, \chi_{2m_l}, \ldots, \chi_{m_h-m_l}$ образуют на G_{l-1} подгруппу. Тогда при $x \in G_{l-1}$

$$\chi_0 + \chi_{m_l} + \chi_{2m_l} + \ldots + \chi_{m_h-m_l} = \overline{\chi}_0 + \ldots + \overline{\chi}_{m_h-m}$$

и потому при $x \in G_{l-1}\setminus G_l$

$$\dot{K}_{m_h}(x) = \operatorname{Re}\frac{m_{l-1}^2 p_l}{1-\chi_{m_{l-1}}(x)} \sum_{k=0}^{\frac{m_h}{m_l}-1} \chi_{km_l}(x).$$

Но

$$\operatorname{Re}\frac{1}{1-\chi_{m_{l-1}}(x)} = 1$$

и, следовательно, при $x \in G_{l-1}\setminus G_l$

$$\dot{K}_{m_h}(x) = m_{l-1}^2 p_l \sum_{k=1}^{\frac{m_h}{m_l}-1} \chi_{km_l}(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_{G_{l-1}\setminus G_l} \dot{K}_{m_h}(x)\,dx \leqslant m_l \prod_{d=l+1}^{h} \ln p_d. \tag{13}$$

4.25. Теперь мы можем оценить $\int\limits_G |\dot{K}_{m_h}(x)|\,dx$. Пусть $p_j > p_k$, $j+1 \leqslant \leqslant k \leqslant h$. Тогда по 1.3 элементы $\chi_0, \chi_{p_j}, \ldots, \chi_{m_h-p_j}$ образуют на G_{j-1} подгруппу и потому мы можем при $x \in G_{j-1}\setminus G_j$ применить к $\dot{K}_{m_h}(x)$ оценку (13). Таким образом,

$$\int\limits_G |\dot{K}_{m_h}(x)|\,dx = \sum_{j=1}^{h} \int\limits_{G_{j-1}\setminus G_j} |\dot{K}_{m_h}(x)|\,dx + \int\limits_{G_h} |\dot{K}_{m_h}(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{'} m_j \prod_{d=j+1}^{h} \ln p_d + \sum_{j}^{''} m_j \prod_{d=j}^{h} \ln p_d + \frac{m_h+1}{2}$$

и

$$\frac{1}{m_h}\int\limits_G |\dot{K}_{m_h}(x)|\,dx \leqslant \sum_j{}' \frac{m_j}{m_h} \prod_{d=j+1}^{h} \ln p_d + \sum_j{}'' \frac{m_j}{m_d} \prod_{d=j}^{h} \ln p_d + \frac{1}{3},$$

причем первая сумма распространена на такие j, для которых $p_j > p_k$, $h \geqslant k > j$, а вторая — на все остальные j.

Но теперь

$$\frac{m_j}{m_h}\prod_{d=j+1}^{h}\ln p_d=\prod_{d=j+1}^{h}\frac{\ln p_d}{p_d}$$

и так как $\frac{\ln p_d}{p_d}<\frac{1}{2}$, то первая сумма меньше единицы.

Рассмотрим вторую сумму. В знаменателе каждого члена второй суммы найдется такое p_{d_1}, что $p_{d_1}>p_j$, но так как $\frac{\ln^2 p_{d_1}}{p_{d_1}}<1$ и $\ln p_j<\ln p_{d_1}$, то

$$\ln p_j\prod_{d=j+1}^{h}\frac{\ln p_d}{p_d}<\prod_{d=j+1}^{h}{}'\ \frac{\ln p_d}{p_d}{}^{*}<\frac{1}{2^{h-j+1}}$$

и вторая сумма также меньше единицы. Итак,

$$\frac{1}{m_h}\int\limits_G|\dot{K}_{m_h}(x)|\,dx<2\frac{1}{3}.$$

4.26. Если группа G примарна, то мы можем дать оценку и для K_{m_h}, а именно

$$\frac{1}{m_h}\int\limits_G|K_{m_h}(x)|\,dx\leqslant 2\frac{1}{2}\ln p. \tag{14}$$

Эта оценка непосредственно вытекает из того, что тогда $m_h=p^h$ и

$$\frac{1}{m_h}\int\limits_{G_{l-1}\setminus G_l}|K_{m_h}(x)|\,dx\leqslant\ln p.$$

Заметим, что формула (14) справедлива и тогда, когда группа G разлагается в прямую сумму конечного числа примарных слагаемых. В этом случае

$$\frac{1}{m_h}\int\limits_G|K_{m_h}(x)|\,dx\leqslant 2\frac{1}{2}\max_i p_i.$$

4.27. Если группа G примарна, то при любом n

$$\frac{1}{n}\int\limits_G|K_n(x)|\,dx\leqslant G.$$

В самом деле, пусть $n=\sum_{i=0}^{k}a_im_i$. Тогда по формулам (10) и (11) имеем (так как $m_s=p^s$)

---

* Π' распространено на все d, кроме d_1.

$$I=\int\limits_{G}|K_n(x)|\,dx\leqslant\sum_{s=1}^{k+1}\int\limits_{G_{s-1}\setminus G_s}\sum_{t=0}^{k}\left|K_{p^{t'}}\frac{1-\chi_{p^{t'}}^{a_{t'}}}{1-\chi_{p^{t'}}}\right|dx+$$

$$+\sum_{s=1}^{k+1}\int\limits_{G_{s-1}\setminus G_s}\frac{3p^{2s}}{2}\,dp+\int\limits_{G_{k+1}}\frac{n(n+1)}{2}\,dx.$$

Далее, при $t'\geqslant s$ имеем по формуле (12)

$$\int\limits_{G_{s-1}\setminus G_s}\left|K_{p^{t'}}\frac{1-\chi_{p^{t'}}^{a_{t'}}}{1-\chi_{p^{t'}}}\right|dx\leqslant p^{s+1}(\ln p)^{t'-s+1}.$$

Если же $t'<s$, то на G_{s-1} имеем

$$K_{p^{t'}}=\frac{p^{t'}(p^{t'}+1)}{2}\leqslant p^{2t'}$$

и потому

$$\int\limits_{G_{s-1}\setminus G_s}|K_{p^{t'}}|\,dt\leqslant p^{2t'-s}.$$

Наконец, в силу того, что $n<p^{k+1}$,

$$\int\limits_{G_{k+1}}\frac{n(n+1)}{2}\,dx<p^{k+1}$$

и потому

$$I\leqslant\sum_{s=1}^{k+1}\left[\sum_{t=0}^{s-1}p^{2t-s}+\sum_{t=s}^{k}p^{s+1}(\ln p)^{t-s+1}\right]+\frac{3}{2}\sum_{s=1}^{k+1}p^{s+1}+p^{k+1}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{k+1}[p^{s-1}+p^{s+1}(\ln p)^{k-s+2}]+\frac{3}{2}p^{k+3}+p^{k+1}\leqslant$$

$$\leqslant 2p^{k+1}+\frac{3}{2}p^{k+3}+\frac{p^{k+3}-p^2(\ln p)^{k+1}}{\frac{p}{\ln p}-1}<$$

$$<3p^{k+3}+p^{k+3}=4p^{k+3}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{n}\int\limits_{G}|K_n(x)|\,dx<4p^3. \qquad (15)$$

Разумеется, такая же оценка имеет место и для $\tilde{K}_n(x)$ и для $\dot{K}_n(x)$. Это утверждение справедливо и для групп, разлагающихся в прямую сумму конечного числа примарных подгрупп.

4.28. Если группа G примарна, то при любом s

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_{G\setminus G_s}|K_n(x)|\,dx=0.$$

В самом деле, в силу формулы (12), имеем при $h\geqslant s$

$$\int\limits_{G\setminus G_s}|K_{p^h}(t)|\,dt=\sum_{l=1}^{s}\int\limits_{G_{l-1}\setminus G_l}|K_{p^h}(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{s}p^l(\ln p)^{h-l}<2p^{s+1}(\ln p)^{h-s-1}.$$

Если же $h<s$, то

$$\int\limits_{G\setminus G_s}|K_{p^h}(t)|\,dt<\int\limits_{G}|K_{p^h}(t)|\,dt<\frac{5}{2}p^h\ln p.$$

Поэтому при $n=\sum_{l=0}^{k}a_lp^l$ имеем (см. 4.11)

$$\frac{1}{n}\int\limits_{G\setminus G_s}|K_n(t)|\,dt<\frac{1}{p^{k-1}}\left\{\sum_{l=0}^{s-1}\int\limits_{G\setminus G_s}|K_{p^l}(t)|\,dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=s}^{k}\int\limits_{G\setminus G_s}|K_{p^l}(t)|\,dt+\frac{3p^{2s}}{2}\right\}\leqslant\frac{1}{p^{k-1}}\left\{\sum_{l=0}^{s-1}\frac{5}{2}p^l\ln p+\right.$$

$$\left.+2\sum_{l=s}^{k}p^{s+1}(\ln p)^{l-s-1}+\frac{3p^{2s}}{2}\right\}\leqslant\frac{1}{p^{k-1}}\left\{\frac{5}{2}p^{s+1}(\ln p)^2+\right.$$

$$\left.+2p^{s+1}(\ln p)^{k-s}+\frac{3p^{2s}}{2}\right\}\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

Нетрудно показать также, что при любой группе G

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m_k}\int\limits_{G\setminus G_s}|K_{m_k}(x)|\,dx=0.$$

4.29. Какова бы ни была точка $x\in G_{l-1}\setminus G_l$

$$\frac{1}{n}|K_n(x)|<\frac{7m_l^2}{2n}+\frac{p_lm_{l-1}^2}{|1-\chi_{m_{l-1}}|}$$

и потому $\frac{1}{n}|K_n(x)|$ ограничено в совокупности на $G\setminus G_l$.

В самом деле, пусть $n=\sum_{i=0}^{k}a_im_i$ и $x\in G_{l-1}\setminus G_l$.
Тогда

$$|K_n(x)|\leqslant\frac{3}{2}m_l^2+\sum_{t=0}^{k}\left|K_{m_t}\frac{1-\chi_{m_t}^{a}}{1-\chi_{m_t}}\right|\leqslant\frac{3}{2}m_l^2+\sum_{t=0}^{k}a_t|K_{m_t}|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2} m_l^2 + \sum_{t=l+1}^{k} a_t \frac{p_l m_{l-1}^2}{|1-\chi_{m_{l-1}}|} \prod_{d=l}^{l-1} p_{d+1} + \sum_{t=0}^{l} \frac{m_t(m_t+1)}{2}$$

и потому

$$\frac{1}{n} | K_n(x) | \leqslant \frac{3m_l^2}{2n} + \frac{2m_l^2}{n} + \frac{p_l m_{l-1}^2}{|1-\chi_{m_{l-1}}| \cdot n} \sum_{t=l+1}^{k} \left(a_t \prod_{d=l}^{l-1} p_{d+1} \right).$$

Но так как $\prod_{d=l}^{t-1} p_{d+1} < m_t$, то

$$\sum_{t=l+1}^{k} a_t \prod_{d=l}^{t-1} p_{d+1} < n$$

и

$$\frac{1}{n} | K_n(x) | < \frac{7m_l^2}{2n} + \frac{p_l m_{l-1}^2}{|1-\chi_{m_{l-1}}|}.$$

4.3. ЛЕММА. *Пусть дано множество $N \subset G$ и последовательность измеримых на G функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ таких, что*

1) *функции $\varphi_n(x)$ ограничены в совокупности на N и*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_N |\varphi_n(x)| \, dx = 0.$

Тогда, какова бы ни была суммируемая функция $f(x)$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_N f(x) \varphi_n(x) \, dx = 0.$$

Доказательство опускаем, как тривиальное.

4.31. ТЕОРЕМА 4. *Пусть $f(x)$—суммируемая функция на G и в точке y существует*

$$\tilde{f}(y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(y+t)+f(y-t)}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} [\mathfrak{S}_{m_n}(y) - \tilde{f}(y)] = 0.$$

Если группа G примарна или является прямой суммой конечного числа примарных подгрупп, то

$$\lim_{n\to\infty} [\mathfrak{S}_n(y) - \tilde{f}(y)] = 0.$$

Доказательство. Так как

$$\int\limits_G \dot{T}_{mn}(x)\,dx = \int\limits_G T_n(x)\,dx = 1$$

и

$$\dot{\mathfrak{S}}_n(y) = \int\limits_G f(y+t)\,\dot{T}_n(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_G [f(y+t)+f(y-t)]\,\dot{T}_n(t)\,dt,$$

то, полагая

$$f(y+t)+f(y-t)-2\tilde{f}(y) = \varphi(y, t),$$

имеем

$$\dot{\mathfrak{S}}_n(y)-\tilde{f}(y) = \int\limits_G \varphi(y, t)\,\dot{T}_n(t)\,dt.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое s, для которого при $t \in G_s$ $|\varphi(y, t)| < \varepsilon$. Тогда

$$\int\limits_G \varphi(y, t)\,\dot{T}_n(t)\,dt = \int\limits_{G_1} + \int\limits_{G\setminus G_s} \leqslant \varepsilon\int\limits_{G_s} |\dot{T}_n|\,dt + \int\limits_{G\setminus G_s} \varphi(y, t)\,\dot{T}_n(t)\,dt \qquad (16)$$

и, в частности,

$$\int\limits_G \varphi(y, t)\,\dot{T}_{mn}(t)\,dt \leqslant \varepsilon\int\limits_{G_s} |\dot{T}_{mn}(t)|\,dt + \int\limits_{G\setminus G_s} \varphi(y, t)\,\dot{T}_{mn}(t)\,dt. \qquad (17)$$

В силу 4.25 и 4.26, первый интеграл в (17) не превышает εC при любой группе G и первый интеграл в (16) не превышает εC, если группа G есть прямая сумма конечного числа примарных подгрупп.

Вторые же интегралы в (14) и (15), в силу 4.3, 4.28 и 4.29, стремятся к нулю. Теорема доказана.

§ 5. Абсолютная сходимость рядов по системе X

5.1. Теоремы типа Лузина—Данжуа для системы X не представляют интереса, так как $|\chi_n| = 1$. Но можно ввести систему

$$\Phi = \varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_1'(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \varphi_n'(x),\ \ldots,$$

где

$$\chi_n(x) = \varphi_n(x) + i\varphi_n'(x),$$

и изучать вопросы, связанные с абсолютной сходимостью рядов по системе Ф *. Заметим, что система Ф образует полную ортогональную систему функций, причем норма $\varphi_n(x)$ равна 1 или $\frac{1}{2}$ в зависимости от того, имеет ли место равенство $\chi_n(x) = \varphi_n(x)$ или нет. Через $\overline{\Phi}$ мы будем обозначать пронормированную систему Ф.

Большинство теорем этого параграфа мы оставим без доказательства, так как они доказываются аналогично соответствующим теоремам о тригонометрических рядах.

* При этом, разумеется, из элементов $\chi_n(x)$ и $\chi_n^{-1}(x)$ принимается во внимание какой-либо один.

5.2. Из сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \varphi_n(x)| + |b_n \varphi'_n(x)|$$

на множестве положительной меры или на множестве второй категории следует сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + |b_n|.$$

Как и в случае тригонометрических рядов, обе эти теоремы являются следствиями следующей:

Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) + b_n \varphi'_n(x)$$

абсолютно сходится на множестве T, являющемся базисом, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + |b_n|$$

сходится.

При этом под базисом группы G подразумевается такое множество T, что любой элемент $x \in G$ может быть записан в виде

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \qquad x_i \in T,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$—целые числа.

5.3. Абсолютная сходимость рядов Фурье по системе $\dot{X}$.

Имеет место теорема, в точности совпадающая с теоремой Бернштейна:

ТЕОРЕМА 5. *Если $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$ и G примарна, то ряд $\mathfrak{S}(f)$ абсолютно сходится.*

Доказательство. Отметим, что здесь мы можем рассматривать разложения по системе X. Пусть $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. Тогда

$$f(x+h) - f(x) \sim a_n \chi_n(x) [\chi_n(h) - 1],$$

$$\int_G [f(x+h) - f(x)] [\overline{f(-x-h)} - \overline{f(-x)}]\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |\chi_n(h) - 1|^2 < C [\mathrm{mes}(0, h)]^{2\alpha}. \tag{18}$$

Положим в формуле (18), что $h \in G_n \setminus G_n$, тогда при $p^n \leqslant k \leqslant p^{n+1}-1$ имеем

$$|\chi_k(h)-1| > \sin\frac{2\pi}{p}$$

и поэтому

$$\sum_{m=p^n}^{p^{n+1}-1} |a_m|^2 < C_1 p^{-2\alpha n}.$$

Применяя неравенство Шварца, получаем, что

$$\sum_{m=p^n}^{p^{n+1}-1} |a_m| \leqslant (p^{n+1}-p^n)^{\frac{1}{2}} \cdot C_1 p^{-\alpha n} < C_1 p^{n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}$$

и значит

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \sum_{n=0}^{\infty} p^{n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} < \infty.$$

§ 6. Теорема единственности

6.1. Если комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ таковы, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, то какова бы ни была прямая, проходящая через начало координат, по обе ее стороны найдутся числа из $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Утверждение очевидно.

6.2. Пусть

$$\alpha_k = \beta e^{\frac{2\pi i k}{p}} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

и p—простое число. Тогда, каков бы ни был многочлен

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1},$$

точки $f(\alpha_0), f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_{p-1})$ разделяются любой прямой, проходящей через начало координат.

В самом деле,

$$\sum_{i=0}^{p-1} f(\alpha_i) = a_1\beta \sum_{j=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i j}{p}} + a_2\beta^a \sum_{j=0}^{p-1} e^{\frac{4\pi i j}{p}} + \ldots +$$
$$+ a_{p-1}\beta^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} e^{\frac{2(p-1)\pi i j}{p}} = 0,$$

а потому наше утверждение следует из 6.1.

6.3. ТЕОРЕМА 6. *Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ сходится к нулю в каждой точке, то все его коэффициенты равны нулю.*

Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n = a_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=m_l}^{m_{l+1}-1} a_n \chi_n.$$

Положим $a_0 \neq 0$. Тогда либо $\operatorname{Re} a_0 \neq 0$, либо $\operatorname{Im} a_0 \neq 0$. Пусть $\operatorname{Re} a_0 > 0$. Рассмотрим

$$f(y) = \sum_{n=1}^{m_1-1} a_n \chi_n(y) = \sum_{n=1}^{p_1-1} a_n \chi_1^n(y).$$

Так как $\chi_1(t)$ принимает постоянные значения на смежных классах по G_1 и эти значения суть $e^{\frac{2\pi i k}{p_1}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, p_1 - 1)$, то по лемме 6.2 найдется такая точка y_1, для которой $\operatorname{Re} f(y_1) \geqslant 0$. Поэтому для всех точек $z \in y_1 + G_1$

$$\operatorname{Re}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{p_1-1} a_n \chi_n(z)\right] \geqslant \operatorname{Re} a_0.$$

Пусть уже доказано, что для всех точек $z \in y_l + G_l$

$$\operatorname{Re}\left[a_0 + \sum_{s=0}^{l-1} \sum_{n=m_s}^{m_{s+1}-1} a_n \chi_n(z)\right] \geqslant \operatorname{Re} a_0.$$

Рассмотрим

$$\sum_{n=m_l}^{m_{l+1}-1} a_n \chi_n(z) = \sum_{k=1}^{p_{l+1}-1} \chi_{m_l}^k(z) \sum_{n=0}^{m_l-1} a_{km_l+n} \chi_n(z).$$

Так как при $n < m_s$ $\chi_n(z)$ принимает на $y_l + G_l$ постоянные значения, то

$$\sum_{n=m_l}^{m_{l+1}-1} a_n \chi_n(z) = \sum_{k=1}^{p_{l+1}-1} b_k \chi_{m_l}^k(z),$$

где через b_k обозначено

$$\sum_{n=0}^{m_l-1} a_{km_l+n} \chi_n(z).$$

Так как значения, принимаемые $\chi_{m_l}(z)$ на $y_l + G_l$, суть

$$\chi_{m_l}(y_l)\, e^{\frac{2\pi i d}{p_{l+1}}} \quad (d = 0, 1, \ldots, p_{l+1} - 1),$$

то, полагая $\chi_{m_l}(y_l)=\beta$, имеем

$$\sum_{n=m_l}^{m_{l+1}-1} a_n\chi_n(z)=\sum_{k=1}^{p_{l+1}-1} b_k\left(\beta e^{\frac{2\pi i d}{p_{l+1}}}\right)^k.$$

По лемме 6.2, найдется такая точка $y_{l+1}\in y_l+G_l$, что для всех $z\in y_{l+1}+G_{l+1}$

$$\operatorname{Re}\sum_{n=m_l}^{m_{l+1}-1} a_n\chi_n(z)\geqslant 0$$

и

$$\operatorname{Re}\left[a_0+\sum_{s=0}^{l}\sum_{n=m_s}^{m_{s+1}-1} a_n\chi_n(z)\right]\geqslant \operatorname{Re} a_0.$$

Продолжая строить по индукции точки $y_1, \ldots, y_s, \ldots$, найдем, что в точке $y\in\prod_{s=1}^{\infty}(y_s+G_s)$

$$\operatorname{Re}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(y)\right]\geqslant \operatorname{Re} a_0>0,$$

что противоречит равенству

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(y)=0.$$

Если же $a_0=0$ и $a_n\neq 0$, то применяем те же рассуждения к $\overline{\chi}_n\sum_{l=0}^{\infty} a_l'\chi_l$.

Поступило
25. VII. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, ОНТИ, 1938.

[2] Freudenthal H., Die Haarschen Orthogonalsysteme von Gruppencharakteren in Lichte der Pontrjaginschen Dualitätstheorie, Comp. Math., t. 5 (1938), 354—357.

[3] Kaczamarz S. und Steinhaus H., Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa—Lwów, 1935.

[4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939.

N. VILENKIN. ON A CLASS OF COMPLETE ORTHONORMAL SYSTEMS

SUMMARY

Let G be a compact abelian group with the second countability axiom. It is known that the multiplicative characters of G form a complete orthonormal system of functions on G.

If G is zero-dimensional, then the set of characters is a periodic enumerable abelian group X. We order X and consider the Fourier series with respect to X.

In § 2 we estimate Dirichlet's kernel and Lebesgue's functions of X. We prove that Lebesgue's functions L_n of the system X are constant.

THEOREM 1. $L_n = O(\ln n)$.

It is also shown that $L_n \neq o(\ln n)$.

In § 3 an order is introduced in G. We define functions of bounded variation with respect to this order.

The group X being periodic, it can be represented as the sum of an ascending chain of finite subgroups

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_k \subset \dots$$

If m_k is the order of X_k, G_k is the annihilator of X_k and

$$\tilde{f}(y) = \lim_{k \to \infty} m_k \int_{y+G_k} f(x)\, dx,$$

then we have

THEOREM 2. *If $f(x) \in L$ and $\tilde{f}(y)$ exists at the point y, then*

$$\lim_{k \to \infty} s_{m_k}(y) = \tilde{f}(y),$$

where $s_n(y)$ is the n-th partial sum of the corresponding Fourier series.

We further prove that if the group G is primary, then a theorem holds which is analogous to the Dini—Lipschitz test of uniform convergence of Fourier series.

An analogue of Dirichlet's theorem is proved for functions of bounded variation.

§ 4 deals with the summability of Fourier series with respect to X by the $(C, 1)$-method. An analogue of Fejèr's theorem is proved for the case where G is primary.

In § 5 we discuss the problem of absolute convergence of series with respect to X. An analogue of Bernstein's theorem is proved thereby.

In § 6 we obtain

THEOREM 6. *If a series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ converges to zero at every point, then all its coefficients are zero.*

We see that the properties of the system X are similar to those of the trigonometrical system.

It is worth noticing that, as Freudenthal has shown, every compact group can be mapped in a measure-preserving manner onto the segment [0, 1]. Therefore all the results of our paper may be considered as theorems concerning systems of orthogonal functions of a real variable that form periodic groups with respect to the multiplication. In particular, a well known system considered by Walsh is a particular case of our systems: $G = \mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{\infty} T_n$, where T_n are cyclic groups of the second order.

Советский народ отмечает тридцатую годовщину Великой Октябрьской Социалистической революции.

Тридцать лет назад рабочий класс России в союзе с крестьянством совершил под руководством коммунистической партии и ее гениальных вождей, Ленина и Сталина, величайшую в истории человечества революцию. Эта революция коснулась всех сторон жизни — политической, социальной, экономической, культурной, бытовой и полностью изменила лицо нашей родины.

Созданный в результате революции Союз Советских Социалистических республик за истекшие годы вырос и окреп. Если в начале революции многие подвергали сомнению жизнеспособность первого в мире социалистического государства рабочих и крестьян, то в настоящее время все убедились в том, что Советский Союз стал величайшей мировой державой, привлекающей к себе взоры всего передового человечества.

В результате грандиозных работ, выполненных во время сталинских пятилеток, в нашей стране построено социалистическое общество. Это дало возможность Советскому Союзу выдержать жесточайшие испытания во время Великой Отечественной войны против немецких фашистов.

После победоносного окончания войны перед нашей страной встали новые задачи хозяйственного и культурного строительства. Пятилетний план восстановления и развития народного хозяйства СССР на 1946—1950 гг. предусматривает не только восстановление разрушенного в военное время, но и дальнейшее хозяйственное и культурное развитие страны.

В связи с этим перед советской наукой встают ответственные задачи. В законе о пятилетнем плане, принятом на первой сессии Верховного Совета СССР 18 марта 1946 года (п. 3 раздела I), указывается, что необходимо «обеспечить дальнейший технический прогресс во всех отраслях народного хозяйства СССР, как условие мощного подъема производства и повышения производительности труда, для чего необходимо не только догнать, но и превзойти в ближайшее время достижения науки за пределами СССР».

Математика всегда занимала почетное место в советской науке, для развития которой партия и правительство создали исключительно

благоприятные условия. Исследования по математике, проведенные за время существования советской власти, отличаются большой разносторонностью, глубиной и силой разрабатываемых методов, решением весьма трудных проблем, стоящих перед наукой. Советские ученые разрабатывают не только теоретические разделы математики, но и те разделы, которые непосредственно связаны с приложениями к естествознанию и технике.

При всех имеющихся у нас достижениях в развитии математики следует, однако, помнить, что советским математикам необходимо для решения задач, поставленных перед наукой в СССР, еще многое сделать. Нельзя сомневаться в том, что математики Советского Союза, считающие делом своей чести активно участвовать в развитии науки своей социалистической родины, сделают все возможное для дальнейшего хозяйственного и культурного роста нашей страны в наступающем четвертом десятилетии существования Советского государства.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

11 (1947), 403—410

Н. Н. ЛУЗИН

О ЧАСТЯХ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

В работе даются доказательства предложений, формулировки которых были опубликованы в 1943 г. в Докладах Академии Наук СССР [1].

Обозначения. Натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, ... обозначаем буквой R. Остаток $m+1, m+2, m+3, m+4, \ldots$ натурального ряда, где m — целое неотрицательное число, обозначаем через R_m.

Рассматриваем различные части E натурального ряда. Если E — пустая часть, пишем обычное равенство $E=0$. Если E — *конечная* часть, пишем символическое равенство $E\equiv 0$, обозначая для непустой E через $\overline{E}$ наибольший из ее элементов; для пустой E мы полагаем $\overline{E}=0$. Ясно, что при $\overline{E}=m$ мы имеем *на остатке* R_m равенство $E=0$.

Преимущественно, здесь рассматриваются бесконечные части натурального ряда. Если две части E и $\mathcal{E}$ тождественны, пишем обычное равенство $E=\mathcal{E}$. Если они отличаются, одна от другой, лишь *конечным* числом элементов, пишем символическое равенство $E\equiv\mathcal{E}$. Если каждый элемент части E входит в $\mathcal{E}$, пишем обычное неравенство $E<\mathcal{E}$. Если же всякий элемент части E, за возможным, но не обязательным, исключением *конечного* числа их, входит в $\mathcal{E}$, пишем символическое неравенство $E \prec \mathcal{E}$. Две части E и $\mathcal{E}$ называются *взаимно ортогональными*, когда для их произведения имеем $E\mathcal{E}\equiv 0$. Символическое неравенство $E\prec\mathcal{E}$, очевидно, эквивалентно взаимной ортогональности E и дополнения $C\mathcal{E}$ части $\mathcal{E}$, т. е. отношению $E\cdot C\mathcal{E}\equiv 0$. Ясно, что при $\overline{E\cdot C\mathcal{E}}=m$ имеем на остатке R_m обычное неравенство $E<\mathcal{E}$, причем такой остаток уже нельзя расширить путем уменьшения числа m.

Два какие-нибудь множества $\mathfrak{M}=\{E\}$ и $\mathfrak{N}=\{\mathcal{E}\}$, составленные из частей E и $\mathcal{E}$ натурального ряда, называются *ортогональными* одно к другому (вообще: неравномерно), если все их элементы E и $\mathcal{E}$ взаимно ортогональны, т. е. если имеем всегда $E\cdot\mathcal{E}\equiv 0$. В этом случае мы пишем $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{N}\equiv 0$.

Если для множеств $\mathfrak{M}=\{E\}$ и $\mathfrak{N}=\{\mathcal{E}\}$ имеем отношение $E\prec\mathcal{E}$ между всякими двумя их элементами, мы пишем $\mathfrak{M}\prec\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{N}$ состоит из единственной бесконечной части H натурального ряда, тогда соотношение $\mathfrak{M}\prec H$ эквивалентно системе всех соотношений $E\prec H$, где E пробегает *все* элементы множества $\mathfrak{M}$. В этом случае H называется *покрышкою* множества $\mathfrak{M}$.

Два множества $\mathfrak{M}\{E\}$ и $\mathfrak{N}\{\mathcal{E}\}$ называются *отделимыми друг от друга*, если у них имеются покрышки без общего элемента, т. е. когда имеем одновременно $\mathfrak{M}\prec H$, $\mathfrak{N}\prec K$ и $H\cdot K=0$.

Прямое предложение: *если множества* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *отделимы друг от друга, они ортогональны одно к другому, т. е.* $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{N}\equiv 0$ — является вполне тривиальным.

Обратный вопрос: *всякие ли два взаимно ортогональные множества* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{N}\equiv 0$ *отделимы друг от друга?* — требует внимательного анализа.

ТЕОРЕМА П. дю БУА РЕЙМОНДА. *Если оба взаимно ортогональные множества* $\mathfrak{M}=\{E\}$ *и* $\mathfrak{N}=\{\mathscr{E}\}$ *счетные, то они наверное отделимы друг от друга.*

Доказательство. Имеем $\mathfrak{M}=\{E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots\}$ и $\mathfrak{N}=\{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_q, \ldots\}$, где всегда $E_p\cdot\mathscr{E}_q\equiv 0$. Обозначим через $\varphi(k)$ наибольшее из k^2 чисел $\overline{E_p\mathscr{E}_q}$, где $1\leqslant p\leqslant k$ и $1\leqslant q\leqslant k$. Мы полагаем

$$H=E_1R_{\varphi(1)}+E_2R_{\varphi(2)}+\ldots+E_kR_{\varphi(k)}+\ldots,$$
$$K=\mathscr{E}_1R_{\varphi(1)}+\mathscr{E}_2R_{\varphi(2)}+\ldots+\mathscr{E}_kR_{\varphi(k)}+\ldots$$

Очевидно, что $\mathfrak{M}\prec H$ и $\mathfrak{N}\prec K$. Остается доказать, что $H\cdot K=0$. Общий элемент e покрышек H и K должен войти в произведение $E_pR_{\varphi(p)}\mathscr{E}_qR_{\varphi(q)}$. Обозначим через k наибольшее из двух чисел p и q. Ясно, что $R_{\varphi(p)}\cdot R_{\varphi(q)}=R_{\varphi(k)}$. С другой стороны, очевидно, что $e\leqslant\varphi(k)$ и, значит, e не может войти в $R_{\varphi(k)}$. Полученное противоречие доказывает равенство $H\cdot K=0$, т. е. отделимость $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, что и требовалось доказать.

Внутренне ортогональные множества. Это название мы даем множеству $\mathfrak{M}=\{E\}$, неважно какой мощности, бесконечных частей E натурального ряда, взаимно ортогональных между собою, т. е. когда имеем $E'\cdot E''\equiv 0$ для любых двух *различных* элементов E' и E'' множества $\mathfrak{M}$.

Такое $\mathfrak{M}=\{E\}$ называется *полным*, если не существует никакой бесконечной части $\mathscr{E}$ натурального ряда, ортогональной ко *всем* элементам E множества $\mathfrak{M}$. Неполное $\mathfrak{M}$ всегда может быть пополнено новым ортогональным элементом $\mathscr{E}$.

Конечное внутренне ортогональное множество $\mathfrak{M}$ может оказаться полным, например, $\mathfrak{M}=\{E, CE\}$. Но *счетное* внутренне ортогональное множество $\mathfrak{M}=\{E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots\}$ *никогда* не может быть полным. Чтобы видеть это, введем важное определение:

Бесконечная часть $\mathscr{E}$ натурального ряда называется *соприкасающейся* к последовательности $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ каких-нибудь бесконечных частей натурального ряда, если, *во-первых*, она ортогональна к каждой из них, т. е. $E_k\mathscr{E}\equiv 0$, и если, *во-вторых*, $\overline{E_k\mathscr{E}}\to+\infty$ при возрастании k.

ТЕОРЕМА КАНТОРА. *Всякая последовательность* $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ *попарно ортогональных бесконечных частей натурального ряда допускает соприкасающуюся к ней бесконечную часть* $\mathscr{E}$ *натурального ряда.*

Доказательство. Обозначим через $\varphi(k)$ наибольшее из $\frac{k(k-1)}{2}$ чисел $\overline{E_pE_q}$, где $1\leqslant p<q\leqslant k$. Ясно, что на остатке $R_{\varphi(k)}$ части

$E_1, E_2, \ldots, E_k$ не имеют, попарно, общего элемента. Нужная нам часть $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ строится так: e_1 есть первый элемент части E_1; e_k есть первый элемент части E_k, принадлежащий остатку $R_{\varphi(k)}$ и бо́льший чем e_{k-1}.

Из этого построения части $\mathcal{E}$ следует, что для каждого фиксированного k имеем $E_k\mathcal{E} \equiv 0$, $\overline{E_k\mathcal{E}} = e_k$, и что поэтому $\overline{E_k\mathcal{E}} \to +\infty$, когда k возрастает, что и требовалось доказать.

Трансфинитное повторное применение теоремы Кантора дает вполне упорядоченную последовательность *типа* Ω попарно ортогональных бесконечных частей натурального ряда

$$E_0 E_1 \ldots E_\omega \ldots E_\beta \ldots E_\alpha \ldots\ldots \mid \Omega$$

и притом такую, что всякий ее член E_α есть бесконечная часть натурального ряда, соприкасающаяся к сегменту этой последовательности $\{E_\beta\}$, $\beta < \alpha$, отсекаемому членом E_α. Иначе говоря, мы имеем $E_\alpha \cdot E_\beta \equiv 0$ при любых $\alpha \neq \beta$ и $\overline{E_\beta E_\alpha} \to +\infty$ для всякого *фиксированного* α и при *переменном* β, $\beta < \alpha$.

Два неотделимые взаимно ортогональные множества, каждое мощности алэф-один. Чтобы иметь такие множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ возьмем две какие-нибудь последовательности типа Ω возрастающих индексов

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_\omega < \cdots < \gamma_\alpha < \ldots\ldots \mid \Omega,$$
$$\delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_\omega < \ldots < \delta_\beta < \ldots\ldots \mid \Omega,$$

соблюдая лишь ту предосторожность, чтобы в них обеих не содержался один и тот же индекс.

Мы полагаем $\mathfrak{M} = \{E_{\gamma_\alpha}\}$ и $\mathfrak{N} = \{E_{\delta_\beta}\}$. Ясно, что имеем взаимную ортогональность $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} \equiv 0$. Мы теперь утверждаем неотделимость $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ друг от друга.

В самом деле, пусть H есть *какая-нибудь* покрышка для $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \dashv H$. Имеем $E_{\gamma_\alpha} \dashv H$ при всяком α, $\alpha < \Omega$.

Значит, $E_{\gamma_\alpha} \cdot CH \equiv 0$ и символ $\overline{E_{\gamma_\alpha} \cdot CH}$ всегда есть число натуральное (или нуль). Поэтому существует такой *фиксированный* трансфинитный индекс λ и такое *фиксированное* натуральное число p, что равенство $\overline{E_{\gamma_\alpha} \cdot CH} = p$ справедливо для *бесконечно многих* индексов α, меньших чем λ, $\alpha < \lambda$.

С другой стороны, является очевидным существование такого *фиксированного* трансфинитного индекса μ, чтобы было удовлетворено неравенство $\gamma_\lambda < \delta_\mu$. Мы теперь утверждаем, что никакой элемент E_{δ_β} множества $\mathfrak{N}$ не может быть ортогональным к покрышке H, когда $\beta > \mu$.

В самом деле, возьмем фиксированное β, $\beta > \mu$, и предположим, что $H \cdot E_{\delta_\beta} \equiv 0$. Тогда символ $\overline{H \cdot E_{\delta_\beta}} = q$ есть число натуральное. Пусть m — наибольшее из двух чисел p и q. Ясно, что на остатке R_m натурального ряда мы имеем $E_{\delta_\beta} < CH$ и, в то же самое время, $E_{\gamma_\alpha} < H$ для *бесконечно многих* α, $\alpha < \lambda$. Но очевидно имеем $\gamma_\alpha < \gamma_\lambda < \delta_\mu < \delta_\beta$.

Отсюда на *фиксированном* остатке R_m части E_{γ_α} и E_{δ_β} не имеют общего элемента и, значит, имеем $\overline{E_{\gamma_\alpha} \cdot E_{\delta_\beta}} \leqslant m$. Но это противоречит требованию иметь $\overline{E_{\gamma_\alpha} \cdot E_{\delta_\beta}} \to +\infty$ при переменном α, $\gamma_\alpha < \delta_\beta$.

Теперь, если бы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ были отделимы друг от друга какими-нибудь покрышками H и K, $\mathfrak{M} \prec H$, $\mathfrak{N} \prec K$, $H \cdot K = 0$, то, приняв во внимание, что $\mathfrak{M} = \{E_{\gamma_\alpha}\}$ и $\mathfrak{N} = \{E_{\delta_\beta}\}$, мы должны были бы иметь $E_{\delta_\beta} \prec K$ и, значит, $H \cdot E_{\delta_\beta} \equiv 0$ *при всяком* β, что, как мы видели, невозможно уже при $\beta > \mu$, где μ — фиксированное число, что и требовалось доказать.

Как резюме полученного, мы имеем:

1. *Всякие два* счетные *взаимно ортогональные множества* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *всегда отделимы.*

2. *Имеются пары взаимно ортогональных множеств* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$, *каждое мощности алэф-один, которые наверное неотделимы друг от друга.*

Естественно возникает вопрос о важном смешанном случае:

ПРОБЛЕМА I. *Установить отделимость или найти примеры неотделимости друг от друга двух взаимно ортогональных множеств* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$, *одно из которых счетное, а другое — мощности алэф-один.*

Монотонные трансфинитные последовательности. Последовательность бесконечных частей натурального ряда

$$E_0 E_1 \ldots E_\omega \ldots E_\alpha \ldots\ldots | \Omega \qquad (1)$$

называется *возрастающей*, если имеем $E_\alpha \prec E_\beta$ при $\alpha < \beta$. Она называется *существенно возрастающей*, когда имеется фиксированная грань λ, $\lambda < \Omega$, за которой нельзя встретить соотношения $E_\alpha \equiv E_\beta$ для $\lambda < \alpha < \beta$. Аналогичные определения имеем для *убывающих* и *существенно убывающих* последовательностей. Возрастающие и убывающие последовательности носят объединяющее их название *монотонных* последовательностей.

Последовательность называется *стационарной*, когда за фиксированной гранью λ всегда имеем соотношение $E_\alpha \equiv E_\beta$ при $\lambda < \alpha < \beta$.

Всякая возрастающая нестационарная последовательность (1) *содержит в себе существенно возрастающую трансфинитную последовательность.*

Это замечание вполне тривиально, ибо достаточно удалить из последовательности (1) все интервалы стационарности, внутри каждого из которых имеем $E_\alpha \equiv E_\beta$, оставив неудаленным один лишь левый конец каждого из них; оставшиеся члены образуют, очевидно, существенно возрастающую последовательность типа Ω.

Имеются существенно возрастающие трансфинитные последовательности.

В целях лишь ускорения изложения (и не в порядке метода) мы прибегаем к геометрическим образам. Возьмем какую-нибудь трансфинитную последовательность

$$f_0(n)\ f_1(n) \ldots f_\omega(n) \ldots f_\alpha(n) \ldots\ldots | \Omega$$

арифметических функций П. дю Буа Реймонда натурального аргумента n, т. е. такую, что $f_\alpha(n)$ есть натуральное число при всяком α и $f_\beta(n) - f_\alpha(n) \to +\infty$, если $\alpha < \beta$, когда n безгранично возрастает. На плоскости XOY мы наносим кривую $y = f_\alpha(x)$ и нумеруем натуральными числами 1, 2, 3, 4, ... *все* точки $M(x, y)$ плоскости XOY, имеющие координаты x, y, равные натуральным числам. Наконец, обозначаем через E_α ту часть натурального ряда R, которая соответствует точкам $M(x, y)$, лежащим *ниже* кривой $y = f_\alpha(x)$.

Ясно, что трансфинитная последовательность частей ряда

$$E_0 \supset E_1 \supset \ldots \supset E_\omega \supset \ldots \supset E_\alpha \supset \ldots\ldots |\Omega \tag{2}$$

есть *существенно возрастающая*, что и требовалось доказать.

Отделимые встречные трансфинитные последовательности. Если мы возьмем две какие-нибудь бесконечные части H и K натурального ряда, не имеющие общего элемента, $H \cdot K = 0$, и установим взаимно однозначное соответствие *сначала* между элементами натурального ряда R и элементами части H, а *потом* между элементами ряда R и части K, то в этом случае трансфинитная последовательность (2) *порождает сразу две встречные существенно возрастающие последовательности типа* Ω

$$E_0 \supset E_1 \supset \ldots \supset E_\omega \supset \ldots \supset E_\alpha \supset \ldots | \ldots \subset \mathcal{E}_\beta \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \mathcal{E}_\omega \subset \ldots \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_0,$$

отделимые друг от друга покрышками H *и* K, ибо их члены E_α и $\mathcal{E}_\beta$ удовлетворяют соотношениям

$$E_\alpha \supset H, \quad \mathcal{E}_\beta \supset K, \quad H \cdot K = 0.$$

Поэтому мы имеем $E_\alpha \cdot \mathcal{E}_\beta \equiv 0$, $\alpha < \Omega$ и $\beta < \Omega$ любые, и, следовательно, наши встречные *отделимые* последовательности *взаимно ортогональны*.

Неотделимые встречные взаимно ортогональные последовательности. Чтобы иметь их, достаточно предположить, что всякий член $\mathcal{E}_\beta$ правой последовательности есть бесконечная часть натурального ряда, соприкасающаяся к соответствующему сегменту $\{E_\alpha\}$, $\alpha < \beta$, левой. Мы утверждаем, что *две такие встречные возрастающие последовательности заведомо неотделимы одна от другой*.

В самом деле, пусть H — какая-нибудь покрышка для левой последовательности, $E_\alpha \supset H$, $\alpha < \Omega$ — любое. Поэтому $E_\alpha \cdot CH \equiv 0$ и, значит, имеются фиксированные: трансфинитный индекс λ и натуральное число p такие, что уравнение $\overline{E_\alpha \cdot CH} = p$ удовлетворено для *бесконечно многих* α, $\alpha < \lambda$.

Значит, на остатке R_p имеем $E_\alpha < H$ для всех *таких* α. С другой стороны, соотношение $\mathcal{E}_\beta H \equiv 0$ невозможно для $\beta > \lambda$. Действительно, если бы оно осуществилось, мы бы имели $\overline{\mathcal{E}_\beta H} = q$, где q — натуральное. Значит, на остатке R_q имели бы $\mathcal{E}_\beta < CH$. Обозначая через m наибольшее из двух чисел p и q, на остатке R_m мы имели бы $E_\alpha \mathcal{E}_\beta = 0$, т. е. $\overline{E_\alpha \mathcal{E}_\beta} \leqslant m$ для *бесконечно многих* α, меньших фиксированного

β, $\alpha < \beta$. А это невозможно, ибо свойство соприкосновения части $\mathcal{E}_\beta$ к сегменту $\{E_\alpha\}$, $\alpha < \beta$, требует, чтобы $\overline{E_\alpha \mathcal{E}_\beta} \to +\infty$ при *переменном* α.

Итак, покрышка H для левой последовательности и всякая часть $\mathcal{E}_\beta$, $\beta > \lambda$, правой имеют бесконечно много общих элементов, что несовместимо с наличием отделяющей покрышки K для правой последовательности, что и требовалось доказать.

Итак, все сводится к построению встречных трансфинитных последовательностей со свойством соприкосновения каждой части $\mathcal{E}_\beta$ правой к соответствующему сегменту $\{E_\alpha\}$, $\alpha < \beta$, левой.

Предположим, что мы получили два встречных взаимно ортогональных вполне упорядоченных множества *типа* α:

$$E_0 \prec E_1 \prec \ldots \prec E_\beta \prec \ldots |\alpha \quad \alpha| \ldots \succ \mathcal{E}_\gamma \succ \ldots \succ \mathcal{E}_1 \succ \mathcal{E}_0, \tag{3}$$

имеющие нужные свойства:

1° $E_\beta \mathcal{E}_\gamma = 0$ для $\beta < \alpha$ и $\gamma < \alpha$,

2° $\mathcal{E}_\gamma$ соприкасается к сегменту $\{E_\beta\}$, $\beta < \gamma$.

Докажем, что можно *продолжить* построение, определив члены E_α и $\mathcal{E}_\alpha$ с сохранением свойств 1° и 2°. Предстоит рассмотреть два случая.

Число α непредельное: $\alpha = \alpha^* + 1$. Применение теоремы П. дю Буа Реймонда дает покрышки H и K такие, что $E_\beta \prec H$, $\mathcal{E}_\gamma \prec K$, $H \cdot K = 0$ при любых $\beta < \alpha$ и $\gamma < \alpha$. В этом случае мы просто полагаем $E_\alpha = H$ и $\mathcal{E}_\alpha = K$, ибо ясно, что K соприкасается ко всему левому множеству (3).

Число α предельное: $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\nu < \ldots$, $\alpha_\nu \to \alpha$ при $\nu \to +\infty$. Сохраняя те же покрышки П. дю Буа Реймонда H и K, обозначим через B_ν совокупность индексов β, для которых $\overline{E_\beta K} = \nu$, где $\beta < \alpha$. Если B_ν при всяком натуральном ν есть конечное множество, K соприкасается ко всему левому множеству и мы, попрежнему, полагаем $E_\alpha = H$ и $\mathcal{E}_\alpha = K$. Если для фиксированного ν множество B_ν бесконечно, оно, очевидно, имеет *тип* ω и конфинально числу α. В этом случае, уничтожая в B_ν индексы β, меньшие чем α_ν, мы обозначаем совокупность удержанных в B_ν индексов β через B_ν^* и составляем сумму $B^* = B_1^* + B_2^* + \ldots + B_\nu^* + \ldots$ Ясно, что B^* имеет тип ω и конфинально числу α. Следовательно, можно написать $B^* = \{\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_k^*, \ldots\}$, где все β_k^* расположены в *возрастающем* порядке. Значит, имеем $E_{\beta_1^*} \prec E_{\beta_2^*} \prec \ldots \prec E_{\beta_k^*} \prec \ldots$, причем эту последовательность всегда можно предполагать *существенно возрастающей*, ибо таковым мы можем предполагать все левое множество (3). Это означает, что в $E_{\beta_k^*}$ входит бесконечно много элементов, не входящих в предыдущую часть $E_{\beta_{k-1}^*}$. Отсюда следует, что всегда можно определить такую бесконечную часть E^* натурального ряда, $E^* = \{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_k^*, \ldots\}$, элементы e_k^* которой расположены в возрастающем порядке, причем e_k^* входит в часть $E_{\beta_k^*}$ и заведомо не вхо-

дит ни в одну из предыдущих частей $E_{\beta_1^*}$, $E_{\beta_2^*}$, ..., $E_{\beta_{k-1}^*}$. В этих условиях ясно, что имеем $\overline{E_{\beta_k^*} \cdot E^*} = e_k^*$ для всякого k. Очевидно, что найденная бесконечная часть E^* натурального ряда ортогональна ко всякому элементу E_β, $\beta < \alpha$, левого множества (3). Поэтому, вынув из H все элементы части E^*, т. е. составив *разность* $E_\alpha = H - E^*$, мы убеждаемся в том, что $E_\beta \lessdot E_\alpha$, $\beta < \alpha$, причем мы не можем иметь $E_\beta \equiv E_\alpha$. Ясно, далее, что, присоединив к покрышке K все элементы части E^*, т. е. составив *сумму* $\mathcal{E}_\alpha = K + E^*$, мы имеем $\mathcal{E}_\alpha \gtrdot \mathcal{E}_\gamma$, $\gamma < \alpha$, причем соотношение $\mathcal{E}_\alpha \equiv \mathcal{E}_\gamma$ невозможно. Затем, мы имеем $E_\alpha \cdot \mathcal{E}_\alpha = 0$, откуда $E_\alpha \cdot \mathcal{E}_\gamma \equiv 0$, $\gamma < \alpha$, и $E_\beta \mathcal{E}_\alpha \equiv 0$, $\beta < \alpha$.

Наконец, неравенство $\overline{E_\beta \cdot \mathcal{E}_\alpha} \geqslant \overline{E_\beta \cdot K}$ показывает, что имеем $\overline{E_\beta \mathcal{E}_\alpha} \rightarrow +\infty$ при β *переменном*, но остающемся *меньше некоторого* фиксированного $\beta_0 < \alpha$. А неравенство $\overline{E_{\beta_k^*} \mathcal{E}_\alpha} \geqslant \overline{E_{\beta_k^*} \cdot E^*} = e_k^*$, где $e_k^* \rightarrow +\infty$, когда k безгранично возрастает, удостоверяет, что, *приняв во внимание самое определение части* E^*, имеем $\overline{E_\beta \mathcal{E}_\alpha} \rightarrow +\infty$ при *всяком* возрастании переменного индекса β и стремлении его к пределу α. Отсюда мы заключаем, что $\mathcal{E}_\alpha$ *соприкасается ко всему левому множеству* (3), и что поэтому построенные E_α и $\mathcal{E}_\alpha$ пополняют наши встречные вполне упорядоченные множества (3), продолжая их при сохранении нужных нам свойств 1° и 2°, что и требовалось доказать.

Как резюме изложенного, мы имеем:

3. *Всякие две встречные существенно возрастающие и взаимно ортогональные последовательности прямого и обратного типов* ω *и* ω^* *всегда отделимы друг от друга.*

4. *Имеются пары встречных существенно возрастающих и взаимно ортогональных последовательностей прямого и обратного типов* Ω *и* Ω^*, *которые заведомо неотделимы друг от друга.*

Таким образом, и здесь проявляется давно известный математическому анализу *феномен Пифагора*, состоящий в невозможности вставить между двумя, идущими навстречу друг другу, специально подобранными последовательностями рациональных точек, рациональную точку.

Если мы будем называть *реальной точкой* все бесконечные части E', E'', ... натурального ряда, конгруентные друг другу, т. е. $E' \equiv E'' \equiv \ldots$, то на построенной таким образом *трансфинитной прямой* (при отбрасывании реальных точек, не помещающихся на ней) наблюдается тот же самый феномен Пифагора «трансфинитной иррациональности».

Далее, естественно возникают следующие важные проблемы.

ПРОБЛЕМА II. *Установить отделимость или найти примеры неотделимости друг от друга двух встречных существенно возрастающих и взаимно ортогональных последовательностей прямого и обратного типов* ω *и* Ω^* (*или* Ω *и* ω^*).

ПРОБЛЕМА III. *Установить* (*или опровергнуть*) *существование двух встречных существенно возрастающих и взаимно ортогональных*

последовательностей прямого и обратного типов Ω и Ω^* таких, что между ними можно вставить лишь одну реальную точку.

Наконец, наиболее интересная из всех проблем:

ПРОБЛЕМА IV. *Установить (или опровергнуть) наличие такой существенно убывающей последовательности бесконечных частей натурального ряда*

$$E_0 \succ E_1 \succ E_2 \succ \ldots \succ E_\omega \succ \ldots \succ E_\alpha \succ \ldots\ldots \,|\, \Omega,$$

которая не допускает никакой бесконечной части E натурального ряда, удовлетворяющей соотношению $E_\alpha \succ E$ при всяком α, $\alpha < \Omega$.

Все эти проблемы, представляющие собою дериваты континуум-проблемы, по нашему убеждению, не могут иметь решения при существующих взглядах на трансфинитное и натуральный ряд чисел.

Примечание. Изложенное выше не следует рассматривать как желание приблизиться к *конструктивному* решению континуум-проблемы. Многое в этом отношении можно было бы сказать, но здесь мы ограничимся лишь несколькими тезисами. Континуум-проблема утра тила научное значение еще задолго до последних изысканий о непротиворечивости континуум-гипотезы, стоящих, по справедливому замечанию Адамара, более на почве физиологии мозга, чем на почве математики. Континуум-проблема переросла в вопрос первой важности: *как возможен натуральный ряд чисел?*

Автор держится русла идей Пуанкаре и Бореля, стремившихся отрицать актуальную бесконечность во всех ее видах. К сожалению, Пуанкаре под влиянием доктрины Канта о синтетических суждениях *à priori* в арифметике, повидимому, колебался совсем отказать натуральному ряду в актуальной бесконечности,—то, от чего свободен Борель, рассматривающий трансфинитное и все затруднения с ним, как дериват *гипотезы* актуальной бесконечности натурального ряда.

В этом русле идей для нас теперь безразлично употребление или неупотребление аксиомы Цермело — различение, поведшееся от Лебега. Близость в арифметике той реформы, которую выполнил Лобачевский в геометрии, зависит от проницательности мыслителей, становящихся на этот путь, а также, по справедливому замечанию акад. И. П. Павлова, от смелости их концепций.

Эти размышления — я не имею необходимости об этом говорить — складывались у меня постепенно и прямое действие на них имели личные беседы с Вацлавом Константиновичем Серпинским и с проф. Владимиром Семеновичем Федоровым *.

Поступило
2.VI.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лузин Н. Н., О частях натурального ряда, Доклады Ак. Наук СССР, т. XL, № 5 (1943), 195—199.

---

* Я не должен пройти мимо переписки по некоторым затронутым здесь вопросам с И. В. Поповым и указания на письма, присланные мне по поводу проблемы I И. М. Максимовым.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
11 (1947), 411—504

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. А. НАЙМАРК

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе находятся все унитарные неприводимые представления унимодулярной комплексной группы второго порядка, локально изоморфной группе Лоренца.

Доказывается, что всякое унитарное представление разлагается на найденные неприводимые.

Символика и методы доказательств подобраны по возможности так, чтобы они поддавались перенесению на комплексные полупростые группы Ли.

Конечномерные представления группы Лоренца хорошо известны и широко используются в различных вопросах геометрии и физики. Все такие конечномерные представления сводятся, как известно, к тензорным и спинорным представлениям.

Вопрос о нахождении всех бесконечномерных унитарных представлений группы Лоренца до сих пор оставался открытым.

В данной работе находятся все унитарные бесконечномерные представления группы Лоренца*. Окончательный результат получается в виде простых формул [см. § 5, формулы (56), (65) и § 8, формулы (187), (188)].

Обращение с полученными величинами не сложнее, а в некотором отношении проще, чем с конечномерными спинорными представлениями.

Доказывается также, что всякое унитарное представление группы Лоренца разлагается на найденные нами неприводимые; таким образом, знание неприводимых представлений дает полное описание всех унитарных представлений группы Лоренца**.

Далее, регулярное представление разлагается на неприводимые. При этом обнаруживается следующее: в отличие от компактных и

---

* Краткое изложение основных результатов работы было дано в ([3]).

** В появившейся недавно работе Дирака ([1]) указаны некоторые унитарные представления группы Лоренца. Они, как показали авторы, приводимы и разлагаются на неприводимые с $n=0$ или $\rho=0$ (в обозначениях данной работы; см. §§ 5 и 8).

коммутативных групп, при разложении регулярного представления мы получаем не все неприводимые представления, а лишь представления так называемой «основной серии». Это обстоятельство не связано с осложнениями теоретико-множественного характера и является вполне «классическим». Мы получаем при этом аналог теоремы Планшереля (§ 7).

При наших представлениях каждому элементу g группы Лоренца соответствует унитарное преобразование U_g в бесконечномерном пространстве, которое в обычном смысле не имеет следа. Однако оператор $\int_Q U_g \, d\mu(g)$, где Q — компактное множество, уже имеет след. Исходя из этого, можно приписать след операторам U_g и тем самым ввести характеры представления [§ 6, формула (94)].

Формулы теории представлений отличаются обычно большим изяществом. Поэтому авторы старались не ограничиваться доказательствами существования и доводили каждый результат до окончательной формулы.

Разработанные здесь методы поддаются перенесению на произвольные комплексные полупростые группы Ли.

Вместо группы Лоренца мы рассматриваем, далее, группу G комплексных матриц второго порядка с детерминантом 1. Группа Лоренца локально изоморфна ей, так что, найдя все представления группы G, мы тем самым найдем все представления группы Лоренца.

§ 1. Некоторые подгруппы группы G

Во всей этой статье существенную роль будут играть некоторые подгруппы группы G. Именно, представления G мы будем строить в виде операторов в пространстве функций классов смежности группы G по некоторым ее подгруппам.

1. Подгруппа K. Обозначим через K совокупность всех матриц $k \in G$ вида

$$k = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Очевидно, K — подгруппа G. Так как определитель такой матрицы равен $k_{11}k_{22}$, то

$$k_{11}k_{22} = 1. \tag{2}$$

Таким образом, элемент k определяется двумя независимыми комплексными параметрами, например, k_{12} и k_{22}. Левый сдвиг $k \to k'k$ сводится к преобразованию

$$\begin{aligned} k_{12} &\to k'_{11}k_{12} + k'_{12}k_{22}, \\ k_{22} &\to k'_{22}k_{22} \end{aligned} \tag{3}$$

этих параметров, определитель которого равен $k'_{11}k'_{22} = 1$.

Положим

$$k_{12} = u_{12} + iv_{12}, \quad k_{22} = u_{22} + iv_{22};$$

тогда (3) сводится к линейному преобразованию переменных u_{ik}, v_{ik}, якобиан которого равен квадрату модуля определителя преобразования (3), т. е. равен единице.

Отсюда следует, что лево-инвариантная мера в K задается равенством

$$d\mu_l(k) = du_{12}\, dv_{12}\, du_{22}\, dv_{22}. \tag{4}$$

Совершенно аналогично, правый сдвиг $k \to kk'$ есть линейное преобразование

$$\begin{aligned} k_{12} &\to k_{11}k'_{12} + k_{12}k'_{22}, \\ k_{22} &\to k'_{22}k_{22} \end{aligned} \tag{5}$$

переменных k_{12}, k_{22} с определителем $\Delta = k'_{22}$. Отсюда для право-инвариантной меры в K получаем:

$$d\mu_r(k) = |k_{22}|^{-4}\, du_{12}\, dv_{12}\, du_{22}\, dv_{22}. \tag{6}$$

Введем обозначение

$$\beta(k) = \frac{d\mu_l(k)}{d\mu_r(k)}. \tag{7}$$

Тогда, в силу (4) и (6),

$$\beta(k) = |k_{22}|^4. \tag{8}$$

Отсюда и из (3) и (5) следует, что

$$\beta(k_1k_2) = \beta(k_1)\,\beta(k_2). \tag{9}$$

2. Подгруппа H. Обозначим через H совокупность всех матриц h из G вида

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Очевидно, H есть подгруппа G. Кроме того, как и выше,

$$h_{11}h_{22} = 1. \tag{11}$$

Подгруппу H можно получить из K следующим образом. Обозначим через s матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда автоморфизм $g \to s^{-1}gs$ переводит H в K и K в H. Отсюда, полагая

$$h_{21} = u_{21} + iv_{21}, \quad h_{22} = u_{22} + iv_{22},$$

получим следующие выражения для дифференциалов лево- и право-инвариантной меры в H:

$$d\mu_l(h) = |h_{22}|^{-4} du_{12} dv_{12} du_{22} dv_{22}, \tag{12}$$

$$d\mu_r(h) = du_{12} dv_{12} du_{22} dv_{22}. \tag{13}$$

Таким образом,

$$\frac{d\mu_l(h)}{d\mu_r(h)} = |h_{22}|^{-4}. \tag{14}$$

3. Подгруппа Z. Обозначим через Z совокупность матриц z вида*

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Очевидно, Z — подгруппа H; умножение матриц z_1, z_2 сводится к сложению параметров z_1 и z_2, следовательно, Z коммутативна, именно, изоморфна аддитивной группе комплексных чисел. Отсюда следует, что при $z = x + iy$ инвариантная мера в Z определяется равенством

$$d\mu(z) = dx dy. \tag{16}$$

4. Подгруппа Z. Обозначим через Z совокупность всех матриц ζ вида

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Очевидно, Z — подгруппа K. Кроме того, очевидно, что Z также изоморфна аддитивной группе комплексных чисел. Отсюда следует, что при $\zeta = \xi + i\eta$ инвариантная мера в Z определяется равенством

$$d\mu(\zeta) = d\xi\, d\eta. \tag{18}$$

5. Подгруппа D. Обозначим через D совокупность всех диагональных матриц группы G, т. е. всех матриц δ вида

$$\delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Очевидно, $D = K \cap H$. Группа D изоморфна мультипликативной группе комплексных чисел.

Положим $\lambda = \sigma + i\tau$. В силу только что сказанного, инвариантная мера в D определяется равенством

$$d\mu(\delta) = \frac{d\sigma d\tau}{|\lambda|^2}. \tag{20}$$

§ 2. Некоторые соотношения между группой G и подгруппами H, K, Z, Z, D

В дальнейшем нам понадобятся некоторые теоремы о представлении элементов G в виде произведения элементов рассмотренных нами подгрупп. Эти теоремы окажутся полезными при изучении классов смежности G по этим подгруппам.

---

* В дальнейшем мы будем обозначать одной и той же буквой z элемент группы Z и комплексный параметр, определяющий этот элемент. Это, однако, никогда не приведет к недоразумению. Аналогичную оговорку следует сделать и в отношении введенной ниже группы Z.

I. *Всякий элемент k можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$k = \delta\zeta, \tag{21}$$

а также в виде

$$k = \zeta\delta. \tag{22}$$

В самом деле, в силу (1), (17) и (19), равенство (21) эквивалентно равенствам

$$k_{12} = \lambda^{-1}\zeta, \quad k_{22} = \lambda, \tag{23}$$

из которых однозначно определяются λ и ζ.

Аналогично, равенство (22) эквивалентно равенствам

$$k_{12} = \lambda\zeta, \quad k_{22} = \lambda, \tag{24}$$

из которых также однозначно определяются λ и ζ.

Совершенно аналогично:

II. *Всякий элемент h можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$h = \delta z, \tag{25}$$

а также в виде

$$h = z\delta. \tag{26}$$

III. *Всякий элемент g, удовлетворяющий условию $g_{22} \neq 0$, можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$g = kz, \tag{27}$$

а также в виде

$$g = \zeta h. \tag{28}$$

Действительно, в силу (1) и (15), равенство (27) эквивалентно равенствам

$$g_{12} = k_{12}, \quad g_{21} = k_{22}z, \quad g_{22} = k_{22}, \tag{29}$$

из которых однозначно определяются k_{12}, k_{22} и z. Кроме того, так как $k_{22} \neq 0$, то, в силу (29), условие $g_{22} \neq 0$ является необходимым для возможности представления (27).

Аналогично доказывается (28).

Совокупность элементов g, не представимых в виде (27) и (28), образует в G многообразие $g_{22} = 0$ низшей размерности, следовательно, меры нуль по отношению к инвариантной мере в G.

IV. *Всякий элемент g с различными собственными значениями λ_1, λ_2 $(\lambda_1\lambda_2 = 1)$ и удовлетворяющий условию $g_{12} \neq 0$ можно представить в виде*

$$g = z^{-1}kz, \tag{30}$$

причем $k_{11} = \lambda_1$, $k_{22} = \lambda_2$. При заданном порядке чисел λ_1, λ_2 числа z и k_{12} определяются равенством (30) *однозначно.*

Пусть $x = \|x_{pq}\|$ — матрица, удовлетворяющая условию

$$xg = \delta x, \quad \delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Это условие эквивалентно равенствам

$$x_{p1}g_{1q} + x_{p2}g_{2q} = \lambda_p x_{pq} \quad (p, q = 1, 2), \tag{32}$$

которые при фиксированном p определяют x_{p1}, x_{p2} с точностью до множителя. При $p = q = 2$ получаем

$$x_{21}g_{12} + x_{22}(g_{22} - \lambda_2) = 0.$$

Если $x_{22} = 0$, то, в силу $g_{12} \neq 0$, должно также быть $x_{21} = 0$. Поэтому для нетривиального решения $x_{22} \neq 0$.

В силу III, матрицу x можно представить в виде $x = k_1 z$; тогда, в силу (31),

$$g = x^{-1}\delta x = z^{-1}k_1^{-1}\delta k_1 z = z^{-1}kz$$

и, очевидно,

$$k_{11} = \lambda_1, \quad k_{22} = \lambda_2.$$

При заданном порядке λ_1, λ_2 из равенств (30), (1) и (15) следует, что

$$k_{12} = g_{12}, \quad -zk_{12} + k_{22} = g_{22}.$$

Эти равенства определяют k_{12} и z единственным образом.

Итак, имеется два различных представления (30), которые соответствуют двум перестановкам собственных значений λ_1, λ_2 матрицы G.

§ 3. Соотношения между интегралами по G и по подгруппам K, H, Z, Z, D

Результаты §§ 1 и 2 дают возможность сводить интегрирование по группе к повторному интегрированию по подгруппам.

1. Пусть $f(k)$ — суммируемая функция на K. В силу (21), мы можем писать $f(k) = f(\delta\zeta)$ и рассматривать f как функцию от δ и ζ.

Далее, в силу (4),

$$\int f(k)\, d\mu_l(k) = \int f(k)\, du_{12}\, dv_{12}\, du_{22}\, dv_{22}. \tag{33}$$

С другой стороны, равенство $k = \delta\zeta$ эквивалентно равенствам

$$k_{12} = \frac{1}{\lambda}\zeta, \quad k_{22} = \lambda. \tag{34}$$

Комплексный якобиан преобразования (34) от переменных k_{12}, k_{22} к переменным ζ и λ равен $\frac{1}{\lambda}$. Но (34) определяет преобразование в (33) от переменных u_{ik}, v_{ik} к ξ, η, σ и τ, якобиан которого равен квадрату модуля комплексного якобиана. Таким образом, в силу (18) и (20), равенство (33) можно переписать в виде

$$\int f(k)\, d\mu_l(k) = \iint f(\delta\zeta)\, d\mu(\zeta)\, d\mu(\delta). \tag{35}$$

Совершенно аналогично,

$$\int f(k)\, d\mu_r(k) = \iint f(\zeta\delta)\, d\mu(\zeta)\, d\mu(\delta), \tag{36}$$

$$\int f(h)\, d\mu_l(h) = \iint f(\delta z)\, d\mu(z)\, d\mu(\delta), \tag{37}$$

$$\int f(h)\, d\mu_r(h) = \iint f(z\delta)\, d\mu(z)\, d\mu(\delta). \tag{38}$$

2. Пусть теперь $f(g)$—суммируемая функция на G. В силу (27), $f(g)=f(kz)$ для почти всех g, так что f можно рассматривать как функцию двух переменных k и z.

Легко видеть, что

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(g) \frac{d\alpha_{12}d\beta_{12}d\alpha_{21}d\beta_{21}d\alpha_{22}d\beta_{22}}{|g_{22}|^2} \quad (g_{pq}=\alpha_{pq}+i\beta_{pq}). \tag{39}$$

Переход от g к k и z в (27) эквивалентен преобразованию (29) от переменных g_{12}, g_{21}, g_{22} к переменным k_{12}, k_{22}, z, комплексный якобиан которого равен $k_{22}=g_{22}$. Поэтому (39) можно переписать в виде

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(kz)\, du_{12}\, dv_{12}\, du_{22}\, dv_{22}\, dx\, dy,$$

т. е.. в силу (4) и (16),,

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \iint f(kz)\, d\mu_l(k)\, d\mu(z). \tag{40}$$

Совершенно аналогично,

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \iint f(\zeta h)\, d\mu_r(h)\, d\mu(\zeta). \tag{41}$$

3. Пусть $f(g)$ и $\varphi(k)$—функции на G и на K, λ_g, $\frac{1}{\lambda_g}$ — собственные значения g, k_g—элемент K, определяемый равенством $z^{-1}k_g z=g$, $\beta(k)$—функция, определенная в п. 1 § 1. Тогда

$$\iint f(z^{-1}kz)\varphi(k)\, d\mu_l(k)\, d\mu(z) = \int f(g) \frac{\sum \varphi(k_g)\, \beta^{\frac{1}{2}}(k_g)}{\left|\lambda_g-\frac{1}{\lambda_g}\right|^2}\, d\mu(g) =$$

$$= \int f(g) \frac{\sum \varphi(k_g)\, \beta^{\frac{1}{2}}(k_g)}{|(g_{11}+g_{22})^2-4|}\, d\mu(g), \tag{42}$$

где сумма состоит из двух слагаемых, соответствующих двум представлениям g в виде $g=z^{-1}k_g z$.

Для доказательства выбросим из K те элементы k, у которых $|k_{11}|=|k_{22}|=1$. Мы рассечем K на две связные области K_1 и K_2,

в каждой из которых нет двух матриц, диагональные элементы которых отличались бы только порядком. Так как выброшенные элементы k образуют многообразие низшей размерности, то интеграл в левой части (42) по K равен сумме интегралов по K_1 и K_2. Но, в силу IV § 2, если z пробегает Z, а k — одну из областей K_1 или K_2, то $g = z^{-1}kz$ однократно пробегает почти всю группу G.

Переход от g к z и k в равенстве $g = z^{-1}kz$ эквивалентен преобразованию

$$g_{12} = k_{12}, \quad g_{21} = -k_{12}z^2 + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)z, \quad g_{22} = -k_{12}z + \lambda, \quad (\lambda = k_{22})$$

от переменных g_{12}, g_{21}, g_{22} к переменным k_{12}, λ, z, комплексный якобиан которого

$$\frac{\partial(g_{12}, g_{21}, g_{22})}{\partial(k_{12}, z, \lambda)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z^2 & -2k_{12}z + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) & \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)z \\ -z & -k_{12} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)(-k_{12}z + \lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)g_{22}.$$

Поэтому якобиан соответствующего преобразования от переменных α_{pq}, β_{pq} к переменным $u_{12}, v_{12}, \sigma, \tau, x, y$ равен

$$|\lambda|^{-2}\left|\lambda - \frac{1}{\lambda}\right|^2 |g_{22}|^2 = \beta^{-\frac{1}{2}}(k)\left|\lambda - \frac{1}{\lambda}\right|^2 |g_{22}|^2.$$

Отсюда, обозначая через k'_g элемент из K_1, удовлетворяющий условию $g = z^{-1}k'_g z$, получим

$$\int\limits_{K_1}\left[\int f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu(z)\right]d\mu_l(k) = \int\limits_{K_1}\left[\int f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,dx\,dy\right]du_{12}dv_{12}d\sigma\,d\tau =$$

$$= \int f(g)\,\varphi(k'_g)\,\beta^{\frac{1}{2}}(k'_g)\left|\lambda_g - \frac{1}{\lambda_g}\right|^{-2}|g_{22}|^{-2}\,d\alpha_{12}\,d\beta_{12}\,d\alpha_{21}\,d\beta_{21}\,d\alpha_{22}\,d\beta_{22},$$

т. е.

$$\int\limits_{K_1}\left[\int f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)d\mu(z)\right]d\mu_l(k) = \int f(g)\frac{\varphi(k'_g)\,\beta^{\frac{1}{2}}(k'_g)}{\left|\lambda_g - \frac{1}{\lambda_g}\right|^2}\,d\mu(g).$$

Написав аналогичное равенство для K_2 и складывая оба равенства, приходим к (42).

§ 4. Классы смежности по Z и K

1. Классы смежности по Z. Будем обозначать через $\tilde{h}$ правые классы смежности G по Z, т. е. совокупности элементов вида ζg_0 при фиксированном g_0. Совокупность всех этих классов, т. е. соответствующее однородное пространство обозначим через $\tilde{H}$. При умножении справа на g класс $\tilde{h}$ перейдет в некоторый новый класс $\tilde{h}'$; переход от $\tilde{h}$ к $\tilde{h}'$ есть, таким образом, преобразование пространства $\tilde{H}$.

Итак, каждому элементу g соответствует преобразование $\tilde{h} \to \tilde{h}'$ пространства $\tilde{H}$. Мы будем писать: $\tilde{h}' = \tilde{h}\bar{g}$.

Если $g_{22} \neq 0$, то, в силу III, § 2, g можно представить в виде $g = \zeta h$. Это равенство означает, что g и h принадлежат одному и тому же классу $\tilde{h}$. В силу единственности этого представления, в $\tilde{h}$ имеется только один элемент h. Отождествим $\tilde{h}$ с h; тогда H заполнит все пространство $\tilde{H}$ за исключением тех классов $\tilde{h}$, представители g которых удовлетворяют условию $g_{22} = 0$. Эти классы образуют в $\tilde{H}$ многообразие низшей размерности и играют роль бесконечно удаленных элементов H.

Таким образом, с точностью до многообразия низшей размерности H совпадает с $\tilde{H}$.

Преобразование $\tilde{h}' = \tilde{h}\bar{g}$ можно трактовать как преобразование в H и писать $h' = h\bar{g}$. Легко выписать это преобразование в параметрах h_{21}, h_{22}, определяющих h.

Равенство $h' = h\bar{g}$ означает, что h' и hg принадлежат одному и тому же классу смежности по Z т. е. $hg = \zeta h'$, или подробней

$$\begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'_{11} & 0 \\ h'_{21} & h'_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$h'_{21} = g_{11}h_{21} + g_{21}h_{22}, \quad h'_{22} = g_{12}h_{21} + g_{22}h_{22}. \tag{43}$$

Таким образом, преобразованию $h' = h\bar{g}$ соответствует линейное преобразование (43) переменных h_{21}, h_{22}. Комплексный якобиан преобразования (43) равен определителю матрицы g, т. е. единице. Поэтому якобиан соответствующего преобразования переменных $u_{21}, v_{21}, u_{22}, v_{22}$ ($h_{21} = u_{21} + iv_{21}$, $h_{22} = u_{22} + iv_{22}$) также равен единице. В силу (13), отсюда следует, что право-инвариантная мера в H инвариантна по отношению к преобразованию $h' = h\bar{g}$.

2. Классы смежности по K. Будем обозначать через $\tilde{z}$ правые классы смежности группы G по K, т. е. совокупность элементов вида kg_0 при фиксированном g_0. Совокупность всех этих классов обозначим через $\tilde{Z}$. Умножению справа на g соответствует преобразование $\tilde{z} \to \tilde{z}'$ в пространстве $\tilde{Z}$. Мы его обозначим через $\bar{g}$ и будем писать $\tilde{z}' = \tilde{z}\bar{g}$.

Если $g_{22} \neq 0$, то, в силу III, § 2, g можно представить в виде $g = kz$. Это означает, что g и z находятся в одном и том же классе $\tilde{z}$. В силу единственности этого представления, класс $\tilde{z}$ содержит только один элемент z. Отождествим $\tilde{z}$ с z; тогда Z заполнит все пространство $\tilde{Z}$ за исключением одного элемента. Действительно, полагая $g_0 = s$ (см. п. 2 § 1), найдем

$$kg_0 = ks = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ k_{22} & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу произвола k_{12} и k_{22}, последняя матрица пробегает все элементы группы G, удовлетворяющие условию $g_{22}=0$. Другими словами, все эти элементы образуют один класс $\tilde{z}_0=\{ks\}$, играющий роль бесконечно удаленного элемента группы Z.

Преобразование $\tilde{z}'=\tilde{z}\bar{g}$ можно рассматривать как преобразование $z'=z\bar{g}$ в Z; при этом элемент $z\bar{g}$ определен для всех элементов z, кроме одного, который преобразованием g переводится в бесконечно удаленный элемент.

Преобразование $z'=z\bar{g}$ сводится к преобразованию параметра z, определяющего матрицу z. Легко выписать его в явном виде. Так как z' и zg принадлежат одному классу смежности по K, то $zg=kz'$, т. е.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ 0 & k_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ z' & 1\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$g_{11}z+g_{21}=k_{22}z', \quad g_{12}z+g_{22}=k_{22},$$

следовательно,

$$z'=\frac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}. \tag{44}$$

Итак, *преобразование $z'=z\bar{g}$ в Z сводится к преобразованию* (44) *параметра z.*

Якобиан этого преобразования равен квадрату модуля производной $\frac{dz'}{dz}$, т. е. равен

$$|g_{12}z+g_{22}|^{-4}. \tag{45}$$

Это выражение можно записать в теоретико-групповых обозначениях следующим образом. Положим $\beta(g)=\beta(k)$ для $g=kz$. Тем самым мы распространим $\beta(k)$ на почти всю группу G, причем, как легко видеть,

$$\beta(g)=|g_{22}|^{4} \tag{46}$$

и

$$\beta(kg)=\beta(k)\beta(g). \tag{47}$$

Поэтому выражение (45) совпадает с $\beta^{-1}(zg)$ и, следовательно,

$$\frac{d\mu(z\bar{g})}{d\mu(z)}=\beta^{-1}(zg). \tag{48}$$

§ 5. Основная серия неприводимых представлений группы G

Мы переходим теперь к построению неприводимых представлений группы G. Для этого рассмотрим сначала некоторые приводимые представления G.

1. Регулярное представление группы G. Обозначим через $\mathfrak{H}_g$ гильбертовское пространство функций $f(g)$ с суммируемым квадратом на G, в котором скалярное произведение определено равенством

$$(f_1, f_2)=\int f_1(g)\overline{f_2(g)}\,d\mu(g). \tag{49}$$

Положим

$$V_{g_0} f(g) = f(gg_0). \tag{50}$$

В силу инвариантности $d\mu(g)$, равенство (50) определяет унитарный оператор в $\mathfrak{H}_g$. Очевидно, V_g — унитарное представление группы G. Назовем его **регулярным представлением группы** G.

В случае конечной или компактной группы регулярное представление замечательно тем, что в его разложении на неприводимые представления содержатся все неприводимые представления этой группы. Ниже мы увидим, что это обстоятельство не имеет места для группы G.

2. **Квази-регулярное представление группы** G. Обозначим через $\mathfrak{H}_H$ гильбертовское пространство функций $f(h)$ с суммируемым квадратом на H относительно право-инвариантной меры, в котором скалярное произведение определено равенством

$$(f_1, f_2) = \int f_1(h) \overline{f_2(h)}\, d\mu_r(h). \tag{51}$$

Положим

$$U_g f(h) = f(h\bar{g}). \tag{52}$$

Согласно п. 1 § 4, $d\mu_r(h)$ инвариантна по отношению к преобразованию $h' = h\bar{g}$, поэтому U_g — унитарный оператор в $\mathfrak{H}_H$. Очевидно, U_g — унитарное представление группы G. Назовем его **квази-регулярным представлением группы** G. Ниже мы увидим, что оно разлагается на те же неприводимые представления, что и регулярное представление, но содержит каждое из этих неприводимых представлений не более двух раз.

3. **Разложение квази-регулярного представления группы G на неприводимые представления.** Пусть $f = f(h)$ — произвольный элемент пространства $\mathfrak{H}_H$. Согласно равенствам (12), (13) и (37),

$$\| f \|^2 = \int |f(h)|^2 d\mu_r(h) = \int |f(h)|^2 \beta(h)\, d\mu_l(h) = \iint |f(\delta z)\, \beta^{\frac{1}{2}}(\delta)|^2\, d\mu(\delta)\, d\mu(z). \tag{53}$$

Поэтому для почти всех фиксированных z функция $f(\delta z)\,\beta^{\frac{1}{2}}(\delta)$ есть функция от δ с суммируемым квадратом на группе D.

Пусть X — группа характеров $\chi(\delta)$ группы D, т. е. характеров мультипликативной группы комплексных чисел. Рассмотрим трансформацию Фурье

$$f_\chi(z) = \int f(\delta z)\, \beta^{\frac{1}{2}}(\delta)\, \chi(\delta)\, d\mu(\delta) \tag{54}$$

функции $f(\delta z)\,\beta^{\frac{1}{2}}(\delta)$. Согласно теореме Планшереля, она будет функцией

от χ с суммируемым квадратом модуля на X и при надлежащей нормировке меры на X

$$\int |f_\chi(z)|^2 d\mu(\chi) = \int |f(\delta z)\beta^{\frac{1}{2}}(\delta)|^2 d\mu(\delta).$$

Поэтому равенство (53) перепишется в виде

$$\|f\|^2 = \iint |f_\chi(z)|^2 d\mu(z)\, d\mu(\chi). \tag{55}$$

Пусть $\mathfrak{H}_Z$ — гильбертовское пространство функций $f(z)$ с суммируемым квадратом модуля на Z, в котором скалярное произведение определено равенством

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z)\overline{f_2(z)}\, d\mu(z). \tag{56}$$

Равенство (55) означает, что $\mathfrak{H}_H$ есть континуальная прямая сумма гильбертовских пространств $\mathfrak{H}^\chi = \mathfrak{H}_Z$.

Посмотрим теперь, как преобразуется $f_\chi(z)$ при переходе от $f(h)$ к $f(h\overline{g})$. Положим

$$f'(h) = f(hg), \quad h' = hg, \quad h = \delta z, \quad h' = \delta' z'. \tag{57}$$

Так как hg и h' принадлежат одному и тому же правому классу смежности по Z, то $hg = \zeta h'$ и, следовательно, в силу (57), $\delta z g = \zeta\delta' z'$. Отсюда

$$zg = \delta^{-1}\zeta\delta' z' = \delta^{-1}\zeta\delta \cdot \delta^{-1}\delta' z'. \tag{58}$$

Легко проверить, что $\delta^{-1}\zeta\delta$ есть элемент Z. Мы обозначим его через ζ'; положим, далее, $\delta^{-1}\delta' = \delta_1$, следовательно,

$$\delta' = \delta\delta_1. \tag{59}$$

Тогда равенство (58) перепишется в виде

$$zg = \zeta'\delta_1 z'. \tag{60}$$

Равенство (60) означает, что zg и z' находятся в одном классе смежности по K, следовательно, $z' = z\overline{g}$; кроме того, из него следует, что δ_1 зависит только от z и g и, в частности, не зависит от δ. Таким образом,

$$hg = h' = \delta' z' = \delta\delta_1 \cdot z\overline{g}.$$

Но тогда

$$f'_\chi(z) = \int f(\delta\delta_1 \cdot z\overline{g})\beta^{\frac{1}{2}}(\delta)\overline{\chi(\delta)}\, d\mu(\delta) = \int f(\delta \cdot z\overline{g})\beta^{\frac{1}{2}}(\delta\delta_1^{-1})\overline{\chi(\delta\delta_1^{-1})}\, d\mu(\delta) =$$

$$= \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta_1)\chi(\delta_1)\int f(\delta \cdot z\overline{g})\beta^{\frac{1}{2}}(\delta)\overline{\chi(\delta)}\, d\mu(\delta),$$

т. е.

$$f'_\chi(z) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta_1)\chi(\delta_1) f(z\overline{g}). \tag{61}$$

Мы видим, что $f'_\chi(z)$ зависит только от $f_\chi(z)$ и не зависит от $f_{\chi_1}(z)$ при $\chi_1 \neq \chi$. Это означает, что представление U_g разложено в континуальную прямую сумму представлений $U_{\chi;g}$ (в пространстве $\mathfrak{H}_Z$), определенных равенством

$$U_{\chi;g} f(z) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta_1)\chi(\delta_1) f(z\overline{g}). \tag{62}$$

Формулу (62) можно записать в более удобной форме, если положить $\chi(g) = \chi(\delta)$ для $g = \zeta\delta z$. Тогда из равенства (60) будет следовать, что $\chi(\delta_1) = \chi(zg)$; аналогично, $\beta(\delta_1) = \beta(zg)$. Поэтому равенство (62) примет вид

$$U_{\chi;g} f(z) = \beta^{-\frac{1}{2}}(zg)\chi(zg) f(z\overline{g}). \tag{63}$$

Легко непосредственно проверить унитарность представлений $U_{\chi;g}$. В самом деле, так как $|\chi(\delta)| = 1$, то

$$\|U_{\chi;g} f\|^2 = \int \beta^{-1}(zg)\,|f(z\overline{g})|^2\, d\mu(z).$$

В силу (48), это выражение совпадает с

$$\int |f(z)|^2\, d\mu(z) = \|f\|^2.$$

Каждому характеру χ группы D соответствует унитарное представление $U_{\chi;g}$. Назовем совокупность всех этих представлений $U_{\chi;g}$ **основной серией представлений группы** G.

Положим, как и выше, $\delta = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Тогда $\chi(\delta)$ можно рассматривать как характер $\chi(\lambda)$ мультипликативной группы комплексных чисел λ. Положим, далее, $\lambda = re^{i\varphi}$; тогда

$$\chi(\lambda) = \chi(r)\chi(e^{i\varphi});$$

$\chi(r)$ есть характер мультипликативной группы положительных чисел и, следовательно, имеет вид $\chi(r) = r^{i\rho}$, где ρ — некоторое действительное число.

Далее, $\chi(e^{i\varphi})$ есть характер аддитивной группы чисел φ, следовательно,

$$\chi(e^{i\varphi}) = e^{-in\varphi},$$

где n — некоторое целое число. Таким образом,

$$\chi(\lambda) = r^{i\rho}e^{-in\varphi} = |\lambda|^{i\rho}\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)^{-n} = |\lambda|^{n+i\rho}\lambda^{-n}. \tag{64}$$

Пользуясь выражением (64) для характера $\chi(\delta)$, можно более подробно переписать формулу (63) для $U_{\chi;g}$. Для этого заметим, что если $zg = \zeta\delta z$, где $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, то $\lambda = g_{12}z + g_{22}$.

Будем рассматривать $f(z)$ как функцию параметра z. Тогда, в силу равенств (44), (64) и только что сказанного, формула (63) для $U_{\chi;g}$ перепишется в виде

$$U_{\chi;g}f(z)=|g_{12}z+g_{22}|^{n+i\rho-2}(g_{12}z+g_{22})^{-n}f\left(\frac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}\right). \tag{65}$$

Таким образом, *представление $U_{\chi;g}$ определяется двумя параметрами ρ, n, из которых первый принимает произвольные действительные, а второй — произвольные целые значения.*

4. Неприводимость представлений основной серии. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Все представления основной серии неприводимы.*

Доказательство. Положим в (65) $g=z_0=\begin{pmatrix}1&0\\z_0&1\end{pmatrix}$. Тогда равенство (65) примет вид

$$U_{\chi;z_0}f(z)=f(z+z_0). \tag{66}$$

Пусть, далее, $g=\delta=\begin{pmatrix}\lambda^{-1}&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$; тогда (65) перейдет в

$$U_{\chi;\delta}f(z)=|\lambda|^{n+i\rho-2}\lambda^{-n}f(z\lambda^{-2}). \tag{67}$$

Нам нужно доказать, что всякий ограниченный оператор A, коммутирующий со всеми операторами $U_{\chi;g}$, кратен единице. Докажем, что, более того, всякий ограниченный оператор A, коммутирующий со всеми $U_{\chi;z_0}$ и $U_{\chi;\delta}$, кратен единице, т. е. что $U_{\chi;z_0}$ и $U_{\chi;\delta}$ образуют неприводимую систему операторов.

Другими словами, $U_{\chi;g}$ при $g=h$ есть также неприводимое представление группы H (аналогично, при $g=k$ — неприводимое представление группы K).

Для доказательства перейдем от функций $f(z)$ к их трансформациям Фурье

$$\varphi(p)=\varphi(p_1+ip_2)=\frac{1}{2\pi}\iint f(x+iy)\,e^{-i(xp_1+yp_2)}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint f(z)\,e^{-i\operatorname{Re}(z\bar{p})}\,dx\,dy. \tag{68}$$

Переход от $f(z)$ к $\varphi(p)$ есть унитарное отображение пространства $\mathfrak{H}_Z$ на пространство $\mathfrak{H}_\varphi$ функций $\varphi(p)$ с суммируемым квадратом по p_1 и p_2, в котором скалярное произведение определено равенством

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\iint \varphi_1(p)\overline{\varphi_2(p)}\,dp_1\,dp_2. \tag{69}$$

Операторы $U_{\chi;z_0}$, $U_{\chi;\delta}$ и A перейдут в операторы в пространстве $\mathfrak{H}_\varphi$. Обозначим их снова через $U_{\chi;z_0}$, $U_{\chi;\delta}$ и A.

Тогда

$$U_{\chi;z_0}\varphi(p)=\frac{1}{2\pi}\iint f(z+z_0)\,e^{-i\operatorname{Re}(z\bar{p})}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint f(z)\,e^{-i\operatorname{Re}[(z-z_0)\bar{p}]}\,dx\,dy=e^{i\operatorname{Re}(z_0\bar{p})}\,\frac{1}{2\pi}\iint f(z)^{-i\operatorname{Re}(z\bar{p})}\,dx\,dy,$$

т. е.

$$U_{\chi;z_0}\varphi(p)=e^{i\operatorname{Re}(z_0\bar{p})}\,\varphi(p). \tag{70}$$

Далее,

$$U_{\chi;\delta}\,\varphi(p)=|\lambda|^{n+i\rho-2}\,\lambda^{-n}\,\frac{1}{2\pi}\iint f(z\lambda^{-2})\,e^{-i\operatorname{Re}(z\bar{p})}\,dx\,dy.$$

Сделав замену переменного интегрирования $z=\lambda^2 z_1$, получим

$$U_{\chi;\delta}\,\varphi(p)=|\lambda|^{n+i\rho-2}\,\lambda^{-n}\,|\lambda|^4\cdot\frac{1}{2\pi}\iint f(z_1)\,e^{-i\operatorname{Re}(z_1\overline{p\lambda^2})}\,dx_1\,dy_1,$$

т. е.

$$U_{\chi;\delta}\,\varphi(p)=|\lambda|^{n+i\rho-2}\,\lambda^{-n}\,\varphi(p\bar{\lambda}^2). \tag{71}$$

В силу (70), оператор A перестановочен со всеми операторами умножения на $e^{i\operatorname{Re}(z_0\bar{p})}$, а значит—с пределами их линейных комбинаций, т. е. со всеми операторами умножения на существенно ограниченную функцию от p. Поэтому A есть также оператор умножения на существенно ограниченную функцию

$$A\varphi(p)=\omega(p)\,\varphi(p). \tag{72}$$

Кроме того, A коммутирует со всеми операторами $U_{\chi;\delta}$; в силу (71),

$$AU_{\chi;\delta}\,\varphi(p)=\omega(p)\,|\lambda|^{n+i\rho+2}\,\lambda^{-n}\,\varphi(p\bar{\lambda}^2) \tag{73}$$

и

$$U_{\chi;\delta}\,A\varphi(p)=|\lambda|^{n+i\rho+2}\,\lambda^{-n}\,\omega(p\bar{\lambda}^2)\,\varphi(p\bar{\lambda}^2). \tag{74}$$

Сравнение равенств (73) и (74) дает, что $\omega(p)=\omega(p\bar{\lambda}^2)$ при произвольном λ, следовательно, $\omega(p)=\text{const}$ для почти всех p. В силу (72), это означает, что оператор A кратен единице. Теорема доказана.

5. Элементарные сферические функции. Представления основной серии, соответствующие $n=0$, обладают следующим свойством:

В пространстве представления существует вектор f_0, инвариантный по отношению ко всем тем операторам данного представления, которые соответствуют унитарным матрицам из группы G.

Найдем явное выражение для этого вектора. Всякая унитарная матрица из группы G имеет вид

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix},$$

где

$$|\alpha|^2+|\beta|^2=1. \tag{75}$$

Под действием оператора представления $U_{0,\rho;g}$ основной серии функция $f_0(z)$ переходит в

$$|\beta z+\bar{\alpha}|^{i\rho-2} f_0\left(\frac{\alpha z-\bar{\beta}}{\beta z+\bar{\alpha}}\right).$$

Таким образом, функция $f_0(z)$ будет искомой, если

$$|\beta z+\bar{\alpha}|^{i\rho-2} f_0\left(\frac{\alpha z-\bar{\beta}}{\beta z+\bar{\alpha}}\right)=f_0(z) \tag{76}$$

для всех значений α, β, удовлетворяющих условию (75).

Положим в равенстве (76) $z=0$; тогда

$$|\alpha|^{i\rho-2} f_0\left(-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}\right)=C, \tag{77}$$

где $C=f_0(0)$. Далее, положим $z=-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$; в силу условия (75), мы получаем

$$1+|z|^2=|\alpha|^{-2}.$$

Поэтому равенство (77) дает

$$f_0(z)=C(1+|z|^2)^{-1+\frac{i\rho}{2}}. \tag{78}$$

Легко проверить, что, обратно, функция $f_0(z)$ действительно удовлетворяет условию (76), т. е. является инвариантным вектором по отношению ко всем операторам, соответствующим унитарным матрицам группы G.

Таким образом, *для каждого из представлений $U_{0,\rho;g}$ существует с точностью до скалярного множителя только один такой вектор f_0.*

Положим в равенстве (78) $C=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$; тогда, как легко проверить,

$$\|f_0\|^2=\int |f_0(z)|^2 d\mu(z)=1.$$

Положим

$$\psi_\rho(g)=U_{0,\rho;g}(f_0, f_0); \tag{79}$$

функцию $\psi_\rho(g)$ будем называть элементарной сферической функцией, соответствующей представлению $U_{0,\rho;g}$.

Из определения этой функции следует, что она является положительно определенной функцией на группе G, инвариантной по отношению к правым и левым сдвигам; $g=gg_0$ и $g=g_0g$ при помощи унитарной матрицы g_0.

Найдем явное выражение для сферической функции $\psi_\rho(g)$. Всякую матрицу g можно представить в виде $g=ua$, где u — унитарная матрица, а a — эрмитовская матрица. Далее, всякую эрмитовскую матрицу a можно представить в виде $a=u_1^{-1}\delta u_1$, где u_1 — унитарная матрица,

а $\delta = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $0 < \lambda \leqslant 1$. Поэтому достаточно вычислить функцию $\psi_\rho(g)$ только для $g = \delta$.

Так как

$$U_{0,\rho;\delta} f_0(z) = \lambda^{i\rho-2} f_0(z\lambda^{-2}),$$

то

$$\psi_\rho(\delta) = \int \lambda^{i\rho-2} f_0(z\lambda^{-2}) \overline{f_0(z)}\, d\mu(z) =$$

$$= \frac{\lambda^{i\rho-2}}{\pi} \int (1 + |z|^2 \lambda^{-4})^{-1+\frac{i\rho}{2}} (1 + |z|^2)^{-1-\frac{i\rho}{2}} d\mu(z) =$$

$$= 2\lambda^{i\rho-2} \int_0^\infty (1 + \lambda^{-4} r^2)^{-1+\frac{i\rho}{2}} (1 + r^2)^{-1-\frac{i\rho}{2}} r\, dr.$$

Сделав в последнем интеграле подстановку

$$x = \frac{1-\lambda^4}{1+r^2},$$

получим

$$\psi_\rho(\delta) = \lambda^{-i\rho+2} (1-\lambda^4)^{-1} \int_0^{1-\lambda^4} (1-x)^{-1+\frac{i\rho}{2}} dx =$$

$$= -\frac{2\lambda^{-i\rho+2}(1-\lambda^4)^{-1}}{i\rho} (\lambda^{2i\rho} - 1) = \frac{2}{i\rho} \frac{\lambda^{i\rho} - \lambda^{-i\rho}}{\lambda^2 - \lambda^{-2}}.$$

Положим $\lambda = e^t$; тогда

$$\psi_\rho(\delta) = \frac{2}{\rho} \frac{\sin \rho t}{\operatorname{sh} 2t} \tag{80}$$

— искомое выражение для элементарной сферической функции, соответствующей представлению $U_{0,\rho;g}$.

§ 6. След представлений основной серии

1. Групповое кольцо. Операторы $U_{\chi;g}$ основной серии, как унитарные операторы в гильбертовском пространстве, не имеют следа в обычном смысле. Мы покажем, однако, что оператору $U_{\chi;g}$ можно все же приписать след, если перейти от представления группы к представлению группового кольца. Напомним определение группового кольца. Рассмотрим совокупность R функций $x(g)$, суммируемых на G, и определим для них сложение и умножение на скаляр, как сложение функций и умножение их на константу, и умножение двух таких функций $x(g)$, как их «свертывание»:

$$(x_1 \times x_2)(g) = \int x_1(gg_1^{-1})\, x_2(g_1)\, d\mu(g_1). \tag{81}$$

Совокупность $\tilde{R}$ всех элементов вида $\lambda e + x(g)$, где e — формально присоединенная единица, и есть групповое кольцо группы G. В нем можно ввести норму, полагая

$$\| \lambda e + x(g) \| = |\lambda| + \int |x(g)| \, d\mu(g) \tag{82}$$

и инволюцию $*$:

$$(\lambda e + x(g))^* = \bar{\lambda} e + \overline{x(g^{-1})}. \tag{83}$$

Тогда $\tilde{R}$ становится полным нормированным кольцом с инволюцией.

Пусть W_g — унитарное представление группы G. Каждому элементу кольца $a = \lambda e + x(g)$ мы поставим в соответствие оператор

$$W_a = \lambda E + \int x(g) W_g \, d\mu(g), \tag{84}$$

причем интеграл в правой части (84) сходится в смысле нормы оператора.

Легко видеть, что переход от a к W_a есть представление кольца $\tilde{R}$ и притом такое, что элементу a^* соответствует сопряженный оператор $(W_a)^*$, т. е. $W_{a^*} = (W_a)^*$.

Обратно, всякому представлению W_x кольца R, удовлетворяющему условию $W_{x^*} = (W_x)^*$, соответствует представление W_g группы G, из которого W_x получается по формуле (84) при $\lambda = 0$.

2. Формулы для следа. Пусть теперь W_g совпадает с одним из представлений $U_{\chi; g}$ основной серии. Каждому элементу $x(g) \in R$ соответствует оператор

$$U_{\chi; x} f(z) = \int x(g) U_{\chi; g} f(z) \, d\mu(g) =$$

$$= \int x(g) \beta^{-\frac{1}{2}}(zg) \chi(zg) f(z\bar{g}) \, d\mu(g), \tag{85}$$

причем интеграл следует рассматривать в смысле сходимости в среднем в $\mathfrak{H}_Z$.

Пусть функция $x(g)$ такова, что интеграл в (85) существует в смысле обычной сходимости. Распространим функцию $f(z)$ на почти всю группу G, полагая $f(g) = f(z)$ для $g = kz$. Тогда, в силу инвариантности $d\mu(g)$,

$$U_{\chi; x} f(z) = \int x(g) \beta^{-\frac{1}{2}}(zg) \chi(zg) f(zg) \, d\mu(g) =$$

$$= \int x(z^{-1} g) \beta^{-\frac{1}{2}}(g) \chi(g) f(g) \, d\mu(g).$$

Отсюда, в силу равенства (40),

$$U_{\chi; x} f(z) = \iint x(z^{-1} k z_1) \beta^{-\frac{1}{2}}(k z_1) \chi(k z_1) f(k z_1) \, d\mu_l(k) \, d\mu(z_1) =$$

$$= \iint x(z^{-1} k z_1) \beta^{-\frac{1}{2}}(k) \chi(k) f(z_1) \, d\mu_l(k) \, d\mu(z_1).$$

Это равенство означает, что оператор $U_{\chi;x}$ имеет ядро

$$K(z, z_1; \chi) = \int x(z^{-1} k z_1) \beta^{-\frac{1}{2}}(k) \chi(k) d\mu_l(k), \tag{86}$$

так что

$$U_{\chi;x} f(z) = \int K(z, z_1; \chi) f(z_1) d\mu(z_1). \tag{87}$$

Пусть функция $x(g)$ такова, что интеграл в (86) сходится абсолютно и ядро $K(z, z_1; \chi)$ есть ядро Гильберта-Шмидта, т. е.

$$\iint |K(z, z_1; \chi)|^2 \, d\mu(z) d\mu(z_1) < +\infty. \tag{88}$$

Если это имеет место не только для $x(g)$, но и для $|x(g)|$, то переход от (85) к (86) является, очевидно, законным. С другой стороны, интеграл в (88) является следом оператора $U^*_{\chi;x} U_{\chi;x} = U_{\chi;x^* x}$, причем ядром этого оператора будет

$$K_1(z, z_1; \chi) = \int K(z, z_2; \chi) \overline{K(z, z_1; \chi)} d\mu(z_2). \tag{89}$$

Положим $x_1 = x^* x$; тогда для следа оператора $U_{\chi; x^* x} = U_{\chi;x_1}$ получается выражение

$$S(U_{\chi;x_1}) = \int K_1(z, z; \chi) d\mu(z), \tag{90}$$

а условие (88) перепишется в виде

$$S(U_{\chi;x_1}) = \int K_1(z, z; \chi) d\mu(z) < +\infty. \tag{91}$$

Итак, *при абсолютной сходимости интеграла* (86) *и выполнении условия* (91) *для функции* $|x(g)|$ *оператор* $U_{\chi;x_1} = U_{\chi;x^*x}$ *имеет след, определяемый формулой* (90).

Пользуясь выражением (86) для ядра, мы можем получить формулы для следа. Именно, из (91) следует, что

$$S(U_{\chi;x_1}) = \int \left[\int x_1(z^{-1} k z) \beta^{-\frac{1}{2}}(k) \chi(k) d\mu_l(k) \right] d\mu(z). \tag{92}$$

Отсюда, в силу равенств (35) и (42), получаем

$$S(U_{\chi;x_1}) = \iiint x_1(z^{-1} \delta \zeta z) \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \chi(\delta) d\mu(\delta) d\mu(\zeta) d\mu(z), \tag{93}$$

$$S(U_{\chi;x_1}) = \int x_1(g) \frac{\chi(\lambda_g) + \overline{\chi(\lambda_g)}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^2} d\mu(g) = \int x_1(g) \frac{\chi(\lambda_g) + \overline{\chi(\lambda_g)}}{|(g_{11} + g_{22})^2 - 4|} d\mu(g), \tag{94}$$

где, как и в формуле (42), λ_g—собственное значение матрицы g.

3. Существование следа. Обозначим через Q_c компактное множество элементов группы G, удовлетворяющих условию

$$|g_{pq}| \leqslant c \quad (p, q = 1, 2). \tag{95}$$

Так как

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix},$$

то из $g \in Q_c$ следует также: $g^{-1} \in Q_c$. Обозначим, далее, через R' совокупность всех функций $x(g) \in R$, непрерывных на всей группе G и равных нулю вне какого-либо множества Q_c. Если $x_1(g)$, $x_2(g) \in R'$, то, очевидно,

$$x_1(g) + x_2(g) \in R', \qquad \lambda x(g) \in R' \text{ и } (x_1(g))^* \in R'.$$

Если, далее, $x_1(g)$, $x_2(g) \in R'$, то также и «свертка»

$$x(g) = (x_1 \times x_2)(g) \in R'.$$

Действительно, обозначая через $Q_{c_1} \cdot Q_{c_2}$ совокупность всех произведений $g_1 g_2$, $g_1 \in Q_{c_1}$, $g_2 \in Q_{c_2}$, имеем: $Q_{c_1} Q_{c_2} \subset Q_{2c_1c_2}$. Если теперь $x_1(g)$ и $x_2(g)$ обращаются в нуль вне Q_{c_1} и Q_{c_2} соответственно, то интеграл в правой части (81) может быть отличным от нуля только при $gg_1^{-1} \in Q_{c_1}$; с другой стороны, в этом интеграле g_1 пробегает Q_{c_2}, ибо вне Q_{c_2} будет $x(g_2) = 0$. Таким образом, функция $(x_1 \times x_2)(g)$ может быть отличной от нуля только при $g \in Q_{c_1} Q_{c_2} \subset Q_{2c_1c_2}$, т. е. $(x_1 \times x_2)(g)$ обращается в нуль вне $Q_{2c_1c_2}$.

I. *Для любой функции $x(g) \in R'$ интеграл в правой части* (86) *сходится абсолютно, каковы бы ни были z и z_1.*

Действительно, положим

$$z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix} \quad (k_{11} = k_{22}^{-1})$$

и будем рассматривать $x(g)$ как функцию параметров g_{pq}:

$$x(g) = x(g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}).$$

Согласно равенствам (4) и (8),

$$\int |x(z^{-1} k z_1)| \beta^{-\frac{1}{2}}(k)\, d\mu_l(k) =$$

$$= \int |x(k_{22}^{-1} + k_{12} z_1, k_{12}, -k_{22}^{-1} z + z_1(-k_{12} z + k_{22}), -k_{12} z + k_{22})| \cdot$$

$$\cdot |k_{22}|^{-2}\, du_{12}\, dv_{12}\, du_{22}\, dv_{22}. \tag{96}$$

Пусть функция $x(g)$ обращается в нуль вне Q_c. Тогда интегрировать нужно только по тем значениям k_{pq}, для которых

$$|k_{12}| < c, \quad |-k_{12} z_1 + k_{22}| < c, \quad |k_{22}^{-1} + k_{12} z| < c.$$

Отсюда

$$|k_{22}| < c + |k_{12}|\,|z_1| < c(1 + |z_1|), \quad |k_{22}^{-1}| < c(1 + |z_1|),$$

т. е. при фиксированных z и z_1 интегрирование по k_{12}, k_{22} ведется в ограниченной области, не содержащей окрестности точки $k_{22} = 0$. Поэтому интеграл в (96) существует и наше утверждение доказано.

Тем самым *доказано существование ядра* $K(z, z_1; \chi)$ *для любой функции* $x(g) \in R'$.

Положим теперь

$$T_\delta = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int\int x(z^{-1}\delta\zeta z)\, d\mu(\zeta)\, d\mu(z) \tag{97}$$

и докажем, что

II. *Для любой функции* $x(g) \in R'$ *интеграл в правой части* (97) *сходится абсолютно, каково бы ни было* δ.

Положим для этого

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и будем рассматривать $x(g)$ как функцию параметров g_{pq}:

$$x(g) = x(g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}).$$

Тогда равенство (97) перепишется в виде

$$T_\delta = |\lambda|^{-2} \int\int\int\int x\left(\frac{1+\zeta z}{\lambda}, \frac{\zeta}{\lambda}, -\frac{1+\zeta z}{\lambda} z + \lambda z, -\frac{z\zeta}{\lambda} + \lambda\right) dx\, dy\, d\xi\, d\eta. \tag{98}$$

Сделаем в этом интеграле замену переменных:

$$\frac{\zeta}{\lambda} = g_{12}, \quad -\frac{1+\zeta z}{\lambda} z + \lambda z = g_{21}. \tag{99}$$

Мы получим тогда для z квадратное уравнение

$$g_{12} z^2 - \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) z + g_{21} = 0, \tag{100}$$

из которого найдем

$$z = \frac{\lambda - \lambda^{-1} \pm \sqrt{(\lambda - \lambda^{-1})^2 - 4g_{12} g_{21}}}{2g_{12}}.$$

Отсюда

$$\frac{1+\zeta z}{\lambda} = \lambda^{-1} + g_{12} z = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda + \lambda^{-1})^2 - 4g_{12} g_{21}},$$

$$-\frac{z\zeta}{\lambda} + \lambda = -g_{12} z + \lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1}) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda - \lambda^{-1})^2 - 4g_{12} g_{21}}.$$

Комплексный якобиан преобразования (99) от , z к g_{12}, g_{21} равен

$$\frac{\partial(\zeta, z)}{\partial(g_{12}, g_{21})} = \frac{\partial\zeta}{\partial g_{12}} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial g_{21}} = \pm\lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{(\lambda - \lambda^{-1})^2 - 4g_{12} g_{21}}}.$$

Поэтому, введя обозначение $\mu = \lambda + \lambda^{-1}$, получим

$$T_\delta = \int\int\int\int \Big[x\Big(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4 - 4g_{12} g_{21}}, g_{12}, g_{21}, \frac{\mu}{2} -$$
$$- \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4 - 4g_{12} g_{21}}\Big) + x\Big(\frac{\mu}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4 - 4g_{12} g_{21}}, g_{12}, g_{21}, \frac{\mu}{2} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4 - 4g_{12} g_{21}}\Big)\Big] \frac{d\alpha_{12}\, d\beta_{12}\, d\alpha_{21}\, d\beta_{21}}{|\mu^2 - 4 - 4g_{12} g_{21}|}. \tag{101}$$

$$(g_{12} = \alpha_{12} + i\beta_{12}, \quad g_{21} = \alpha_{21} + i\beta_{21}).$$

Эта формула показывает, что T_δ фактически зависит только от следа $\mu = \lambda + \lambda^{-1}$ матрицы δ.

Функция $x(g) \in R'$ ограничена; пусть, например, $|x(g)| \leqslant c_1$ и обращается в нуль вне Q_c. Тогда

$$|T_\delta| \leqslant 2c_1 \iiiint\limits_{Q_c} \frac{d\alpha_{12}\, d\beta_{12}\, d\alpha_{21}\, d\beta_{21}}{|\mu^2 - 4 - 4g_{12}\, g_{21}|}. \tag{102}$$

Перейдем в (102) к полярным координатам, полагая

$$g_{12} = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad g_{21} = r_2 e^{i\varphi_2}$$

и, кроме того, положим

$$\mu^2 - 4 = 4re^{i\vartheta}; \tag{103}$$

тогда (102) перепишется в виде

$$|T_\delta| \leqslant \pi c_1 \int_0^c \int_0^c \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|r - r_1 r_2 e^{i\theta}|} \right] r_1 r_2\, dr_1\, dr_2, \tag{104}$$

т. е.

$$|T_\delta| \leqslant 2\pi^2 c_1 \int_0^c \int_0^c F\left(\frac{r}{r_1 r_2}\right) dr_1\, dr_2, \tag{105}$$

где

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|u - e^{i\theta}|}. \tag{106}$$

Рассмотрим некоторые свойства функции $F(u)$. При достаточно малом $|u|$

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2u\cos\theta + u^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\, u^n \right] d\theta, \tag{107}$$

где $P_n(z)$ — n-й полином Лежандра. Положим

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\cos\theta)\, d\theta. \tag{108}$$

Очевидно,

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad |c_n| \leqslant 1, \tag{109}$$

следовательно,

$$|F(u) - 1| < \frac{u^2}{1-u} \quad \text{при} \quad 0 < u < 1. \tag{110}$$

Далее, при $u > 0$

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|u^{-1} - e^{i\theta}|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u\, d\theta}{|u - e^{i\theta}|},$$

т. е.

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = uF(u). \tag{111}$$

Наконец, при $u > 1$

$$|F(u)| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{u-1},$$

т. е.

$$|F(u)| < \frac{1}{u-1}. \tag{112}$$

Функция $F(u)$ имеет единственную особенность при $u=1$. Так как $F(u)$ выражается через эллиптический интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

при $k^2 = \frac{4u}{(1+u)^2}$, то эта особенность будет логарифмического типа. Поэтому $\int_a^b F(u)\,du$ существует в любом конечном интервале (a, b).

Вернемся теперь к интегралу неравенства (105); так как r_1 и r_2 входят в подинтегральную функцию симметрично, то интеграл по области $0 \leqslant r_1 \leqslant c$, $0 \leqslant r_2 \leqslant c$ равен удвоенному интегралу по области $0 \leqslant r_1 \leqslant c$, $0 \leqslant r_2 \leqslant r_1$. Сделаем в этом последнем интеграле подстановку

$$r_1 = r_1, \quad r_2 = \frac{u}{r_1};$$

тогда он перейдет в

$$\int_0^{c^2}\left[\int_{\sqrt{u}}^{c} F\left(\frac{r}{u}\right)\frac{dr_1}{r_1}\right]du = \frac{1}{2}\int_0^{c^2}F\left(\frac{r}{u}\right)\ln\frac{c^2}{u}\,du.$$

Положив теперь $u = vr$, мы приведем последний интеграл к виду

$$\frac{r}{2}\int_0^{\frac{c^2}{r}}F\left(\frac{1}{v}\right)\ln\frac{c^2}{rv}\,dv. \tag{113}$$

Так как этот интеграл существует, то тем самым доказана абсолютная сходимость интеграла в правой части (97).

III. *При тех же предположениях относительно $x(g)$ интеграл* (98) *сходится равномерно по отношению к λ в любой ограниченной части λ-плоскости, не содержащей окрестности точки $\lambda = 0$.*

Действительно, равномерная сходимость интеграла (98) относительно λ эквивалентна равномерной сходимости интеграла (101) относительно $\nu = \frac{1}{4}\mu^2 - 1$ в любой ограниченной области ν-плоскости. В силу оценки (104), достаточно доказать равномерную сходимость интеграла в правой части (104) относительно r в любом конечном интервале (a, b) положительной r-оси. Для этого, очевидно, достаточно доказать равномерную

сходимость относительно r интеграла в правой части (105), следовательно, интеграла (113).

Другими словами, надо сказать, что при достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$

$$\frac{r}{2}\int_{1-\varepsilon_1}^{1+\varepsilon_2} F\left(\frac{1}{v}\right)\ln\frac{c^2}{rv}\,dv < \varepsilon$$

при любом r из (a, b). Но это очевидно, ибо последний интеграл можно переписать в виде

$$\frac{r}{2}\int_{1-\varepsilon_1}^{1+\varepsilon_2} F\left(\frac{1}{v}\right)\ln\frac{c^2}{v}\,dv - \frac{r}{2}\ln r\int_{1-\varepsilon_1}^{1+\varepsilon_2} F\left(\frac{1}{v}\right)dv$$

и, следовательно, наше утверждение следует из ограниченности $\frac{r}{2}$ и $\frac{r}{2}\ln r$ и сходимости интегралов $\int_0^{1+\varepsilon_2} F\left(\frac{1}{v}\right)\ln\frac{c^2}{v}\,dv$ и $\int_0^{1+\varepsilon_2} F\left(\frac{1}{v}\right)dv$.

Так как подинтегральная функция в (98) есть непрерывная функция от u, а следовательно, и от λ, то, в силу доказанной равномерной сходимости этого интеграла, T_δ есть непрерывная функция от λ. Таким образом,

IV. *Если $x(g) \in R'$, то T_δ есть непрерывная функция от λ.*

Так как функция $x(g)$ обращается в нуль вне некоторого компакта Q_c, а диагональные элементы λ и λ^{-1} матрицы δ суть собственные значения матрицы $g = z^{-1}\delta\zeta z$, то T_δ обращается в нуль для всех достаточно малых и достаточно больших значений $|\lambda|$. Отсюда:

V. *Если $x(g) \in R'$, то интеграл в правой части равенства* (93) *сходится абсолютно.*

В самом деле, формулу (93) можно переписать в виде

$$S(U_{\chi;\,x_1}) = \int T_\delta \chi(\delta)\,d\mu(\delta); \tag{114}$$

этот последний интеграл, как трансформация Фурье суммируемой функции T_δ, сходится.

Абсолютная сходимость интеграла в правой части (93) получается при замене функции $x(g) \in R'$ функцией $|x(g)|$, которая также принадлежит R'.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой функции $x(g) \in R'$ оператор $U_{\chi;\,x_1}$, соответствующий функции $x_1(g) = (x^* \times x)(g)$, имеет след, определяющийся каждой из формул* (93) *и* (94). *Этот след есть непрерывная функция от χ.*

Доказательство. Согласно п. 2, для существования этого следа достаточна абсолютная сходимость интеграла (86) для $x_2(g) = |x(g)|$ и интеграла (93) для $(x_2^* \times x_2)(g)$. Согласно I, первое условие выполнено. Так как $(x_2^* \times x_2)(g)$ также принадлежит R', то, согласно V, второе условие также выполнено.

Последнее утверждение следует из того, что в силу (114) след есть трансформация Фурье суммируемой функции. Теорема доказана.

Сравнивая формулу (94) с выражением (85) для $U_{\chi;\,x}$, мы видим, что оператору $U_{\chi;\,g}$ естественно приписать след

$$S(U_{\chi;\, g}) = \frac{\chi(\lambda_g) + \overline{\chi(\lambda_g)}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^2}; \tag{115}$$

он будет определен для всех элементов g, кроме тех, оба собственных значения которых равны ± 1.

ТЕОРЕМА 3. *Если χ_1 и χ_2 — два различных характера группы D и если $\chi_1(\delta) \neq \overline{\chi_2(\delta)}$, то представления $U_{\chi_1;\, g}$ и $U_{\chi_2;\, g}$ неэквивалентны.*

Доказательство. Если эти представления эквивалентны, то соответствующие представления $U_{\chi_1;\, x}$, $U_{\chi_2;\, x}$ группового кольца также эквивалентны. Но тогда следы операторов $U_{\chi_1;\, x^*x}$, $U_{\chi_2;\, x^*x}$ равны. Применяя этот результат к функциям

$$x = x_1 \pm x_2, \quad x = x_1 \pm ix_2,$$

где x_1, $x_2 \in R'$, мы получим, что

$$S(U_{\chi_1;\, x_1^*x_2}) = S(U_{\chi_2;\, x_1^*x_2}).$$

Возьмем функцию $x_1(g)$, равную нулю вне некоторой окрестности единичного элемента $g = e$, и функцию $x_2(g)$, равную нулю вне некоторой окрестности элемента $g = \delta = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Пронормируем эти функции надлежащим образом и перейдем к пределу в равенстве

$$S(U_{\chi_1;\, x_1^*x_2}) = S(U_{\chi_2;\, x_1^*x_2})$$

при условии, что указанные выше окрестности стягиваются в точку. В силу формулы (94) для следа, мы получим

$$\chi_1(\lambda) + \overline{\chi_1(\lambda)} = \chi_2(\lambda) + \overline{\chi_2(\lambda)}$$

при произвольном λ, что возможно только тогда, когда

$$\chi_1(\lambda) = \overline{\chi_2(\lambda)} \text{ или } \chi_1(\lambda) = \chi_2(\lambda).$$

ТЕОРЕМА 4. *Для любой суммируемой функции $x(g)$ оператор $U_{\chi;\, x}$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Если $x_2(g) = (x_1^* \times x_1)(g)$ и $x_1(g) \in R'$, то существует след оператора

$$U_{\chi;\, x_2} = U^*_{\chi;\, x_1} \cdot U_{\chi;\, x_1},$$

следовательно, оператор $U_{\chi;\, x_1}$ вполне непрерывен.

С другой стороны, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует функция $x_1(g) \in R'$ такая, что

$$\int |x(g) - x_1(g)|\, d\mu(g) < \varepsilon.$$

Но тогда

$$|U_{\chi;\, x} - U_{\chi;\, x_1}| = \left\| \int [x(g) - x_1(g)]\, U_{\chi;\, g}\, d\mu(g) \right\| \leq$$
$$\leq \int |x(g) - x_1(g)|\, d\mu(g) < \varepsilon;$$

это означает, что $U_{\chi;\, x}$ есть предел в смысле нормы оператора операторов $U_{\chi;\, x_1}$, $x_1 \in R'$. Поэтому оператор $U_{\chi;\, x}$ также вполне непрерывен.

§ 7. Разложение регулярного представления группы G на неприводимые представления; аналог теоремы Планшереля

Покажем теперь, что регулярное представление группы G разлагается в континуальную прямую сумму представлений основной серии. При этом основным аналитическим аппаратом будет формула, аналогичная формуле Планшереля для коммутативной группы. Выведем эту формулу.

Построим по функции $x(g)$ некоторые вспомогательные функции, которые в дальнейшем будут играть важную роль.

1. Функции X, φ и Φ. Пусть $x(g)$ — суммируемая функция на G. Введем в G параметры p_1, p_2, p_3, полагая

$$p_1 = \frac{g_{11}}{g_{12}}, \quad p_2 = \frac{1}{g_{12}}, \quad p_3 = \frac{g_{22}}{g_{12}}; \tag{116}$$

функцию $x(g)$, рассматриваемую как функцию параметров p_1, p_2, p_3, обозначим через $\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)$.

Якобиан преобразования (116) равен $|g_{12}^3 g_{22}|^{-2}$, следовательно,

$$\int |x(g)|\, d\mu(g) = \int |\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)|\, |p_2|^{-6}\, d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3), \tag{117}$$

где $d\mu(p_k)$ обозначает произведение дифференциалов действительной и мнимой части p_k, $k = 1, 2, 3$.

Равенство (117) означает, что функция $\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)|p_2|^{-6}$ суммируема по p_1, p_2, p_3. Предположим, что функция $\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)|p_2|^{-4}$ также суммируема по p_1, p_2, p_3. Обозначим через $X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ ее трансформацию Фурье; именно, положим

$$X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{x}(p_1, p_2, p_3)\, |p_2|^{-4} e^{-i\operatorname{Re}(\bar{p}_1\zeta_1 - \bar{p}_2\zeta_2 + \bar{p}_3\zeta_3)}\, d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3). \tag{118}$$

Рассмотрим, далее, функцию

$$\varphi(z_1, z_2, \lambda) = |\lambda|^{-2} \int x(z_1^{-1}\delta\zeta z_2)\, d\mu(\zeta) \tag{119}$$

и ее трансформацию Фурье по z_1 и z_2:

$$\Phi(w_1, w_2, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \varphi(z_1, z_2, \lambda)\, e^{i\operatorname{Re}(\bar{w}_1 z_1 - \bar{w}_2 z_2)} d\mu(z_1)\, d\mu(z_2). \tag{120}$$

Если

$$g = z_1^{-1}\delta\zeta z_2, \quad z_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_j & 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1,2, \quad \delta = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$g_{11} = \frac{1 + \zeta z_2}{\lambda}, \quad g_{12} = \frac{\zeta}{\lambda}; \quad g_{22} = -\frac{z_1\zeta}{\lambda} + \lambda$$

и, следовательно,

$$p_1 = z_2 + \zeta^{-1}, \quad p_2 = \lambda\zeta^{-1}, \quad p_3 = -z_1 + \lambda^2\zeta^{-1}, \tag{121}$$

так что равенство (119) перепишется в виде

$$\varphi(z_1, z_2, \lambda) = |\lambda|^{-2} \int \tilde{x}(z_2 + \zeta^{-1}, \lambda\zeta^{-1}, -z_1 + \lambda^2\zeta^{-1})\, d\mu(\zeta). \qquad (122)$$

Подставляя это выражение в (120), получим

$$\Phi(w_1, w_2, \lambda) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{x}(z_2 + \zeta^{-1}, \lambda\zeta^{-1}, -z_1 + \lambda^2\zeta^{-1}) |\lambda|^{-2} e^{i\mathrm{Re}(\bar{w}_1 z_1 - \bar{w}_2 z_2)} d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)\, d\mu(\zeta).$$

Произведем в последнем интеграле замену переменных (121). Комплексный якобиан этого преобразования равен $\lambda\zeta^{-2} = p_2\lambda^{-1}$, поэтому выражение для Φ перепишется в виде

$$\Phi(w_1, w_2, \lambda) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{x}(p_1, p_2, p_3) |p_2|^{-4} e^{i\mathrm{Re}[\bar{w}_1(\lambda p_2 - p_3) - \bar{w}_2(p_1 - p_2\lambda^{-1})]} d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{x}(p_1, p_2, p_3) |p_2|^{-4} e^{-i\mathrm{Re}[\bar{w}_2 p_1 - (\bar{w}_1\lambda + \bar{w}_2\lambda^{-1})p_2 + \bar{w}_1 p_3]} d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3).$$

В силу предполагаемой конечности интеграла

$$\int |\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)|\, |p_2|^{-4}\, d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3),$$

отсюда непосредственно следует существование интегралов (119) и (120). Кроме того, сравнение с равенством (118) дает

$$\frac{1}{2\pi} \Phi(w_1, w_2, \lambda) = X\left(w_2,\ w_1\bar{\lambda} + \frac{w_2}{\bar{\lambda}},\ w\ \right). \qquad (123)$$

Выражение $w_1\bar{\lambda} + \frac{w_2}{\bar{\lambda}}$ не изменяется при замене λ выражением $\frac{\bar{w}_2}{\lambda\bar{w}_1}$. Поэтому из равенства (123) следует, что функция $\Phi(w_1, w_2, \lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi\left(w_1, w_2, \frac{\bar{w}_2}{\lambda\bar{w}_1}\right) = \Phi(w_1, w_2, \lambda). \qquad (124)$$

Обратно, если функция Φ удовлетворяет соотношению (124), то равенство (123) однозначно определяет функцию X. Именно, достаточно положить

$$X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{1}{2\pi} \Phi\left(\zeta_3, \zeta_1, \frac{\bar{\zeta}_2 + \sqrt{\bar{\zeta}_3^2 - 4\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_3}}{2\bar{\zeta}_3}\right), \qquad (124')$$

причем, в силу (124), выбор значения функции $\sqrt{\bar{\zeta}_2^2 - 4\zeta_1\zeta_3}$ не играет роли.

Функции φ и Φ будут в дальнейшем играть существенную роль. Это видно уже из того, что, в силу равенства (86), для их трансформации Фурье по мультипликативной группе комплексных чисел λ имеем

$$\int \varphi(z_1, z_2, \lambda) |\lambda|^{n+i\rho}\lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} = K(z_1, z_2, \chi) = K(z_1, z_2, n, \rho) \qquad (125$$
$$(\lambda = \sigma + i\tau, \quad d\mu(\lambda) = d\sigma \quad),$$

т. е. эта трансформация Фурье есть ядро оператора $U_{\chi; x} = U_{n, \rho; x}$.

Аналогично,

$$\int \Phi(w_1, w_2, \lambda) |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} = L(w_1, w_2, n, \rho), \tag{126}$$

где $L(w_1, w_2, n, \rho)$ — трансформация Фурье по z_1 и z_2 ядра $K(z_1, z_2, n, \rho)$.

Из формулы (124) следует соотношение, связывающее $L(w_1, w_2, n, \rho)$ и $L(w_1, w_2, -n, -\rho)$. Именно, как легко видеть,

$$L(w_1, w_2, -n, -\rho) = \left|\frac{w_1}{w_2}\right|^{n+i\rho} \left(\frac{\overline{w}_1}{w_2}\right)^{-n} L(w_1, w_2, n, \rho). \tag{127}$$

2. Аналог формулы Планшереля. Перейдем теперь к выводу формулы, аналогичной формуле Планшереля для коммутативных групп.

Предположим сначала, что функция $x(g) = \tilde{x}(p_1, p_2, p_3)$ измерима, ограничена и обращается в нуль вне множеств вида

$$|p_1| \leqslant C_1, \quad |p_3| \leqslant C_3, \quad 0 < \varepsilon_2 \leqslant |p_2| \leqslant C_2. \tag{128}$$

Совокупность всех таких функций $x(g)$ обозначим через $\mathfrak{H}'_G$. Тогда из равенств

$$X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{x}(p_1, p_2, p_3) |p_2|^{-4} e^{-i\mathrm{Re}\,(\overline{p}_1\zeta_1 - \overline{p}_2\zeta_2 + \overline{p}_3\zeta_3)} d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3),$$
$$X''_{\zeta_2\overline{\zeta}_2}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) =$$
$$= -\frac{1}{4(2\pi)^3} \int \tilde{x}(p_1, p_2, p_3) |p_2|^{-2} e^{-i\mathrm{Re}\,(\overline{p}_1\zeta_1 - \overline{p}_2\zeta_2 + \overline{p}_3\zeta_3)} d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3),$$

в силу обычной теоремы Планшереля, следует, что

$$-\int X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \overline{X''_{\zeta_2\overline{\zeta}_2}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}\, d\mu(\zeta_1)\, d\mu(\zeta_2)\, d\mu(\zeta_3) =$$
$$= \frac{1}{4} \int |\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)|^2 |p_2|^{-6} d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3) = \frac{1}{4} \int |x(g)|^2 d\mu(g). \tag{129}$$

Переходя от функции $X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ к функции $\Phi(w_1, w_2, \lambda)$, мы получаем

$$\frac{1}{4} \int |x(g)|^2 d\mu(g) =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \Phi(w_1, w_2, \lambda) \overline{\Phi''_{\lambda\overline{\lambda}}(w_1, w_2, \lambda)}\, d\mu(w_1)\, d\mu(w_2)\, d\mu(\lambda). \tag{130}$$

Предположим теперь, что функция $\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно и обращается в нуль вне области вида (128). Совокупность всех таких функций $\tilde{x}$ обозначим через $\mathfrak{H}''_G$. Очевидно, $\mathfrak{H}''_G \subset \mathfrak{H}'_G \subset \mathfrak{H}_G$.

Из формулы (122) для $\varphi(z_1, z_2, \lambda)$ следует, что при $\tilde{x} \in \mathfrak{H}''_G$ существует и непрерывна производная $\varphi''_{\lambda\overline{\lambda}}(z_1, z_2, \lambda)$, причем $\Phi''_{\lambda\overline{\lambda}}(w_1, w_2, \lambda)$ есть трансформация Фурье по z_1 и z_2 функции $\varphi'_{\lambda\overline{\lambda}}(z_1, z_2, \lambda)$. Поэтому при фиксированном λ

$$\int \Phi(w_1, w_2, \lambda) \overline{\Phi''_{\lambda\bar{\lambda}}(w_1, w_2, \lambda)}\, d\mu(w_1)\, d\mu(w_2) =$$
$$= \int \varphi(z_1, z_2, \lambda) \overline{\varphi''_{\lambda\bar{\lambda}}(z_1, z_2, \lambda)}\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)$$

и формулу (130) можно переписать в виде

$$\frac{1}{4} \int |x(g)|^2 d\mu(g) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \varphi(z_1, z_2, \lambda) \overline{\varphi''_{\lambda\bar{\lambda}}(z_1, z_2, \lambda)}\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2) \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}. \tag{131}$$

По предположению, функция $x(g) \in \mathfrak{H}''_G$. Поэтому интегрирование в формуле (122) следует вести по области вида

$$|z_2 + \zeta^{-1}| \leqslant C_1, \quad 0 < \varepsilon_2 \leqslant |\lambda\zeta^{-1}| \leqslant C_2, \quad |-z_1 + \lambda^2\zeta^{-1}| \leqslant C_3.$$

Отсюда следует, что при фиксированных z_1 и z_2 функция $\varphi(z_1, z_2, \lambda)$ обращается в нуль вне области вида

$$0 < \varepsilon \leqslant |\lambda| \leqslant C.$$

Поэтому при фиксированных z_1, z_2 существует интеграл

$$K(z_1, z_2, n, \rho) = \int \varphi(z_1, z_2, \lambda) |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}. \tag{132}$$

Положим

$$\lambda = e^t e^{i\theta}, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad \varphi(z_1, z_2, \lambda) = \psi(z_1, z_2, t, \theta).$$

Тогда формулу (131) можно переписать в виде

$$\int |x(g)|^2 d\mu(g) =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int \psi(z_1, z_2, t, \theta) \cdot \overline{\Delta\psi(z_1, z_2, t, \theta)}\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2) \right] dt\, d\theta, \tag{133}$$

где $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$. При этом функция ψ имеет непрерывные производные по t и θ и обращается в нуль вне множества вида $|t| \leqslant C$.

Кроме того, формулу (132) можно переписать в виде

$$K(z_1, z_2, n, \rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z_1, z_2, t, \theta) e^{it\rho} e^{-in\theta}\, dt\, d\theta, \tag{134}$$

причем интегрирование по t фактически ведется по области вида $|t| \leqslant C$. Из формулы (134) следует, что

$$-(n^2 + \rho^2) K(z_1, z_2, n, \rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\psi(z_1, z_2, t, \theta) e^{it\rho} e^{-in\theta}\, dt\, d\theta;$$

отсюда, по обычной теореме Планшереля,

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(z_1, z_2, n, \rho)|^2 (n^2 + \rho^2)\, d\rho =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(z_1, z_2, t, \theta) \cdot \overline{\Delta\psi(z_1, z_2, t, \theta)}\, dt\, d\theta.$$

Поэтому из формулы (133) следует, что

$$\int |x(g)|^2 d\mu(g) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\iiint |K(z_1, z_2, n, \rho)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) \right] (n^2 + \rho^2)\, d\rho. \quad (135)$$

Далее, формула (127) дает

$$|L(w_1, w_2, -n, -\rho)| = |L(w_1, w_2, n, \rho)|;$$

отсюда

$$\int |K(z_1, z_2, -n, -\rho)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) =$$
$$= \int |L(w_1, w_2, -n, -\rho)|^2 d\mu(w_1) d\mu(w_2) =$$
$$= \int |L(w_1, w_2, n, \rho)|^2 d\mu(w_1) d\mu(w_2) = \int |K(z_1, z_2, n, \rho)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) \quad (136)$$

и формулу (135) можно переписать в виде

$$\int |x(g)|^2 d\mu(g) = \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \left[\iiint |K(z_1, z_2, n, \rho)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) \right] (n^2 + \rho^2)\, d\rho. \quad (137)$$

Эту формулу мы и будем называть аналогом формулы Планшереля.

Заметим, что интеграл

$$\iiint |K(z_1, z_2, n, \rho)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2)$$

есть след оператора $U_{n,\rho;x^*x}$. Поэтому формулу (137) можно переписать в виде

$$\int |x(g)|^2 d\mu(g) = \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} S(U_{n,\rho;\, x^*x})(n^2 + \rho^2)\, d\rho. \quad (138)$$

3. Взаимно обратные формулы. Формулу (137) мы вывели в предположении, что $\tilde{x} \in \mathfrak{H}''_G$. Легко распространить ее на любую функцию из $\mathfrak{H}_G$. При этом мы получим формулы, аналогичные взаимно обратным формулам в теореме Планшереля.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ совокупность всех измеримых функций $K(z_1, z_2, n, \rho)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; 0 \leqslant \rho < +\infty$) таких, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \left[\iiint |K(z_2\, z_2\, n, \rho)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) \right] (n^2 + \rho^2)\, d\rho < +\infty. \quad (139)$$

Определим в $\mathfrak{H}$ обычным образом сложение и умножение на скаляр, а скалярное произведение определим равенством

$$(K, K') = \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \left[\iiint K(z_1, z_2, n, \rho) \overline{K'(z_1, z_2, n, \rho)}\, d\mu(z_1) d\mu(z_2) \right] \cdot$$
$$\cdot (n^2 + \rho^2)\, d\rho. \quad (140)$$

Очевидно, $\mathfrak{H}$ есть гильбертовское пространство.

Формула (137) показывает, что переход от $x(g)$ к $K(z_1, z_2, n, \rho)$ есть изометрическое отображение $\mathfrak{H}''_G$ в $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}''_G$ плотно в $\mathfrak{H}_G$, то это отображение продолжается, и притом единственным образом, до изометрического отображения всего $\mathfrak{H}_G$ в $\mathfrak{H}$.

Легко прямо описать это отображение. Пусть сначала функция $\tilde{x}$ из $\mathfrak{H}_G$ обращается в нуль вне множества вида (128). Тогда можно найти в $\mathfrak{H}''_G$ последовательность функций $x_m(g) = \tilde{x}_m(p_1, p_2, p_3)$, равных нулю вне того же множества и таких, что

$$\int |x(g) - x_m(g)|^2 \, d\mu(g) \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

т. е.

$$\int |\tilde{x}(p_1, p_2, p_3) - \tilde{x}_m(p_1, p_2, p_3)|^2 \, |p_2|^{-6} \, d\mu(p_1) \, d\mu(p_2) \, d\mu(p_3) \to 0$$
$$\text{при } m \to \infty.$$

Так как интегрирование здесь фактически ведется по области вида (128), то отсюда следует, что также

$$\int |\tilde{x}(p_1, p_2, p_3) - \tilde{x}_m(p_1, p_2, p_3)| \, |p_2|^{-6} \, d\mu(p_1) \, d\mu(p_2) \, d\mu(p_3) \to 0$$
$$\text{при } m \to \infty. \tag{141}$$

Функциям $\tilde{x}_m$ соответствуют функции $K_m(z_1, z_2, n, \rho)$; так как последовательность $\tilde{x}_m$ сходится в $\mathfrak{H}_G$, то, в силу изометрии нашего соответствия, последовательность K_m сходится в $\mathfrak{H}$. Обозначим через $K(z_1, z_2, n, \rho)$ предел этой последовательности в $\mathfrak{H}_G$. Тогда для функции $x(g)$ и этого предела $K(z_1, z_2, n, \rho)$ попрежнему справедлива формула (137). Кроме того, из определения нормы в $\mathfrak{H}$ следует, что, выделив некоторую подпоследовательность (обозначим ее снова через K_m (соответственно x_m)), мы можем добиться того, что

$$K_m(z_1, z_2, n, \rho) \to K(z_1, z_2, n, \rho) \text{ при } m \to \infty \tag{142}$$

для всех n и почти всех z_1, z_2, ρ.

Перейдем в интеграле (141) от переменных p_1, p_2, p_3 к переменным z_1, ζ, λ по формулам

$$p_1 = z_2 + \zeta^{-1}, \quad p_2 = \lambda\zeta^{-1}, \quad p_3 = -z_1 + \lambda^2\zeta^{-1}.$$

Тогда соотношение (141) перепишется в виде

$$\int |\tilde{x}(z_2 + \zeta^{-1}, \lambda\zeta^{-1}, -z_2 + \lambda^2\zeta^{-1}) - \tilde{x}_m(z_2 + \zeta^{-1}, \lambda\zeta^{-1}, -z_2 + \lambda^2\zeta^{-1})| \, |\lambda|^{-6} \cdot$$
$$\cdot \, d\mu(\zeta) \, d\mu(\lambda) \, d\mu(z_1) \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Согласно формуле (122), отсюда следует, что

$$\int |\varphi(z_1, z_2, \lambda) - \varphi_m(z_1, z_2, \lambda)| \, |\lambda|^{-4} \, d\mu(\lambda) \, d\mu(z_1) \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Путем выбора подпоследовательности (обозначим ее снова через $\tilde{x}_m$) мы можем добиться того, что

$$\int |\varphi(z_1, z_2 \lambda) - \varphi_m(z_1, z_2, \lambda)| |\lambda|^{-4} d\mu(\lambda) \to 0 \text{ при } m \to \infty \qquad (143)$$

для почти всех z_1, z_2. Но при фиксированных z_1, z_2 интегрирование по λ фактически ведется по области вида $0 < \varepsilon \leqslant |\lambda| \leqslant C$. Поэтому из (143) следует, что также

$$\int |\varphi(z_1, z_2, \lambda) - \varphi_m(z_1, z_2, \lambda)| \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \to 0 \text{ при } m \to \infty .$$

Отсюда

$$\int \varphi_m(z_1, z_2, \lambda) |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \to \int \varphi(z_1, z_2, \lambda) |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}$$
$$\text{при } m \to \infty ,$$

т. е.

$$K_m(z_1, z_2\, n, \rho) \to \int \varphi(z_1, z_2, \lambda) |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} .$$

Сравнение этого результата с (142) дает, что

$$K(z_1, z_2, n, \rho) = \int \varphi(z_1, z_2, \lambda) |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} =$$
$$= \int x(z_1^{-1} \delta \zeta z_2) |\lambda|^{n+i\rho-2} \lambda^{-2} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} d\mu(\zeta), \qquad (144)$$

т. е. $K(z_1, z_2, n, \rho)$ есть ядро оператора $U_{n, \rho; x}$.

Таким образом, *если функция* $x(g)$ *из* $\mathfrak{H}_G$ *обращается в нуль вне множества вида* (128), *то переход к ядру* $K(z_1, z_2, n, \rho)$ *есть изометрическое отображение в* $\mathfrak{H}$; *другими словами, для таких* $x(g)$ *и* $K(z_1, z_2, n, \rho)$ *имеет место формула* (137).

Пусть теперь $x(g)$ — произвольная функция из $\mathfrak{H}_G$; обозначим через $\hat{x}(g)$ функцию, равную $x(g)$ на множестве (128) и равную нулю вне этого множества. Только что доказанное утверждение имеет место для $\hat{x}(g)$. Отсюда следует, что *в случае любой функции* $x(g)$ *из* $\mathfrak{H}_G$ *последний интеграл в формуле* (144) *сходится в смысле нормы в* $\mathfrak{H}$ *и для предельной функции* $K(z_1, z_2, n, \rho)$ *имеет место формула* (137).

Покажем теперь, что при этом отображении получается все пространство $\mathfrak{H}$. Более того, выведем формулу, которая дает в явном виде обращение построенного нами отображения $\mathfrak{H}_G$ в $\mathfrak{H}$.

Обозначим через $\mathfrak{H}_\Phi^1$ совокупность всех измеримых функций $\Phi(w_1, w_2, \lambda)$, удовлетворяющих условию (124) и таких, что

$$\|\Phi\|_1^2 = \int |\Phi(w_1, w_2, \lambda)|^2 d\mu(w_1) d\mu(w_2) \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} +$$
$$+ \int |\Delta_\lambda \Phi(w_1, w_2, \lambda)|^2 |\lambda|^2 d\mu(w_1) d\mu(w_2) d\mu(\lambda) < +\infty. \qquad (145)$$

При переходе от $\Phi(w_1, w_2, \lambda)$ к $K(z_1, z_2, n, \rho)$ пространство $\mathfrak{H}_\Phi^1$ изометрически отображается на пространство $\mathfrak{H}^1$ всех функций $K(z_1, z_2, n, \rho)$, удовлетворяющих условию

$$\|K\|_1^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int\int |K(z_1, z, n, \rho)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) \right] \cdot$$
$$\cdot \left[(n^2+\rho^2)^2 + 1 \right] d\rho < +\infty.$$

Очевидно, $\mathfrak{H}^1 \subset \mathfrak{H}$; кроме того, $\mathfrak{H}^1$ содержит все функции $K(z_1, z_2, n, \rho)$ из $\mathfrak{H}$, равные нулю при $|n| \geqslant n_0$, или $\rho > \rho_0$. Поэтому $\mathfrak{H}^1$ плотно в $\mathfrak{H}$ в смысле нормы в $\mathfrak{H}$.

Для $\Phi \in \mathfrak{H}_\Phi^1$ существует интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int |\Phi_\lambda(w_1, w_2, \lambda)|^2 d\mu(w_1) d\mu(w_2) d\mu(\lambda) =$$
$$= \int |X_{\zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)|^2 d\mu(\zeta_1) d\mu(\zeta_2) d\mu(\zeta_3).$$

Положим

$$\tilde{x}(p_1, p_2, p_3) |p_2|^{-4} \frac{p_2}{2} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int X_{\zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) e^{i \operatorname{Re}(p_1\zeta_1 - \bar{p}_2\zeta_2 + \bar{p}_3\zeta_3)} d\mu(\zeta_1) d\mu(\zeta_2) d\mu(\zeta_3).$$

Этот интеграл сходится в среднем и, по обычной теореме Планшереля,

$$\frac{1}{4} \int |\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)|^2 |p_2|^{-6} d\mu(p_1) d\mu(p_2) d\mu(p_3) =$$
$$= \int |X_{\zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)|^2 d\mu(\zeta_1) d\mu(\zeta_2) d\mu(\zeta_3) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int |\Phi_\lambda(w_1, w_2, \lambda)|^2 d\mu(w_1) d\mu(w_2) d\mu(\lambda).$$

Отсюда следует, что функция $x(g) = \tilde{x}(p_1, p_2, p_3)$ принадлежит $\mathfrak{H}_G$.

Таким образом, наше изометрическое отображение переводит $\mathfrak{H}_G$ на некоторое замкнутое подпространство пространства $\mathfrak{H}$, содержащее $\mathfrak{H}^1$. Так как последнее плотно в $\mathfrak{H}$, то это подпространство совпадает с $\mathfrak{H}$.

Другими словами, *отображение $x(g) \to K(z_1, z_2, n, \rho)$ есть изометрическое отображение $\mathfrak{H}_G$ на $\mathfrak{H}$.*

Найдем теперь обратное отображение $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_G$. Пусть сначала функция $K(z_1, z_2, n, \rho)$ есть элемент $\mathfrak{H}$, равный нулю вне множества вида

$$|z_1| \leqslant C_1, \quad |z_2| \leqslant C_2, \quad |n| \leqslant n_0, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0.$$

Этой функции соответствует элемент $x(g)$ пространства $\mathfrak{H}_G$. Положим

$$y(g) = \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int K(z, z\bar{g}, n, \rho) \beta^{-\frac{1}{2}}(zg) \overline{\chi_{n,\rho}(zg)} d\mu(z) \right] (n^2+\rho^2) d\rho \quad (146)$$

и докажем, что $y(g) = x(g)$. Пусть $x'(g) \in R'$; рассмотрим интеграл

$$\int \overline{x'(g)} y(g) d\mu(g) =$$
$$= \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int\int \overline{x'(g)} K(z, z\bar{g}, n, \rho) \beta^{-\frac{1}{2}}(zg) \overline{\chi_{n,\rho}(z\bar{g})} d\mu(g) d\mu(z) \right] \cdot$$
$$\cdot (n^2+\rho^2) d\rho. \quad (147)$$

Внутренний интеграл есть результат применения оператора $U_{-n,-\rho;\bar{x}'}$ к функции $K(z_1, z_2, n, \rho)$, рассматриваемой как функция от z_2, причем после этого следует положить $z_1 = z_2 = z$. Пусть ядро этого оператора есть $\overline{K'(z_1, z_2, n, \rho)}$ и, значит, $K'(z_1, z_2, n, \rho)$ есть ядро оператора $U_{n,\rho;x}$. Тогда равенство (147) можно переписать в виде

$$\int \overline{x'(g)}\, y(g)\, d\mu(g) =$$

$$= \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\iint \overline{K'(z, z_1, n, \rho)}\, K(z, z_1, n, \rho)\, d\mu(z)\, d\mu(z_1) \right] (n^2 + \rho^2)\, d\rho,$$

т. е.

$$\int y(g)\, \bar{x}'(g)\, d\mu(g) = (K, K'). \tag{148}$$

Элементами $x'(g)$ мы можем сколь угодно приблизиться к любому из $\mathfrak{H}_G$. Соответствующие K' при этом приближаются к любому элементу из $\mathfrak{H}$. Так как $K \in \mathfrak{H}$, то правая часть (148), а следовательно, и левая, имеет предел при этом приближении. Отсюда следует, что $y(g) \in \mathfrak{H}_G$ и что равенство (148) имеет место для всех $x'(g) \in \mathfrak{H}_G$ и, соответственно, всех $K' \in \mathfrak{H}$.

С другой стороны, такое же равенство

$$\int x(g)\, \overline{x'(g)}\, d\mu(g) = (K, K')$$

имеет место для функции $x(g)$, из которой функция K получается при нашем изометрическом отображении $\mathfrak{H}_G$ на $\mathfrak{H}$.
Поэтому $x(g) = y(g)$, т. е.

$$x(g) = \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int K(z, z\bar{g}, n, \rho)\, \beta^{-\frac{1}{2}}(zg)\, \chi_{n,\rho}(\overline{zg})\, d\mu(z) \right] (n^2 + \rho^2)\, d\rho, \tag{149}$$

или, подробнее,

$$x(g) = \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int K\left(z, \frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}, n, \rho\right) |g_{12}z + g_{22}|^{n+i\rho-2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (g_{12}z + g_{22})^{-n}\, d\mu(z) \right] (n^2 + \rho^2)\, d\rho. \tag{150}$$

При этом для функций $x(g)$ и $K(z_1, z_2, n, \rho)$ имеет место формула (137).

Пусть теперь $K(z_1, z_2, n, \rho)$ — произвольная функция из $\mathfrak{H}$. Положим

$$\hat{K}(z_1, z_2, n, \rho) = \begin{cases} K(z_1, z_2\, n, \rho) \text{ при } |z_1| \leqslant C_1,\ |z_2| \leqslant C_2,\ |n| \leqslant n_0,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0, \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Применяя наш результат к функции $\hat{K}(z_1, z_2, n, \rho)$, мы получаем, что интеграл (150) сходится в смысле нормы в $\mathfrak{H}_G$ к некоторой функции $x(g) \in \mathfrak{H}_G$ и переход от K к $x(g)$ осуществляет обратное отображение $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_G$.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 5. *Для любой функции* $x(g)\in\mathfrak{H}_G$ *интеграл*

$$K(z_1, z_2, n, \rho)=\int x(z_1^{-1}\delta\zeta z_2)\,\bar{\beta}^{-\frac{1}{2}}(\delta)\,\chi_{n,\rho}(\delta)\,d\mu(\delta)\,d\mu(\zeta) \qquad (151)$$

сходится в смысле нормы в $\mathfrak{H}$ *и представляет собой функцию из* $\mathfrak{H}$. *Обратно, для любой функции* $K(z_1, z_2, n, \rho)$ *из* $\mathfrak{H}$ *интеграл*

$$x(g)=\frac{1}{8\pi^4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\int \beta^{-\frac{1}{2}}(zg)\,\overline{\chi_{n,\rho}(zg)}\,K(z, z\bar{g}, n, \rho)\,d\mu(z)\right](n^2+\rho^2)\,d\rho \qquad (152)$$

сходится в смысле нормы в $\mathfrak{H}_G$ *и представляет собой функцию из* $\mathfrak{H}_G$. *Эти формулы осуществляют взаимно обратные изометрические отображения* $\mathfrak{H}_G$ *на* $\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{H}$ *на* $\mathfrak{H}_G$ *соответственно, так что для соответствующих друг другу* $x(g)$ *и* $K(z_1, z_2, n, \rho)$ *имеет место формула* (137).

Формулу (150) можно переписать иначе, полагая $\nu=g_{12}z+g_{22}$. Тогда эта формула примет вид

$$x(g)=\frac{1}{8\pi^4}|g_{12}|^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\int K\left(\frac{1}{g_{12}}\nu-\frac{g_{22}}{g_{12}}, \frac{g_{11}\nu-1}{g_{12}\nu}, \nu\right)|\nu|^{-n-i\rho-2}\nu^n\,d\mu(\nu)\right]\cdot$$

$$\cdot(n^2+\rho^2)\,d\rho$$

или, переходя к параметрам p_1, p_2, p_3,

$$\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)=$$

$$=\frac{1}{8\pi^3}|p_2|^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\int K\left(p_2\nu-p_3, p_1-\frac{p_2}{\nu}, \nu\right)|\nu|^{-n-i\rho-2}\nu^n\,d\mu(\nu)\right](n^2+\rho^2)\,d\rho. \qquad (153)$$

4. **Разложение регулярного представления на неприводимые представления.** Пользуясь теоремой 5, мы можем произвести разложение регулярного представления на неприводимые. Действительно, каждой функции $x(g)\in\mathfrak{H}_G$ поставим в соответствие ядро [ср. формулу (151)]

$$K(z_1, z_2, \chi)=\int x(z_1^{-1}kz_2)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(k)\,\chi(k)\,d\mu_l(k),$$

являющееся ядром Гильберта-Шмидта. В частности, для почти всех z_1, χ функция $f(z_2)=K(z_1, z_2, \chi)$ есть элемент $\mathfrak{H}_Z$.

Таким образом, каждой функции $x(g)\in\mathfrak{H}_G$ поставлен в соответствие элемент пространства $\mathfrak{H}_Z$, зависящий от z_1 и χ. При любом $g_0\in G$ функция $x(gg_0)$ также принадлежит $\mathfrak{H}_G$; посмотрим, как преобразуется $K(z_1, z_2, \chi)$ при переходе от $x(g)$ к $x(gg_0)$. Пусть сначала $x(g)\in R'$, следовательно, и $x(gg_0)\in R'$. Обозначая через $K_1(z_1, z_2, \chi)$ ядро, соответствующее функции $x(gg_0)$, имеем

$$K_1(z_1, z_2, \chi)=\int x(z_1^{-1}kz_2g_0)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(k)\,\chi(k)\,d\mu_l(k). \qquad (154)$$

Положим $z_2 g_0 = k_1 z_2'$, следовательно, $z_2' = z_2\overline{g}_0$. Тогда равенство (154) перепишется в виде

$$K_1(z_1 z_2, \chi) = \int x(z_1^{-1} k k_1 z_2') \beta^{-\frac{1}{2}}(k) \chi(k)\, d\mu_l(k) =$$

$$= \int x(z_1^{-1} k k_1 z_2') \beta^{\frac{1}{2}}(k) \chi(k)\, d\mu_r(k) =$$

$$= \int x(z_1^{-1} k z_2) \beta^{\frac{1}{2}}(k k_1^{-1}) \chi(k k_1^{-1})\, d\mu_r(k) =$$

$$= \beta^{-\frac{1}{2}}(k_1) \overline{\chi(k_1)} \int x(z_1^{-1} k z_2') \beta^{\frac{1}{2}}(k) \chi(k)\, d\mu_r(k),$$

т. е.

$$K_1(z_1, z_2, \chi) = \beta^{-\frac{1}{2}}(k_1) \overline{\chi(k_1)} K(z_1, z_2'; \chi) =$$

$$= \beta^{-\frac{1}{2}}(z_2 g_0) \overline{\chi(z_2 g_0)} K(z_1, z_2\overline{g}_0, \chi). \tag{155}$$

Таким образом, переходу от $x(g)$ к $x(gg_0)$ соответствует преобразование функции $f(z_2) = K(z_1, z_2, \chi)$ при помощи оператора $U_{\overline{\chi}; g_0}$.

В силу непрерывности оператора $U_{\overline{\chi}; g_0}$, это обстоятельство имеет место для всех функций $x(g) \in \mathfrak{H}_G$. Пространство $\mathfrak{H}$ можно рассматривать как прямую сумму пространств $\mathfrak{H}_{z_1 n, \rho} = \mathfrak{H}_Z$, определенную следующим образом: $\mathfrak{H}$ состоит из функций $f = f_{z_1, n, \rho}$ со значениями из $\mathfrak{H}_Z$ таких, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \iint_0^{\infty} \| f_{z_1, n, \rho} \|^2 (n^2 + \rho^2)\, d\rho\, d\mu(z_1) < +\infty. \tag{156}$$

причем скалярное произведение двух таких функций $f = f_{z_1, n, \rho}$, $f' = f'_{z_1, n, \rho}$ определяется равенством

$$(f, f') = \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \iint_0^{\infty} (f_{z_1, n, \rho}, f'_{z_1, n, \rho}) (n^2 + \rho^2)\, d\mu(z_1)\, d\rho.$$

Следовательно, отображение $\mathfrak{H}_G$ на $\mathfrak{H}$, рассмотренное в п. 3, есть изометрическое отображение $\mathfrak{H}_G$ на прямую сумму пространств $\mathfrak{H}_{z_1, n,} = \mathfrak{H}_Z$, причем оператору $V_{g_0} x(g) = x(gg_0)$ регулярного представления соответствует, в силу (155), оператор $U_{\overline{\chi}; g_0}$ основной серии в пространстве $\mathfrak{H}_{z_1, n, \rho}$. Это означает, что регулярное представление разложено в прямую сумму неприводимых представлений $U_{\chi; g}$ основной серии.

ТЕОРЕМА 6. *Регулярное представление группы G разлагается в прямую сумму неприводимых представлений основной серии.*

5. Унитарная эквивалентность представлений $U_{\chi; g}$ и $U_{\overline{\chi}; g}$. Воспользуемся теперь аналогом формулы Планшереля для доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Представления $U_{\chi;\,g}$ и $U_{\bar{\chi};\,g}$ основной серии унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Каждой функции $x(g) \in R'$ поставим в соответствие ядра

$$K(z_1, z_2, \chi) = \int x(z_1^{-1}\delta\zeta z_2)\,\chi(\delta)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\,d\mu(\zeta) \tag{157}$$

и

$$K(z_1, z_2, \chi) = \int x(z_1^{-1}\delta\zeta z_2)\,\overline{\chi(\bar{\delta})}\,\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\,d\mu(\zeta) \tag{158}$$

операторов $U_{\chi;\,x}$ и $U_{\bar{\chi};\,x}$. Тогда, в силу формулы (94) § 6 для следа,

$$S(U_{\chi;\,x^*x}) = S(U_{\bar{\chi};\,x^*x}),$$

т. е.

$$\iint |K(z_1, z_2, \chi)|^2\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2) = \iint |K(z_1, z_2, \bar{\chi})|^2\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2). \tag{159}$$

Пусть $\mathfrak{H}_K$ — гильбертовское пространство функций $K(z_1, z_2)$ таких, что

$$\iint |K(z_1, z_2)|^2\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2) < +\infty. \tag{160}$$

Когда $x(g)$ пробегает R', то, согласно аналогу формулы Планшереля, $K(z_1, z_2, \chi)$ и $K(z_1, z_2, \bar{\chi})$ пробегают плотные множества $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ в $\mathfrak{H}_K$.

С другой стороны, в силу (159), соответствие

$$K(z_1, z_2, \chi) \longleftrightarrow K(z_1, z_2, \bar{\chi})$$

есть изометрическое отображение $\mathfrak{S}_1$ на $\mathfrak{S}_2$ и, следовательно, оно единственным образом продолжается до унитарного оператора W в $\mathfrak{H}_K$.

Пусть теперь $\{\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}_Z$. Тогда всякий элемент $K(z_1, z_2)$ из $\mathfrak{H}_K$ можно представить в виде

$$K(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z_1)\,f_k(z_2), \tag{161}$$

причем

$$\|K\|^2 = \iint |K(z_1, z_2)|^2\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k(z_2)|^2\,d\mu(z_2). \tag{162}$$

Это означает, что $\mathfrak{H}_K$ можно рассматривать как прямую счетную сумму пространств, совпадающих с $\mathfrak{H}_Z$.

С другой стороны, при переходе к $x(gg_0)$ ядро $K(z_1, z_2, \chi)$, рассматриваемое как функция z_2, преобразуется по представлению $U_{\bar{\chi};\,g_0}$. Этому преобразованию соответствует преобразование каждой компоненты $f_k(z_2)$ по представлению $U_{\bar{\chi};\,g_0}$.

Другими словами, преобразование ядра $K(z_1, z_2; \chi)$, соответствующее сдвигу $x(g) \to x(gg_0)$, есть представление группы G, кратное неприводимому представлению $U_{\bar{\chi}; g_0}$. Обозначим это представление через U'_{g_0}.

Аналогично, преобразование ядра $K(z_1, z_2, \chi)$, соответствующее сдвигу $x(g) \to x(gg_0)$, есть представление группы G, кратное $U_{\chi; g_0}$. Обозначим это представление через U''_{g_0}.

Итак, функции $x(gg_0)$ соответствуют ядра $U'_{g_0}K(z_1, z_2, \chi)$ и $U''_{g_0}K(z_1, z_2, \chi)$. По определению оператора W, он переводит первое ядро во второе, т. е. U'_{g_0} в U''_{g_0}, следовательно, представления U'_{g_0}, U''_{g_0}, соответственно кратные $U_{\bar{\chi}; g_0}$ и $U_{\chi; g_0}$, эквивалентны. Но тогда, как нами будет доказано в следующей статье, сами представления $U_{\bar{\chi}; g_0}$ и $U_{\chi; g_0}$ также эквивалентны.

Оператор V, который переводит $U_{\chi; g}$ в $U_{\bar{\chi}; g}$, можно указать в явном виде, если от пространства $\mathfrak{H}_Z$ функций $f(z)$ с суммируемым квадратом перейдем к их трансформациям Фурье

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi}\int f(z)\, e^{-i\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w})}\, d\mu(z). \tag{163}$$

При этом по теореме Планшереля

$$\int |f(z)|^2\, d\mu(z) = \int |\varphi(w)|^2\, d\mu(w). \tag{164}$$

Будем писать $U_{n, \rho; g}$ вместо $U_{\chi; g}$; тогда, по определению оператора V,

$$VU_{-n, -\rho; g} = U_{n, \rho; g}V. \tag{165}$$

При $g = z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_0 & 1 \end{pmatrix}$ мы будем иметь

$$U_{n, \rho; z_0}\varphi(w) = e^{i\,\mathrm{Re}\,(wz_0)}\varphi(w).$$

Поэтому при $g = z_0$ равенство (165) примет вид

$$Ve^{i\mathrm{Re}(\bar{w}z_0)}\varphi(w) = e^{i\mathrm{Re}(\bar{w}z_0)}V\varphi(w). \tag{166}$$

Таким образом, V коммутирует с оператором умножения на $e^{i\,\mathrm{Re}\,(\bar{w}z_0)}$, каково бы ни было z_0; следовательно, V есть оператор умножения на ограниченную функцию.

Пусть

$$V\varphi(w) = \omega(w)\varphi(w). \tag{167}$$

Положим в равенстве (165) $g = \delta = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$; тогда [см. (71), § 5]

$$U_{n, \rho; \delta}\varphi(w) = |\lambda|^{n+i\rho+2}\lambda^{-n}\varphi(w\bar{\lambda}^2) \tag{168}$$

и, следовательно, при $g = \delta$ равенство (165) примет вид

$$\omega(w)|\lambda|^{-n-i\rho+2}\lambda^n\varphi(w\bar{\lambda}^2) = |\lambda|^{n+i\rho+2}\lambda^{-n}\omega(w\bar{\lambda}^2)\varphi(w\bar{\lambda}^2).$$

Отсюда

$$w(w\bar{\lambda}^2) = \omega(\omega)|\lambda^2|^{-n-i\rho}(\lambda^2)^n.$$

Подставляя 1 вместо w и w вместо $\overline{\lambda}^2$, получим

$$\omega(w) = C\,|w|^{-n-i\rho}\,\overline{w}^n, \tag{169}$$

где $C = \omega(1)$. Мы можем, очевидно, положить $C = 1$. Тогда равенство (167) перепишется в виде

$$V\varphi(w) = |w|^{-n-i\rho}\,\overline{w}^n\,\varphi(w). \tag{170}$$

Это и есть искомое явное выражение для оператора V.

§ 8. Дополнительная серия неприводимых представлений группы G

1. Определение представлений дополнительной серии. В § 7 мы установили, что регулярное представление группы G разлагается на неприводимые представления основной серии. Покажем теперь, что тем не менее группа G имеет еще другие неприводимые представления.

Представления основной серии имеют вид

$$U_g f(z) = \alpha(zg)\, f(z\overline{g}), \tag{171}$$

где

$$\alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\,\chi(\delta) \tag{172}$$

и

$$\alpha(\delta\zeta z) = \alpha(\delta), \tag{173}$$

а $\chi(\delta)$ — характер группы D такой, что

$$|\chi(\delta)| = 1. \tag{174}$$

При этом скалярное произведение в $\mathfrak{H}_Z$ определяется равенством

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z)\,\overline{f_2(z)}\,d\mu(z). \tag{175}$$

Не будем больше требовать выполнения условия (174) и посмотрим, нельзя ли выбрать метрику в совокупности функций $f(z)$ так, чтобы формула (171) давала унитарное представление группы G.

Легко видеть, что выбор метрики (175) автоматически ведет к условию (174). Вообще, пусть метрика задается равенством

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z)\,\overline{f_2(z)}\,d\sigma(P_z), \tag{176}$$

где $\sigma(P)$ — положительная вполне аддитивная функция компактного множества $P \subset Z$. Полагая в (171) $g = z_0$, получаем

$$U_{z_0} f(z) = f(zz_0).$$

Поэтому условие унитарности $\|U_{z_0} f\|^2 = \|f\|^2$ дает

$$\int |f(zz_0)|^2\, d\sigma(P_z) = \int |f(z)|^2\, d\sigma(P_z),$$

следовательно, с точностью до постоянного множителя, $\sigma(P)$ — инвариантная мера в Z и метрика (176) с точностью до постоянного множителя совпадает с (175). Но тогда условие унитарности оператора U_g дает

$$\int \beta^{-1}(zg)\,|\chi(zg)|^2\,|f(z\overline{g})|^2\, d\mu(z) = \int |f(z_1)|^2\, d\mu(z_1).$$

Сделав во втором интеграле подстановку $z_1 = z\bar{g}$ и пользуясь соотношением (48) § 4, получим

$$\int \beta^{-1}(zg)\,|\chi(zg)|^2\,|f(z\bar{g})|^2\,d\mu(z) = \int \beta^{-1}(zg)\,|f(z\bar{g})|^2\,d\mu(z);$$

следовательно, $|\chi(zg)| = 1$.

Итак, при метрике (176), а следовательно, метрике (175), мы получаем представления основной серии.

Будем теперь искать метрику в виде

$$(f_1, f_2) = \int\int K(z_1, z_2)\, f_1(z_1)\,\overline{f_2(z_2)}\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2), \tag{177}$$

беря пока в качестве $f_1(z)$, $f_2(z)$ ограниченные измеримые функции такие, что интеграл (177) сходится абсолютно.

Условие унитарности оператора (171) дает

$$\int\int K(z_1, z_2)\,\beta^{-1}(z_1g)\,\beta^{-1}(z_2g)\,\chi(z_1g)\,\overline{\chi(z_2g)}\,f_1(z_1\bar{g})\,\overline{f_2(z_2\bar{g})}\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2) =$$
$$= \int\int K(z_1', z_2')\,f_1(z_1')\,\overline{f_2(z_2')}\,d\mu(z_1')\,d\mu(z_2'). \tag{178}$$

Сделав в этом втором интеграле подстановку $z_1' = z_1\bar{g}$, $z_2' = z_2\bar{g}$, мы приведем его к виду

$$\int\int K(z_1\bar{g}, z_2\bar{g})\,\beta^{-1}(z_1g)\beta^{-1}(z_2g)\,f_1(z_1\bar{g})\,\overline{f_2(z_2\bar{g})}\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2);$$

следовательно, равенство (178) даст

$$K(z_1\bar{g}, z_2\bar{g}) = K(z_1, z_2)\,\beta^{\frac{1}{2}}(z_1g)\,\beta^{\frac{1}{2}}(z_2g)\,\chi(z_1g)\,\overline{\chi(z_2g)}. \tag{179}$$

Переходя от z_1, z_2 к параметрам z_1, z_2, мы можем переписать (179) в виде

$$K\left(\frac{g_{11}z_1 + g_{21}}{g_{12}z_1 + g_{22}},\ \frac{g_{11}z_2 + g_{21}}{g_{12}z_2 + g_{22}}\right) =$$
$$= K(z_1, z_2)\,|g_{12}z_1 + g_{22}|^2\,|g_{12}z_2 + g_{22}|^2\,\chi(g_{12}z_1 + g_{22})\,\overline{\chi(g_{12}z_2 + g_{22})}. \tag{180}$$

При $g = z_0$ мы получим

$$K(z_1 + z_0,\ z_2 + z_0) = K(z_1, z_2),$$

следовательно,

$$K(z_1, z_2) = K_1(z_1 - z_2).$$

Таким образом, условие (180) примет вид

$$K_1\left(\frac{z_1 - z_2}{(g_{12}z_1 + g_{22})\ (g_{12}z_2 + g_{22})}\right) =$$
$$= K_1(z_1 - z_2)\,|g_{12}z_1 + g_{22}|^2\,|g_{12}z_2 + g_{22}|^2\,\chi(g_{12}z_1 + g_{22})\,\overline{\chi(g_{12}z_2 + g_{22})}. \tag{181}$$

Полагая здесь $z_2 = 0$ и подбирая g_{12} так, чтобы $g_{12}z_1 + g_{22} = 1$, получим

$$K_1\left(\frac{z_1}{g_{22}}\right) = K_1(z_1)\,|g_{22}|^2\,\overline{\chi(g_{22})}. \tag{182}$$

С другой стороны, полагая $z_1 = 0$ и подбирая g_{12} так, чтобы $g_{12}z_2 + g_{22} = 1$, получим

$$K_1\left(-\frac{z_2}{g_{22}}\right) = K_1(-z_2)\,|g_{22}|^2\,\chi(g_{22}). \tag{183}$$

Сравнение равенств (182) и (183) дает, что $\chi(g_{22})$ – действительное число. Кроме того, из (182) следует, что

$$K_1(z) = C\,|z|^{-2}\,\chi^{-1}(z), \tag{184}$$

где C — некоторая константа. Так как $\chi(z)$ — действительная измеримая функция (в силу измеримости представления), удовлетворяющая условию $\chi(z_1 z_2) = \chi(z_1)\,\chi(z_2)$, то

$$\chi(z) = |z|^{-\rho}, \tag{185}$$

где ρ — действительное число. Отсюда, в силу (184),

$$K(z_1, z_2) = C\,|z_1 - z_2|^{-2+\rho} \tag{186}$$

и выражение (177) для скалярного произведения перепишется в виде

$$(f_1, f_2) = C \iint |z_1 - z_2|^{-2+\rho} f_1(z_1)\,\overline{f_2(z_2)}\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2); \tag{187}$$

само же представление (177) будет задаваться формулой

$$U_g f(z) = |g_{12}z + g_{22}|^{-2-\rho} f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right). \tag{188}$$

Интеграл в (187) может, очевидно, существовать в том и только в том случае, когда $\rho > 0$. Кроме того, метрика (187) должна быть положительно определенной, т. е. должно быть

$$(f, f) = C \iint |z_1 - z_2|^{-2+\rho} f(z_1)\,\overline{f(z_2)}\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2) \geqslant 0. \tag{189}$$

Посмотрим, при каких значениях ρ выполняется это условие. Пусть сначала $0 < \rho < \frac{1}{2}$ и пусть $f(z)$ — функция, равная нулю вне некоторого круга $|z| \leqslant c$ и, кроме того, настолько гладкая, что ее трансформация Фурье

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi}\int f(z)\,e^{-i\operatorname{Re}(\bar{z}w)}\,d\mu(z) \tag{190}$$

суммируема. Совокупность таких функций $f(z)$ обозначим через $\mathfrak{H}'$, а их трансформации Фурье $\varphi(w)$ — через H'.

Очевидно, при $w = 0$ функция $\varphi(w)$ принимает конечное значение

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int f(z)\,d\mu(z). \tag{191}$$

Кроме того,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int \varphi(w)\,e^{i\operatorname{Re}(\bar{z}w)}\,d\mu(w). \tag{192}$$

При любом фиксированном z_2 существует интеграл

$$\int |z_1 - z_2|^{-2+\rho} f(z_1)\,d\mu(z_1) = \int |z|^{-2+\rho} f(z + z_2)\,d\mu(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int |z|^{-2+\rho}\left[\int \varphi(w)\,e^{i\operatorname{Re}((z+z_2)\bar{w})}\,d\mu(w)\right] d\mu(z);$$

переходя к полярным координатам $z = re^{i\theta}$ и полагая $\zeta = r_1 e^{i\theta_1}$, мы приведем его к виду

$$\int |z_1 - z_2|^{-2+\rho} f(z_1)\, d\mu(z_1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^{-1+\rho} \left[\int \varphi(w)\, e^{i\mathrm{Re}\,(rr_1 e^{i(\theta-\theta_1)})} e^{i\mathrm{Re}\,(z_2\bar{w})}\, d\mu(w) \right] dr\, d\theta.$$

Но интегрирование по θ можно произвести под знаком всех прочих интегралов, ибо внутренний интеграл по модулю не превосходит $\int |\varphi(w)|\, d\mu(w)$, а потому сходится равномерно относительно θ. Поэтому последний интеграл равен

$$\int_0^{\infty} r^{-1+\rho} \left[\int \varphi(w)\, e^{i\,\mathrm{Re}\,(z_2\bar{w})} I_0(rr_1)\, d\mu(w) \right] dr,$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Легко видеть, что этот интеграл сходится абсолютно по обеим переменным. Поэтому он равен

$$\int \varphi_1(w)\, e^{i\mathrm{Re}\,(z_2\bar{w})} \left[\int_0^{\infty} r^{-1+\rho} I_0(rr_1)\, dr \right] d\mu(w) =$$

$$= 2^{-1+\rho} \frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\rho}{2}\right)} \int \varphi(w)\, e^{i\mathrm{Re}\,(z_2\bar{w})} r_1^{-\rho}\, d\mu(w) =$$

$$= 2^{-1+\rho} \frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\rho}{2}\right)} \int \varphi_1(w)\, |w|^{-\rho} e^{i\mathrm{Re}\,(z_2\bar{w})}\, d\mu(w),$$

причем полученный интеграл также сходится абсолютно.

Умножая обе части этого равенства на $\overline{f(z_2)}$ и интегрируя, мы, в силу (190), получаем:

$$\iint |z_1 - z_2|^{-2+\rho} f(z_1)\overline{f(z_2)}\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2) =$$

$$= 2^{\rho}\pi \frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\rho}{2}\right)} \int |w|^{-\rho} |\varphi(w)|^2\, d\mu(w). \qquad (193)$$

Равенство (193) доказано нами при $0 < \rho < \frac{1}{2}$. Но при фиксированной функции $f(z)$, а значит, фиксированной функции $\varphi(w)$, левая и правая части равенства (193) являются аналитическими функциями от ρ в полосе $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 2$ и, следовательно, равенство (193) имеет место во всей этой полосе. В частности, оно имеет место для $0 < \rho < 2$.

Из (193) следует, что *метрика* (189) *является положительно определенной при* $0 < \rho < 2$ *и* $C > 0$.

При $\rho=2$

$$(f, f)=C\left|\int f(z)\,d\mu(z)\right|^2, \tag{194}$$

следовательно, и в этом случае метрика положительно определенная.

Легко видеть, что при $\rho>2$ эта метрика перестает быть положительно определенной. Действительно, пусть, например, $2<\rho<4$. Тогда равенство (193) еще остается верным для функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(0)=\frac{1}{2\pi}\int f(z)\,d\mu(z)=0. \tag{195}$$

Так как при этом множитель перед интегралом в правой части (193) отрицателен, то для функций $f(z)$, удовлетворяющих условию (195), эта метрика будет позитивной при $C<0$. С другой стороны, взяв в качестве $f(z)$ функцию, принимающую только неотрицательные значения, мы, очевидно, получим, что

$$(f, f)=C\int |z_1-z_2|^{-2+\rho} f(z_1) f(z_2)\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)<0,$$

ибо подинтегральная функция положительна.

Пусть $0<\rho<2$; введем в $\mathfrak{H}'$ скалярное произведение

$$(f_1, f_2)=\int |z_2-z_2|^{-2+\rho} f_1(z_1)\overline{f_2(z_2)}\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2), \tag{196}$$

а в H' — скалярное произведение

$$(\varphi_1, \varphi_2)=2^{\rho}\pi\frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\rho}{2}\right)}\int |w|^{-\rho}\varphi_1(w)\overline{\varphi_2(w)}\,d\mu(w). \tag{197}$$

Равенство (193) показывает, что формула (190) устанавливает изометрическое соответствие между $\mathfrak{H}'$ и H'. Это соответствие можно продолжить, и притом единственным образом, до изометрического соответствия между пополнениями пространств $\mathfrak{H}'$ и H' по отношению к скалярным произведениям (196) и (197) соответственно. Обозначим эти пополнения через $\mathfrak{H}_\rho$ и H_ρ. Обозначим, далее, через $\tilde{H}_\rho$ совокупность всех функций $\varphi(w)$ таких, что

$$\int |w|^{-\rho}|\varphi(w)|^2\,d\mu(w)<+\infty. \tag{198}$$

Докажем, что $H_\rho=\tilde{H}_\rho$. Действительно, функции из H' образуют всюду плотное множество в пространстве функций $\varphi(w)$ с нормой

$$\int |\varphi(w)|^2\,d\mu(w)<+\infty.$$

Пусть, в частности, $\varphi_\Delta(w)$ — измеримая ограниченная функция, равная нулю вне Δ, где Δ — компактное множество w-плоскости, не содержащее точки $w=0$. Тогда при заданном $\varepsilon_1>0$ найдется функция $\varphi'(w)\in H'$ такая, что

$$\int |\varphi_\Delta(w)-\varphi'(w)|^2\,d\mu(w)<\varepsilon_1. \tag{199}$$

Разобьем всю w-плоскость на множества Q_1 и Q_2 точек, в которых $|w| \leqslant \varepsilon_2$, $|w| > \varepsilon_2$ соответственно. Тогда, обозначая через C число, удовлетворяющее условию $|\varphi_\Delta(w) - \varphi'(w)| \leqslant C$ для всех w и полагая $w = re^{i\theta}$, получим:

$$\int |w|^{-\rho} |\varphi_\Delta(w) - \varphi'(w)|^2 d\mu(w) = \int\limits_{Q_1} |w|^{-\rho} |\varphi_\Delta(w) - \varphi'(w)|^2 d\mu(w) +$$

$$+ \int\limits_{Q_2} |w|^{-\rho} |\varphi_\Delta(w) - \varphi'(w)|^2 d\mu(w) \leqslant C^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\varepsilon_2} r^{-\rho} r \, dr \, d\theta +$$

$$+ \varepsilon_2^{-\rho} \int\limits_{Q_2} |\varphi_\Delta(w) - \varphi'(w)|^2 d\mu(w) < \frac{2\pi C^2}{2-\rho} \varepsilon_2^{2-\rho} + \varepsilon_2^{-\rho} \varepsilon_1.$$

Таким образом, функциями из H' можно сколь угодно приблизиться к функциям $\varphi_\Delta(w)$ в смысле метрики в $\tilde{H}_\rho$.

С другой стороны, функции $\varphi_\Delta(w)$ образуют всюду плотное множество в $\tilde{H}_\rho$. Следовательно, $\tilde{H}$ плотно в $\tilde{H}_\rho$, и H_ρ, как пополнение H', совпадает с $\tilde{H}_\rho$.

Итак, H_ρ совпадает с совокупностью всех функций $\varphi(w)$, удовлетворяющих условию (198).

Обозначим теперь через $\mathfrak{H}'_\rho$ совокупность всех ограниченных измеримых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\iint |z_1 - z_2|^{-2+\rho} |f(z_1)| |f(z_2)| d\mu(z_1) d\mu(z_2) < +\infty \tag{200}$$

и докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Если* $0 < \rho < 2$, *то для любой функции* $f(z)$ *из* $\mathfrak{H}'_\rho$ *интеграл*

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi} \int f(z) e^{-i\mathrm{Re}(z\bar{w})} d\mu(z) \tag{201}$$

сходится в смысле нормы в H_ρ *и*

$$\|f\|^2 = \|\varphi\|^2, \tag{202}$$

где

$$\|f\|^2 = \int |z_1 - z_2|^{-2+\rho} f(z_1) f(z_2) d\mu(z_1) d\mu(z_2). \tag{203}$$

Доказательство. Пусть сначала $f(z)$ — ограниченная измеримая функция, равная нулю вне множества $|z| \leqslant C$. Тогда интеграл (201) сходится в обычном смысле.

Докажем, что для этих функций $f(z)$ и $\varphi(w)$ имеет место равенство (202).

С этой целью выберем из $\mathfrak{H}'$ равномерно ограниченную последовательность функций $f_m(z)$, равных нулю вне множества $|z| \leqslant C$ и таких, что

$$\int |f(z) - f_m(z)|^2 d\mu(z) \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{204}$$

Отсюда следует, что и

$$\int |f(z)-f_m(z)|\,d\mu(z)\to 0 \text{ при } m\to\infty. \qquad (205)$$

Разобьем множество всех $\{z_1, z_2\}$ на множества $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, определенные неравенствами:

$$\mathscr{E}_1:\quad |z_1-z_2|\leqslant\varepsilon,$$
$$\mathscr{E}_2:\quad |z_1-z_2|>\varepsilon.$$

Тогда, обозначая через C' число такое, что $|f(z)|\leqslant C'$, $|f_m(z)|\leqslant C'$, получим

$$\left|\int_{\mathscr{E}_1} |z_1-z_2|^{-2+\rho}[f(z_1)-f_m(z_1)]\,\overline{f(z_2)}\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2C'\int_{\mathscr{E}_1} |z_1-z_2|^{-2+\rho}|f(z_2)|\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)\leqslant$$
$$\leqslant 2C'^2\cdot\pi C^2\int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi} r^{-2+\rho}r\,dr\,d\theta=\frac{4\pi^2C^2C'^2\varepsilon^\rho}{\rho}$$

и

$$\left|\int_{\mathscr{E}_2} |z_1-z_2|^{-2+\rho}[f(z_1)-f_m(z_1)]\,f(z_2)\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon^{-2+\rho}C'\cdot\pi C^2\int |f(z_1)-f_m(z_1)|\,d\mu(z_1).$$

Из этих оценок следует, что

$$\int |z_1-z_2|^{-2+\rho}[f(z_1)-f_m(z_1)]\,\overline{f(z_2)}\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int |z_1-z_2|^{-2+\rho}f_m(z_1)\,[\overline{f(z_2)-f_m(z_2)}]\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

Складывая эти два соотношения, получим

$$\|f_m\|^2\to\|f\|^2 \text{ при } m\to\infty. \qquad (206)$$

Функциям $f_m(z)$ соответствуют по формуле (201) функции $\varphi_m(w)$, причем по доказанному,

$$\|f_m\|^2=\|\varphi_m\|^2. \qquad (207)$$

Докажем, что $\|\varphi_m-\varphi\|\to 0$ при $m\to\infty$. Действительно, функции φ_m, φ ограничены одной и той же константой $C''=\pi C^2C'$. Кроме того, из (204) следует, что

$$\int |\varphi(w)-\varphi_m(w)|^2\,d\mu(w)=\int |f(z)-f_m(z)|^2\,d\mu(z)\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

Разобьем w-плоскость на множества

$$F_1:\quad |w_1|\leqslant\varepsilon,$$
$$F_2:\quad |w_2|>\varepsilon.$$

Тогда

$$\int\limits_{F_1} |\varphi(w) - \varphi_m(w)|^2 |w|^{-\rho} d\mu(w) \leqslant 4C''^2 \int\limits_{F_1} |w|^{-\rho} d\mu(w) =$$

$$= 8\pi C''^2 \int\limits_0^{\varepsilon} r^{-\rho} r\, dr = \frac{8\pi C''^2 \varepsilon^{2-\rho}}{2-\rho}$$

и

$$\int\limits_{F_2} |\varphi(w) - \varphi_m(w)|^2 |w|^{-\rho} d\mu(w) \leqslant \varepsilon^{-\rho} \int |\varphi(w) - \varphi_m(w)|^2 d\mu(w).$$

Из этих оценок следует, что

$$\|\varphi - \varphi_m\|^2 = 2^\rho \pi \frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\rho}{2}\right)} \int |\varphi(w) - \varphi_m(w)|^2 |w|^{-\rho} d\mu(w) \longrightarrow 0 \text{ при } m \longrightarrow \infty$$

и, значит, $\|\varphi_m\| \longrightarrow \|\varphi\|$ при $m \longrightarrow \infty$.

Переходя теперь в равенстве (207) к пределу и пользуясь соотношением (206), мы получаем, что $\|f\|^2 = \|\varphi\|^2$.

Пусть, теперь, $f(z)$ — произвольная функция из $\mathfrak{H}'_\rho$. Обозначим через $f_c(z)$ функцию, определенную равенствами

$$f_c(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } |z| \leqslant c, \\ 0 & \text{при } |z| > c. \end{cases}$$

Соответствующую функцию $\varphi(w)$ обозначим через $\varphi_c(w)$. По только что доказанному, $\|f_c\|^2 = \|\varphi_c\|^2$. Аналогично, при $c_1 > c$

$$\|f_{c_1} - f_c\|^2 = \|\varphi_{c_1} - \varphi_c\|^2.$$

В силу предполагаемой сходимости интеграла (200), левая часть последнего равенства стремится к нулю при $c_1, c \longrightarrow \infty$. Отсюда следует, что существует $\lim\limits_{c\to\infty} \varphi_c = \varphi$ в смысле сходимости в H_ρ. Другими словами, интеграл (201) сходится в смысле нормы в H_ρ. Переходя теперь в равенстве $\|f_c\|^2 = \|\varphi_c\|^2$ к пределу при $c \longrightarrow \infty$, мы получим требуемое равенство: $\|f\|^2 = \|\varphi\|^2$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что H'_ρ можно рассматривать, как часть $\mathfrak{H}_\rho$.

Как мы видели выше, оператор U_g, определенный равенством (188), унитарен в $\mathfrak{H}'_\rho$ в смысле метрики (196). По непрерывности U_g продолжается, и притом единственным образом, до унитарного оператора U_g в $\mathfrak{H}_\rho$, следовательно, до унитарного оператора U_g в H_ρ.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 8. *При* $0 < \rho < 2$ *равенство* (188) *определяет унитарное представление группы* G *в пространстве* $\mathfrak{H}_\rho$.

При $\rho = 2$ равенство (194) показывает, что мы должны считать $f = 0$, если $\int f(z)\, d\mu(z) = 0$. Поэтому в случае $\rho = 2$ пространство $\mathfrak{H}_\rho$ одномерно

и соответствующее представление есть единичное представление *. Для всех других значений ρ, $0 < \rho < 2$, представление бесконечномерно. При $\rho = 0$ представление переходит в представление основной серии, соответствующее характеру $\chi \equiv 1$.

Заметим еще, что формулу (188) можно формально получить из формулы (65) § 5 для основной серии, полагая $n = 0$ и подставляя ρi вместо ρ.

Полученную таким образом совокупность представлений мы назовем **дополнительной серией представлений** группы G.

ТЕОРЕМА 9. *Все представления дополнительной серии неприводимы.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для основной серии.

2. **След представлений дополнительной серии.** Пусть $U_{\rho_1; g}$—представление дополнительной серии. Рассмотрим соответствующее представление $U_{\rho_1; x}$ группового кольца и докажем, что при $x(g) \in R'$ оператор $U_{\rho_1; x^* x}$ имеет след.

Будем для этого применять оператор $U_{\rho_1; x}$ к функции $f(z) \in \mathfrak{H}'$. Тогда, повторяя рассуждения п. 2 § 6, мы убедимся в том, что на таких функциях наш оператор имеет ядро

$$K(z_1, z_2, \rho_1) = \int x(z_1^{-1} \delta \zeta z_2) |\lambda|^{-2-\rho_1} \frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2} d\mu(\zeta), \tag{208}$$

где

$$\delta = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = \sigma + i\tau.$$

Это ядро можно выразить при помощи функции $\varphi(z_1, z_2, \lambda)$, определенной формулой (119). Именно, согласно этой формуле,

$$K(z_1, z_2, \rho_1) = \int \varphi(z_1, z_2, \lambda) |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2}. \tag{209}$$

Далее, сравнивая выражение для функции $\varphi(z_1, z_2, \lambda)$ с выражением для функции T_δ, определенной формулой (97), мы убеждаемся в том, что

$$T_\delta = \int \varphi(z, z, \lambda)\, d\mu(z). \tag{210}$$

Если $x(g) \in R'$, то, как было показано в п. 3 § 6, функция T_δ непрерывна и обращается в нуль вне некоторого компактного подмножества группы D. Поэтому существует интеграл

---

* Можно, однако, на совокупности функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\int f(z)\, d\mu(z) = 0$, задать метрику так, чтобы формула (188) при $\rho = 2$ определяла представление основной серии, соответствующее $n = 2$, $\rho = 0$ (см. стр. 501—502).

Таким образом, значению $\rho = 2$ фактически отвечают два представления: единичное и представление основной серии, соответствующее $n = 2$, $\rho = 0$.

$$\int T_\delta |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2} = \int \varphi(z, z, \lambda) |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2} d\mu(z) =$$
$$= \int K(z, z, \rho_1)\, d\mu(z). \tag{211}$$

Все эти интегралы сходятся абсолютно, ибо при переходе от $x(g)$ к $|x(g)|$ мы останемся в классе R'.

Докажем теперь, что если $x(g) = (x_1 \times x_1^*)(g)$ и $x_1(g) \in R'$, то выражение (211) является следом оператора $U_{\rho_1; x}$.

По нашему предположению, $x(g) = (x_1 \times x_1^*)(g)$. Пусть $\varphi_1(z_1, z_2, \lambda)$ — функция φ, соответствующая функции $x_1(g)$. Найдем связь между φ и φ_1.

Пусть, вообще, $x_1(g)$, $x_2(g)$ — две функции из R и пусть $x(g) = (x_1 \times x_2)(g)$.

Найдем выражение для функции φ, соответствующей $x(g)$, через функции φ_1, φ_2, соответствующие $x_1(g)$, $x_2(g)$.

По определению свертки,

$$x(g) = \int x_1(gg_1)\, x_2(g_1^{-1})\, d\mu(g_1).$$

Отсюда

$$\varphi(z_1, z_2, \lambda) = |\lambda|^{-2} \int x(z_1^{-1}\delta\zeta z_2 g_1)\, x_2(g_1^{-1})\, d\mu(g_1)\, d\mu(\zeta) =$$
$$= |\lambda|^{-2} \int x_1(z_1^{-1}\delta\zeta g_1)\, x_2(g_1^{-1} z_2)\, d\mu(g_1)\, d\mu(\zeta) =$$
$$= |\lambda|^{-2} \int x_1(z_1^{-1}\delta\zeta\delta_1\zeta_1 z)\, x_2(z^{-1}\zeta_1^{-1}\delta_1^{-1} z_2)\, d\mu(\delta_1)\, d\mu(z)\, d\mu(\zeta)\, d\mu(\zeta_1).$$

Положим

$$\zeta\delta_1 = \delta_1\zeta', \quad \zeta_1^{-1}\delta_1^{-1} = \delta_1^{-1}\zeta_1'.$$

Тогда, как легко проверить,

$$\varphi(z_1, z_2, \lambda) =$$
$$= |\lambda|^{-2} \int x_1(z_1^{-1}\delta\delta_1\zeta' z)\, x_2(z^{-1}\delta_1^{-1}\zeta_1' z_2)\, d\mu(\delta_1)\, d\mu(z)\, d\mu(\zeta')\, d\mu(\zeta_1'),$$

т. е.

$$\varphi(z_1, z_2, \lambda) = \int \varphi_1(z_1, z, \lambda\lambda_1)\, \varphi_2(z, z_2, \lambda_1^{-1}) \frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{|\lambda_1|^2} d\mu(z). \tag{212}$$

Пусть, далее, $\varphi^*(z_1, z_2, \lambda)$ — функция φ, соответствующая функции $x^*(g) = \overline{x(g^{-1})}$. Найдем связь между φ и φ^*. Мы имеем

$$\varphi^*(z_1, z_2, \lambda) = |\lambda|^{-2} \int \overline{x(z_2^{-1}\zeta^{-1}\delta^{-1} z_1)}\, d\mu(\zeta).$$

Положим $\zeta^{-1}\delta^{-1} = \delta^{-1}\zeta_1$; тогда $\frac{d\mu(\zeta)}{d\mu(\zeta_1)} = |\lambda|^4$ и, следовательно,

$$\varphi^*(z_1, z_2, \lambda) = |\lambda|^2 \int \overline{x(z_2^{-1}\delta^{-1}\zeta_1 z_1)}\, d\mu(\zeta_1),$$

т. е.

$$\varphi^*(z_1, z_2, \lambda) = \overline{\varphi\left(z_2, z_1, \frac{1}{\lambda}\right)}. \tag{213}$$

Комбинируя эти результаты, мы видим, что если функции $x_1(g)$ соответствует функция $\varphi_1(z_1, z_2, \lambda)$, то функции $x(g) = (x_1 \times x_1^*)(g)$ соответствует функция

$$\varphi(z_1, z_2, \lambda) = \iint \varphi_1(z_1, z, \lambda\lambda_1)\overline{\varphi_1(z_2, z, \lambda_1)}\frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{|\lambda_1|^2}\, d\mu(z). \tag{214}$$

Отсюда

$$\int \varphi(z_1, z_1, \lambda)\, d\mu(z_1) =$$
$$= \iiint \varphi_1(z_1, z, \lambda\lambda_1)\overline{\varphi_1(z_1, z, \lambda_1)}\frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{|\lambda_1|^2}\, d\mu(z)\, d\mu(z_1); \tag{215}$$

в частности,

$$\int \varphi(z_1, z_1, 1)\, d\mu(z_1) = \iiint |\varphi_1(z_1, z, \lambda_1)|^2 \frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{|\lambda_1|^2}\, d\mu(z)\, d\mu(z_1). \tag{216}$$

Перейдем от функции φ_1 к ее трансформации Фурье Φ_1 по формуле (120). Тогда равенство (216) можно переписать в виде

$$\int \varphi(z_1, z_1, 1)\, d\mu(z_1) = \iiint |\Phi_1(w_1, w_2, \lambda_1)|^2 \frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{|\lambda_1|^2}\, d\mu(w_1)\, d\mu(w_2), \tag{217}$$

так что интеграл в правой части равенства (217) конечен. Но тогда мы можем перейти в равенстве (215) от функции φ_1 к функции Φ_1. Мы получим

$$\int \varphi(z_1, z_1, \lambda)\, d\mu(z_1) =$$
$$= \iiint \Phi_1(w_1, w, \lambda\lambda_1)\overline{\Phi_1(w_1, w, \lambda_1)}\frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{|\lambda_1|^2}\, d\mu(w_1)\, d\mu(w), \tag{218}$$

причем интеграл сходится абсолютно.

Положим

$$L_1(w_1, w_2, \rho_1) = \int \Phi_1(w_1, w_2, \lambda)\, |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2}. \tag{219}$$

Умножая обе части равенства (218) на $|\lambda|^{-\rho_1}$ и интегрируя по $\frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2}$, мы получаем

$$\int \varphi(z_1, z_1, \lambda)\, |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2}\, d\mu(z_1) =$$
$$= \iint L_1(w_1, w, \rho_1)\overline{L_1(w_1, w, -\rho_1)}\, d\mu(w)\, d\mu(w_1). \tag{220}$$

Найдем связь между $L_1(w_1, w, \rho_1)$ и $L_1(w_1, w, -\rho_1)$. Для этого умножим обе части формулы (124) на $|\lambda|^{-\rho_1}$ и проинтегрируем по $\frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2}$; мы получим

$$L_1(w_1, w_2, -\rho_1) = |w_1|^{-\rho_1}\, |w_2|^{\rho_1} L_1(w_1, w_2, \rho_1). \tag{221}$$

В силу (211) и (221), равенство (220) перепишется в виде

$$\int K(z, z, \rho_1)\, d\mu(z) = \iint |L_1(w_1, w_2, \rho_1)|^2\, |w_1|^{-\rho_1}\, |w_2|^{\rho_1}\, d\mu(w_1)\, d\mu(w_2). \tag{222}$$

Из определения функций K, L_1 и Φ следует, что

$$L_1(w_1, w_2, \rho_1) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint K(z_1, z_2, \rho_1)\, e^{i\,\mathrm{Re}\,(z_1\bar{u}_1 - z_2\bar{u}_2)}\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2). \tag{223}$$

Поэтому функция $L_1(w_1, w_2, \rho_1)$ есть ядро оператора $U_{\rho_1; x_1}$ в пространстве H'_{ρ_1}.

Положим

$$\psi(w) = |w|^{-\frac{\rho_1}{2}} \varphi(w).$$

Тем самым мы изометрически отобразим пространство H_ρ на пространство H всех функций $\psi(w)$ таких, что

$$\int |\psi(w)|^2 d\mu(w) < +\infty.$$

В этом пространстве оператор $U_{\rho_1; x_1}$ имеет ядро

$$\tilde{L}(w_1, w_2, \rho_1) = L(w_1, w_2, \rho_1) |w_1|^{-\frac{\rho_1}{2}} |w_2|^{\frac{\rho_1}{2}} \tag{224}$$

и равенство (222) примет вид

$$\int K(z, z, \rho_1) d\mu(z) = \int\int |\tilde{L}(w_1, w_2, \rho_1)|^2 d\mu(w_1) d\mu(w_2). \tag{225}$$

Это равенство показывает, что $\tilde{L}(w_1, w_2, \rho_1)$ есть ядро Гильберта-Шмидта в пространстве H. Правая, а следовательно, и левая часть равенства (225), является следом оператора $U_{\rho_1; x_1^* x_1}$. Наше утверждение доказано.

Повторяя те же преобразования, что и в п. 2 § 6, мы можем переписать выражение для следа в виде

$$S(U_{\rho_1; x}) = \int x(g) \frac{|\lambda_g|^{\rho_1} + |\lambda_g|^{-\rho_1}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^2} d\mu(g). \tag{226}$$

ТЕОРЕМА 10. *Если $x(g) = (x_1^* \times x_1)(g)$ и $x_1(g) \in R'$, то оператор $U_{\rho_1; x}$ имеет след и этот след определяется формулами* (225) *и* (226).

Из этой теоремы, как и в § 6, непосредственно следуют

ТЕОРЕМА 11. *Для любой суммируемой функции $x(g)$ оператор $U_{\rho_1; x}$, построенный для неприводимого представления дополнительной серии, вполне непрерывен.*

ТЕОРЕМА 12. *Представления дополнительной серии, соответствующие различным ρ_1 из интервала $0 < \rho_1 \leqslant 2$, неэквивалентны между собой и неэквивалентны представлениям основной серии.*

Легко видеть, что для функции $x(g) \in R'$ след $S(U_{\rho_1; x})$ есть непрерывная функция от ρ_1 для всех значений ρ_1 из интервала $0 \leqslant \rho_1 < 2$. При $\rho_1 = 2$ след терпит разрыв, ибо предел выражения (226) при $\rho_1 \to 2$ есть

$$\int x(g) \frac{|\lambda_g|^{-2} + |\lambda_g|^2}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^2} d\mu(g), \tag{227}$$

а при $\rho_1 = 2$, т. е. в случае единичного представления, след равен

$$\int x(g) d\mu(g).$$

Выражение (227) равно

$$\int x(g) d\mu(g) + \int x(g) \frac{|\lambda_g|^2 \bar{\lambda}_g^{-2} + |\lambda_g|^{-2} \bar{\lambda}_g^2}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^2} d\mu(g). \tag{228}$$

Это показывает, что при $\rho_1 \to 2$ представление дополнительной серии в некотором смысле стремится к приводимому представлению, именно

к прямой сумме единичного представления и представления основной серии, соответствующего характеру $\chi(\lambda)=|\lambda|^2\,\overline{\lambda}^{-2}$, т. е. значениям $n=2$, $\rho=0$ (см. примечание на стр. 457).

§ 9. Разложение всякого унитарного представления группы G на представления основной и дополнительной серий

1. Оценка нормы в кольце R. Докажем теперь, что описанные нами представления исчерпывают с точностью до эквивалентности все неприводимые унитарные представления группы G. Более того, докажем, что всякое представление группы G разлагается в прямую сумму представлений, эквивалентных представлениям основной и дополнительной серий.

Оценим, прежде всего, норму $\|x\|=\int|x(g)|\,d\mu(g)$ функции $x(g)$. Для получения этой оценки сделаем следующие замечания.

I. *Пусть функция $f(z_1, z_2)$ непрерывна и имеет суммируемые частные производные по z_1, $\overline{z}_1$, z_2, $\overline{z}_2$ первого порядка. Тогда*

$$\int\int|f(z_1+\zeta_1, z_2+\zeta_2)-f(z_1, z_2)|\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)\leqslant A_1|\zeta_1|+A_2|\zeta_2|, \tag{229}$$

где

$$A_1=\int\int[|f'_{z_1}(z_1, z_2)|+|f'_{\overline{z}_1}(z_1, z_2)|]\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2), \tag{230}$$

$$A_2=\int\int[|f'_{z_2}(z_1, z_2)|+|f'_{\overline{z}_2}(z_1, z_2)|]\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2). \tag{231}$$

Действительно, положим

$$\varphi(t)=f(z_1+t\zeta_1, z_2+t\zeta_2).$$

Тогда левая часть неравенства (229) равна

$$\int\int|\varphi(1)-\varphi(0)|\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)=\int\int\left|\int_0^1\varphi'(t)\,dt\right|d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1\left[\int\int|\varphi'(t)|\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1\Big\{\int\int[|\zeta_1|\,|f'_{z_1}(z_1+t\zeta_1, z_2+t\zeta_2)|+|\zeta_1|\,|f'_{\overline{z}_1}(z_1+t\zeta_1, z_2+t\zeta_2)|+$$

$$+|\zeta_2|\,|f'_{z_2}(z_1+t\zeta_1, z_2+t\zeta_2)|+|\zeta_2|\,|f'_{\overline{z}_2}(z_1+t\zeta_1, z_2+t\zeta_2)|]\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2)\Big\}\,dt.$$

Сделав замену переменных:

$$z_1'=z_1+t\zeta_1,\qquad z_2'=z_2+t\zeta_2,$$

мы получаем, что последнее выражение равно

$$(A_1|\zeta_1|+A_2|\zeta_2|)\int_0^1 dt=A_1|\zeta_1|+A_2|\zeta_2|.$$

II. *Если, кроме того, сама функция $f(z_1, z_2)$ также суммируема, то каково бы ни было ε из интервала $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$,*

$$\iint |f(z_1+\zeta_1, z_2+\zeta_2) - f(z_1, z_2)| \, d\mu(z_1) \, d\mu(z_2) \leqslant \leqslant (A_1+B)|\zeta_1|^\varepsilon + (A_2+B)|\zeta_2|^\varepsilon, \tag{232}$$

где

$$B = 2\iint |f(z_1, z_2)| \, d\mu(z_1) \, d\mu(z_2). \tag{233}$$

Действительно, кроме неравенства (229), мы имеем еще очевидное неравенство:

$$\iint |f(z_1+\zeta_1, z_2+\zeta_2) - f(z_1, z_2)| \, d\mu(z_1) \, d\mu(z_2) \leqslant B.$$

Отсюда

$$\iint |f(z_1+\zeta_1, z_2+\zeta_2) - f(z_1, z_2)| \, d\mu(z_1) \, d\mu(z_2) \leqslant (A_1|\zeta_1| + A_2|\zeta_2|)^\varepsilon B^{1-\varepsilon} \leqslant \leqslant (A_1^\varepsilon|\zeta_1|^\varepsilon + A_2^\varepsilon|\zeta_2|^\varepsilon) B^{1-\varepsilon} \leqslant (A_1+B)|\zeta_1|^\varepsilon + (A_2+B)|\zeta_2|^\varepsilon,$$

ибо при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ и $A > 0$, $B > 0$

$$(A+B)^\varepsilon \leqslant A^\varepsilon + B^\varepsilon, \quad A^\varepsilon B^{1-\varepsilon} \leqslant A+B.$$

Перейдем теперь к нахождению оценки для нормы

$$\|x\| = \int x(g) \, d\mu(g).$$

Предположим, что функция $x(g) \in \mathfrak{H}_G$ и что функции $x(g)$ соответствует функция $\varphi(z_1, z_2, \lambda)$, для которой производная $\varphi_{\lambda\bar\lambda}(z_1, z_2, \lambda)$ существует и непрерывна для всех z_1, z_2, λ.

Положим

$$\psi(z_1, z_2, \lambda) = \varphi_{\lambda\bar\lambda}(z_1, z_2, \lambda) \tag{234}$$

и допустим, что функция $\psi(z_1, z_2, \lambda)$ имеет непрерывные частные производные по z_1, $\bar z_1$, z_2, $\bar z_2$ до третьего порядка включительно; пусть, далее, интеграл

$$\int |\psi(z_1, z_2, \lambda)| \, |\lambda|^k \, d\mu(z_1) \, d\mu(z_2) \, d\mu(\lambda)$$

конечен и аналогичные интегралы, составленные для этих производных функции ψ, также конечны при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 2 \pm \varepsilon$ и каком-либо $\varepsilon > 0$ и < 1.

Из формул п. 1 § 7 следует, что

$$\tilde x(p_1, p_2, p_3) = -a|p_2|^2 \int \psi\left(p_2\nu - p_3, p_1 - \frac{p_2}{\nu}, \nu\right) d\mu(\nu), \quad a = \frac{4}{(2\pi)^3}. \tag{235}$$

Действительно, правая часть (235) равна

$$-\frac{4}{(2\pi)^5}|p_2|^2\Phi''_{\lambda\bar\lambda}(w_1, w_2, \nu)\, e^{-i\mathrm{Re}\left[\bar w_1(p_2\nu - p_3) - \bar w_2\left(p_1 - \frac{p_2}{\nu}\right)\right]} d\mu(w_1)\, d\mu(w_2)\, d\mu(\nu) =$$

$$= -\frac{4}{(2\pi)^3}|p_2|^2 \int X''_{\zeta_2\bar\zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\, e^{i\mathrm{Re}(p_1\zeta_1 - \bar p_2\zeta_2 + \bar p_3\zeta_3)}\, d\mu(\zeta_1)\, d\mu(\zeta_2)\, d\mu(\zeta_3) =$$

$$= \tilde x(p_1, p_2, p_3),$$

откуда следует, что

$$\int |x(g)|\, d\mu(g) = \int |\tilde x(p_1, p_2, p_3)|\, |p_2|^{-6}\, d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3) =$$

$$= a \int \left| \int \psi\left(p_2\nu - p_3, p_1 - \frac{p_2}{\nu}, \nu\right) d\mu(\nu) \right| |p_2|^{-4}\, d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3).$$

Разобьем группу G на множества:

$$G_1: \quad |p_2| \leqslant 1,$$
$$G_2: \quad |p_2| > 1.$$

Тогда

$$\int_{G_2} |x(g)|\, d\mu(g) \leqslant a \int_{G_2} \int |\psi\left(p_2\nu - p_3, p_1 - \frac{p_2}{\nu}, \nu\right)|\, |p_2|^{-4}\, d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3)\, d\mu(\nu) =$$

$$= a \int_{|p_2|>1} \left[\int |\psi(z_1, z_2, \nu)|\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)\, d\mu(\nu)\right] |p_2|^{-4}\, d\mu(p_2) =$$

$$= \pi a \int |\psi(z_1, z_2, \nu)|\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)\, d\mu(\nu).$$

Таким образом,

$$\int_{G_2} |x(g)|\, d\mu(g) \leqslant \pi a \int |\psi(z_1, z_2, \nu)|\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)\, d\mu(\nu). \tag{236}$$

Перейдем теперь к оценке интеграла по G_2. Для этого положим

$$\varphi(t) = \psi\left(p_2\nu t - p_3, p_1 - \frac{p_2}{\nu}t, \nu\right)$$

и применим к функции $\varphi(t)$ тождество

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\, dt.$$

Мы получим

$$\psi\left(p_2\nu t - p_3, p_1 - \frac{p_2}{\nu}t, \nu\right) = \psi(-p_3, p_1, \nu) + \psi'_{z_1}(-p_3, p_1, \nu)\, p_2\nu +$$

$$+ \psi'_{\bar z_1}(-p_3, p_1, \nu)\, \bar p_2 \bar\nu - \psi'_{z_2}(-p_3, p_1, \nu)\, p_2\nu^{-1} - \varphi'_{\bar z_2}(-p_3, p_1, \nu)\, \bar p_2 \bar\nu^{-1} + \Psi, \tag{237}$$

где

$$\Psi = \int_0^1 \varphi''(t)(1-t)\, dt.$$

В силу определения (234) функции ψ,

$$\int \psi(z_1, z_2, \nu)\, \nu^k \, d\mu(\nu) = 0 \quad \text{при } k = 0, \pm 1.$$

Поэтому, интегрируя равенство (237), получаем

$$\int \psi\left(p_2\nu - p_3,\, p_1 - \frac{p_2}{\nu},\, \nu\right) d\mu(\nu) = \int \Psi \, d\mu(\nu) =$$

$$= |p_2|^2 \int_0^1 (1-t) \left\{ \int \left[\frac{p_2^2}{|p_2|^2} \nu^2 \psi''_{z_1 z_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{|p_2|^2} \bar{\nu}^2 \psi''_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} + \frac{p_2^2}{|p_2|^2} \nu^{-2} \psi''_{z_2 z_2} + \right.\right.$$

$$+ \frac{\bar{p}_2^2}{|p_2|^2} \bar{\nu}^{-2} \psi''_{\bar{z}_2 \bar{z}_2} - 2\nu\bar{\nu}^{-1} \psi''_{z_1 \bar{z}_2} - 2\bar{\nu}\nu^{-1} \psi''_{z_1 z_2} - 2 \frac{p_2^2}{|p_2|^2} \psi''_{z_1 z_2} - 2 \frac{\bar{p}_2^2}{|p_2|^2} \psi''_{\bar{z}_1 \bar{z}_2} +$$

$$\left.\left. + 2|\nu|^2 \psi''_{z_1 \bar{z}_1} + 2|\nu|^{-2} \psi''_{z_2 \bar{z}_2} \right] d\mu(\nu) \right\} dt, \tag{238}$$

где значения всех производных под знаком интеграла берутся в точке $\left(p_3\nu t - p_3, p_1 - \frac{p_2}{\nu} t, \nu\right)$. При $p_2 = 0$ внутренний интеграл равен

$$2 \int \left[\psi''_{z_1 \bar{z}_1}(-p_3, p_1, \nu) |\nu|^2 - \psi''_{z_1 \bar{z}_2}(-p_3, p_1, \nu) \nu\bar{\nu}^{-1} - \psi''_{z_1 z_2}(-p_3, p_1, \nu) \bar{\nu}\nu^{-1} + \right.$$

$$\left. + \psi''_{z_2 \bar{z}_2}(-p_3, p_1, \nu) |\nu|^{-2} \right] d\mu(\nu).$$

Будем в дальнейшем предполагать, что функция $\psi(z_1, z_2, \nu)$ удовлетворяет условию*

$$\int \left[\psi''_{z_1 \bar{z}_1}(z_1, z_2, \nu) |\nu|^2 - \psi''_{z_1, \bar{z}_2}(z_1, z_2, \nu) \nu\bar{\nu}^{-1} - \psi''_{\bar{z}_1 z_2}(z_1, z_2, \nu) \bar{\nu}\nu^{-1} + \right.$$

$$\left. + \psi''_{z_2 \bar{z}_2}(z_1, z_2, \nu) |\nu|^{-2} \right] d\mu(\nu) = 0 \tag{239}$$

для всех z_1, z_2. Тогда внутренний интеграл в (238) обращается в нуль при $p_2 = 0$ и поэтому не изменит своей величины, если мы из каждой производной функции ψ в точке $\left(p_2\nu t - p_3,\, p_1 - \frac{p_2}{\nu},\, \nu\right)$ вычтем значение этой производной в точке $(-p_3, p_1, \nu)$.

Рассмотрим, например, интеграл

$$\int \left[\psi''_{z_1 z_1}\left(p_2\nu t - p_3,\, p_1 - \frac{p_2}{\nu} t,\, \nu\right) - \psi''_{z_1 z_1}(-p_3, p_1, \nu) \right] d\mu(p_1)\, d\mu(p_3).$$

Применяя к нему неравенство (232), мы получим, что он по модулю не превосходит

$$(A_1 + B) |p_2 \nu t|^{\varepsilon} + (A_2 + B) \left|\frac{p_2}{\nu} t\right|^{\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant t \left[(A_1 + B) |\nu|^{\varepsilon} + (A_2 + B) |\nu|^{-\varepsilon} \right] |p_2|^{\varepsilon},$$

---

* Из дальнейших рассуждений следует, что при выполнении всех прочих условий, наложенных на функцию $\psi(z_1, z_2, \nu)$, условие (239) является необходимым для суммируемости функции $x(g)$.

где

$$A_1 = \int \left\{ |\psi'''_{z_1 z_1 z_1}(z_1, z_2, \nu)| + |\psi'''_{z_1 z_1 \bar{z}_1}(z_1, z_2, \nu)| \right\} d\mu(z_1)\, d\mu(z_2),$$

$$A_2 = \int \left\{ |\psi'''_{z_1 z_1 z_2}(z_1, z_2, \nu)| + |\psi'''_{z_1 z_1 \bar{z}_2}(z_1, z_2, \nu)| \right\} d\mu(z_1)\, d\mu(z_2),$$

$$B = 2 \int |\psi''_{z_1 z_1}(z_1, z_2, \nu)|\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2).$$

Применяя такую оценку к каждой из подинтегральных функций в (238), мы получаем, что

$$|p_2|^{-4} \int \left| \int \psi\left(p_2\nu - p_3, p_1 - \frac{p_2}{\nu}, \nu\right) d\mu(\nu) \right| d\mu(p_1)\, d\mu(p_3) \leqslant$$

$$\leqslant |p_2|^{-2+\varepsilon} C' \int_0^1 t(1-t)\, dt = C\, |p_2|^{-2+\varepsilon},$$

где $C = \frac{1}{6} C'$, C' — сумма интегралов вида

$$\int |\hat{\psi}(z_1, z_2, \nu)|\, |\nu|^k\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)\, d\mu(\nu), \qquad (240)$$

k — одно из чисел $\pm\varepsilon$, $\pm 2 \pm \varepsilon$, $\hat{\psi}$ — производная второго или третьего порядка функции ψ по z_1, $\bar{z}_1$, z_2, $\bar{z}_2$. Интегрируя это неравенство по p_2, найдем

$$\int_{G_1} |x(g)|\, d\mu(g) \leqslant aC \int_{|p_2|<1} |p_2|^{-2+\varepsilon}\, d\mu(p_2) = 2\pi a C \int_0^1 r^{-1+\varepsilon}\, dr = \frac{2\pi a C}{\varepsilon}.$$

Складывая это неравенство с неравенством (236), получаем

$$\int |x(g)|\, d\mu(g) \leqslant \pi a \left(C_1 + \frac{2C}{\varepsilon} \right), \qquad (241)$$

где

$$C_1 = \int |\psi(z_1, z_2, \nu)|\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)\, d\mu(\nu). \qquad (242)$$

Константа C не превышает другой константы C_2, равной сумме всех интегралов вида (240), в которых $k=0$, $k = 2+\varepsilon$, $k = -2-\varepsilon$. Поэтому окончательно

$$\int |x(g)|\, d\mu(g) \leqslant \pi a \left(C_1 + \frac{2C_2}{\varepsilon} \right). \qquad (243)$$

В дальнейшем нам понадобится оценка для $\int |x(g)|\, d\mu(g)$ не через функцию $\varphi(z_1, z_2, \lambda)$, а через ее трансформацию Фурье $\Phi(w_1, w_2, \lambda)$ по z_1 и z_2.

Пусть

$$I = \int (1 + |z_1|^4 |z_2|^4 |\nu|^{2+\varepsilon})\, |\psi(z_1, z_2, \nu)|^2\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)\, d\mu(\nu) < +\infty \qquad (244)$$

и

$$I' = \int (1 + |z_1|^4 |z_2|^4 |\nu|^{2+k+\varepsilon}) |\hat{\varphi}(z_1, z_2, \nu)|^2 |\nu|^k \, d\mu(\nu) \, d\mu(z_1) \, d\mu(z_2) < +\infty, \tag{245}$$

где функция $\hat{\varphi}$ определена так же, как и выше, а $k = 0, 2+\varepsilon, \quad 2 \quad \varepsilon$.

По неравенству Шварца,

$$\left[\int |\varphi(z_1, z_2, \nu)| \, d\mu(z_1) \, d\mu(z_2) \, d\mu(\nu) \right]^2 \leqslant C_0 I,$$

где

$$C_0 = \int \frac{d\mu(z_1) \, d\mu(z_2) \, d\mu(\nu)}{(1 + |z_1|^4 |z_2|^4 |\nu|^{2+\varepsilon})}.$$

Аналогичную оценку мы получаем для интегралов вида (240). Поэтому

$$\int |x(g)| \, d\mu(g) = A(I^{\frac{1}{2}} + \sum I'^{\frac{1}{2}}) \varepsilon^{-2}, \tag{246}$$

где A — некоторая константа.

Переходя к функции $\Phi(w_1, w_2, \lambda)$, мы получаем, что

$$I = \int [|\Phi''_{\lambda\bar{\lambda}}(w_1, w_2, \lambda)|^2 + |\lambda|^{2+\varepsilon} |\Delta_{w_1}\Delta_{w_2}\Phi''_{\lambda\lambda}(w_1, w_2, \lambda)|^2] \, d\mu(w_1) \, d\mu(w_2) \, d\mu(\lambda), \tag{247}$$

$$I' = \int [|\Phi''_{\lambda\lambda}(w_1, w_2, \lambda) w_1^{\alpha_1} \bar{w}_1^{\beta_1} w_2^{\alpha_2} \bar{w}_2^{\beta_2}|^2 |\lambda|^k +$$
$$+ |\Delta_{w_1}\Delta_{w_2}(\Phi''_{\lambda\bar{\lambda}}(w_1, w_2, \lambda) w_1^{\alpha_1} \bar{w}_1^{\beta_1} w_2^{\alpha_2} \bar{w}_2^{\beta_2})|^2 |\lambda|^{2k+2+\varepsilon}] \, d\mu(w_1) \, d\mu(w_2) \, d\mu(\lambda), \tag{248}$$

где Δ_{w_1}, Δ_{w_2} — операторы Лапласа по w_1, w_2 соответственно, а α_1, β_1, α_2, β_2 — неотрицательные целые числа такие, что

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 2 \text{ или } 3.$$

2. Функции $\tilde{X}$ и $\tilde{\Phi}$ в случае четной функции Φ. Предположим, что функция Φ (п. 1 § 7) — четная функция от λ, т. е.

$$\Phi(w_1, w_2, -\lambda) = \Phi(w_1, w_2, \lambda).$$

Очевидно, это эквивалентно тому, что X есть четная функция от ζ_2:

$$X(\zeta_1, -\zeta_2, \zeta_3) = X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3).$$

Положим

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda) = \Phi\left(w_1, w_2, \lambda \sqrt{\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1}}\right).$$

Так как Φ — четная функция от λ, то выбор значения функции $\sqrt{\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1}}$ не играет роли.

Функция $\tilde{\Phi}$ будет, очевидно, также четной функцией от λ. Кроме того, из условия (124) следует, что

$$\tilde{\Phi}\left(w_1, w_2, \frac{1}{\lambda}\right) = \Phi\left(w_1, w_2, \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}}\right) =$$

$$= \Phi\left(w_1, w_2, \frac{\overline{w}_2}{w_1}\lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_1}{\overline{w}_2}}\right) = \Phi\left(w_1, w_2, \lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}}\right),$$

т. е.

$$\tilde{\Phi}\left(w_1, w_2, \frac{1}{\lambda}\right) = \tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda). \tag{249}$$

Обратно, пусть функция Φ есть четная функция от λ, удовлетворяющая соотношению (249). Полагая

$$\Phi(w_1, w_2, \lambda) = \tilde{\Phi}\left(w_1, w_2, \lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_1}{\overline{w}_2}}\right), \tag{250}$$

мы получим функцию Φ, четную относительно λ и удовлетворяющую условию (124).

Переходу от Φ к $\tilde{\Phi}$ соответствует переход от ядра $L(w_1, w_2, n, \rho)$ (ср. § 7) к ядру

$$\tilde{L}(w_1, w_2, n, \rho) = \int \tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda)\, |\lambda|^{n+i\rho}\lambda^{-n}\, \frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2}, \tag{251}$$

причем из равенства (249) следует, что

$$\tilde{L}(w_1, w_2, -n, -\rho) = L(\tilde{w}_1, w_2, n, \rho). \tag{252}$$

Легко найти связь между L и $\tilde{L}$. Для этого заметим, прежде всего, что L и $\tilde{L}$ обращаются в нуль при n нечетном. Это следует из того, что Φ и $\tilde{\Phi}$ — четные функции от λ.

Подставляя в (126) $\lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}}$ вместо λ, получим

$$L(w_1, w_2, n, \rho) =$$

$$= \int \Phi\left(w_1, w_2, \lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}}\right) |\lambda|^{n+i\rho}\lambda^{-n} \left|\frac{w_2}{w_1}\right|^{\frac{n+i\rho}{2}} \left(\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2} =$$

$$= \left|\frac{w_2}{w_1}\right|^{\frac{n+i\rho}{2}} \left(\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}\right)^{-\frac{n}{2}} \int \tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda)\, |\lambda|^{n+i\rho}\lambda^{-n} \frac{d\sigma\, d\tau}{|\lambda|^2},$$

т. е.

$$L(w_1, w_2, n, \rho) = \left|\frac{w_2}{w_1}\right|^{\frac{n+i\rho}{2}} \left(\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}\right)^{-\frac{n}{2}} \tilde{L}(w_1, w_2, n, \rho). \tag{253}$$

Положим теперь

$$\tilde{X}(\zeta_1, \nu, \zeta_3) = X(\zeta_1, \sqrt{\overline{\zeta}_1\zeta_3}\,\overline{\nu}, \zeta_3). \tag{254}$$

Так как X — четная функция переменного ζ_2, то выбор значения функции $\sqrt{\zeta_1\zeta_3}$ не играет роли. Кроме того, очевидно, что $\tilde{X}$ есть четная функция переменного ν.

Обратно, по функции $\tilde{X}$, четной относительно ν, мы можем построить функцию X, четную относительно ζ_2, полагая

$$X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \tilde{X}\left(\zeta_1, \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta_1\zeta_3}}, \zeta_3\right). \tag{255}$$

Функции $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{X}$ связаны простым соотношением, которое легко получается из (123). Именно, подставим туда $\lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}}$ вместо λ; мы получим

$$\frac{1}{2\pi}\Phi\left(w_1, w_2, \lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}}\right) = X\left(w_2, \sqrt{\overline{w_1 w_2}}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), w_1\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda) = \tilde{X}\left(w_2, \lambda + \frac{1}{\lambda}, w_1\right). \tag{256}$$

3. Функции $\tilde{X}$ и $\tilde{\Phi}$ в случае нечетной функции Φ. Пусть теперь Φ — нечетная функция от λ, т. е.

$$\Phi(w_1, w_2, -\lambda) = -\Phi(w_1, w_2, \lambda).$$

Очевидно, это эквивалентно тому, что X есть нечетная функция от ζ_2, а следовательно, $\tilde{x}$ есть нечетная функция от p_2.

Положим

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda) = \left|\frac{w_1}{w_2}\right|^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}\right)^{\frac{1}{2}}\Phi\left(w_1, w_2, \lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}}\right). \tag{257}$$

Так как Φ — нечетная функция от λ, то выбор значения $\sqrt{\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}}$ не играет роли.

Функция $\tilde{\Phi}$ будет, очевидно, также нечетной функцией от λ. Кроме того, из условия (124) следует, что

$$\tilde{\Phi}\left(w_1, w_2, \frac{1}{\lambda}\right) = \left|\frac{w_1}{w_2}\right|^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}\right)^{\frac{1}{2}}\Phi\left(w_1, w_2, \lambda^{-1}\sqrt{\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}}\right) =$$

$$= \left|\frac{w_1}{w_2}\right|^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}\right)^{\frac{1}{2}}\Phi\left(w_1, w_2, \frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}\lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_1}{\overline{w}_2}}\right),$$

т. е.

$$\tilde{\Phi}\left(w_1, w_2, \frac{1}{\lambda}\right) = \tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda). \tag{258}$$

Обратно, пусть $\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda)$ — нечетная функция от λ, удовлетворяющая соотношению (258). Полагая

$$\Phi(w_1, w_2, \lambda) = \left|\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1}\right|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_2}\right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\Phi}\left(w_1, w_2, \lambda \sqrt{\frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_2}}\right), \tag{259}$$

мы получим функцию Φ, нечетную относительно λ и удовлетворяющую условию (124).

Переходу от Φ к $\tilde{\Phi}$ соответствует переход от ядра $L(w_1, w_2, n, \rho)$ к ядру $\tilde{L}(w_1, w_2, n, \rho)$, определенному равенством (251), причем, как и в п. 2, имеет место соотношение (252). Повторяя соответствующие рассуждения п. 2, находим, что

$$L(w_1, w_2, n, \rho) = \tilde{L}(w_1, w_2, n, \rho)\left|\frac{w_2}{w_1}\right|^{\frac{n-1+i\rho}{2}} \left(\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1}\right)^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{260}$$

Заметим, что в этом случае функции L и $\tilde{L}$ обращаются в нуль при четном n.

Положим теперь

$$\tilde{X}(\zeta_1, \mu, \zeta_3) = \left|\frac{\zeta_1}{\zeta_3}\right|^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\bar{\zeta}_3}{\bar{\zeta}_1}}\, X\left(\zeta_1, \zeta_1 \sqrt{\frac{\bar{\zeta}_3}{\bar{\zeta}_1}}\,\bar{\mu}, \zeta_3\right). \tag{261}$$

Тогда из (123) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda) = \tilde{X}\left(w_2, \lambda + \frac{1}{\lambda}, w_1\right). \tag{262}$$

Если теперь X, а следовательно Φ, произвольны, то, разлагая их на сумму четной и нечетной функции от ν и λ соответственно, мы можем определить функции $\tilde{X}$ и $\tilde{\Phi}$, как сумму функций $\tilde{X}$ и $\tilde{\Phi}$, соответствующих этим слагаемым. Очевидно, для них также имеют место соотношения (258) и (262).

4. Вырожденные функции $\tilde{X}$ и $\tilde{\Phi}$. Рассмотрим, в частности, функции $\tilde{X}$ и $\tilde{\Phi}$ вида

$$\tilde{X}(\zeta_1, \nu, \zeta_3) = X_1(\zeta_1)\, X_2(\nu)\, X_3(\zeta_3), \tag{263}$$

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda) = \Phi(w_1)\, \Psi(w_2)\, \omega(\lambda). \tag{264}$$

В силу (258) и (262),

$$\Phi(w_1) = X_3(w_1), \quad \Psi(w_2) = X_1(w_2), \quad \frac{1}{2\pi}\omega(\lambda) = X_2\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

и

$$\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \omega(\lambda). \tag{265}$$

Функции $\tilde{X}$ и $\tilde{\Phi}$ вида (263) и (264) будем называть вырожденными. Вырожденной функции $\tilde{\Phi}$ отвечает функция

$$\Phi(w_1, w_2, \lambda) = \Phi(w_1)\, \Psi(w_2)\, \omega\left(\lambda \sqrt{\frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_2}}\right) \tag{266}$$

в случае четной функции $\omega(\lambda)$ и функция

$$\Phi(w_1, w_2, \lambda), \left|\frac{w_2}{w_1}\right|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\overline{w}_1}{\overline{w}_2}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi(w_1)\Psi(w_2)\,\omega\left(\lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_1}{\overline{w}_2}}\right) \tag{267}$$

в случае нечетной функции $\omega(\lambda)$.

Обозначим через $\|\Phi\|_1^2$ правую часть неравенства (246), и перенесем на функции $\widetilde{\Phi}$ норму $\|\Phi\|_1$. Эту норму обозначим через $\|\widetilde{\Phi}\|_1$.

Обозначим через F совокупность всех вырожденных функций $\widetilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1°. Функция $\Phi(w_1) = 0$ вне области вида $0 < \varepsilon_1 \leqslant |w_1| \leqslant C_1$ и имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно.

2°. Функция $\Psi(w_2) = 0$ вне области вида $0 < \varepsilon_2 \leqslant |w_2| \leqslant C_2$ и имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно.

3°. Функция $\omega(\lambda) = 0$ вне области вида $0 < \varepsilon \leqslant |\lambda| \leqslant C$ и имеет непрерывные производные до восьмого порядка включительно.

4°. $\int \omega(\lambda)\,|\lambda - \lambda^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} = 0.$

Каждой функции $\widetilde{\Phi}$ из F отвечает функция $x(g) \in \mathfrak{H}_G$. Эта функция $x(g)$ суммируема. Действительно, из условий 1°, 2°, 3° следует, что норма $\|\widetilde{\Phi}\|_1$ конечна; согласно результатам п. 1, достаточно поэтому доказать, что соответствующая функция $\psi(z_1, z_2, \lambda) = \varphi''_{\lambda\overline{\lambda}}(z_1, z_2, \lambda)$ удовлетворяет условию (239) п. 1.

По определению функции $\Phi(w_1, w_2, \lambda)$,

$$\varphi(z_1, z_2, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Phi(w_1, w_2, \lambda)\, e^{-i\operatorname{Re}(z_1\overline{w}_1 - z_2 \overline{w}_2)}\, d\mu(w_1)\, d\mu(w_2);$$

поэтому условие (239) означает, что

$$\int \Phi''_{\lambda\overline{\lambda}}(w_1, w_2, \lambda)\,|w_1\overline{\lambda} + w_2\overline{\lambda}^{-1}|^2\, d\mu(\lambda) = 0. \tag{268}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \Phi(w_1, w_2, \lambda)\,|w_1\overline{\lambda} - w_2\overline{\lambda}^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} = 0. \tag{269}$$

Если $\widetilde{\Phi} \in F$ и $\omega(\lambda)$ — четная функция, то левая часть (269) принимает вид

$$\int \Phi(w_1)\Psi(w_2)\,\omega\left(\lambda\sqrt{\frac{\overline{w}_1}{\overline{w}_2}}\right)|w_1\overline{\lambda} - w\overline{\lambda}^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} =$$
$$= \Phi(w_1)\Psi(w_2)\,|w_1 w_2| \int \omega(\lambda)\,|\lambda - \lambda^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}.$$

Это последнее выражение равно нулю в силу условия 4°.

Аналогично докажем, что условие (239) выполнено и в случае нечетной функции $\omega(\lambda)$.

Итак, каждой функции $\tilde{\Phi}$ из F отвечает суммируемая функция $x(g)$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ совокупность всех таких функций.

ЛЕММА 1. *Пусть $\mathfrak{E}$ — полное нормированное пространство Банаха и пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — конечное число аддитивных и дистрибутивных функционалов, определенных на некотором линейном многообразии L, плотном в $\mathfrak{E}$. Если никакая линейная комбинация этих функционалов, за исключением тождественного нуля, не является ограниченным функционалом в $\mathfrak{E}$, то совокупность L' всех элементов x из L, удовлетворяющих условиям*

$$f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0, \tag{270}$$

также плотна в $\mathfrak{E}$.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что никакая линейная комбинация этих функционалов, отличная от тождественного нуля, не обращается тождественно в нуль на L. В противном случае можно было бы отбросить такие линейные комбинации и уменьшить число рассматриваемых функционалов, заменяя их некоторыми их линейными комбинациями. Поэтому можно выбрать в L систему элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, что

$$f_i(x_k) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k \\ 1 \text{ при } i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Всякий элемент x из L можно представить в виде

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + y,$$

где $y \in L'$ и $\lambda_i = f_i(x)$.

Пусть L' неплотно в $\mathfrak{E}$. Тогда существует ограниченный функционал $f_0(x) \not\equiv 0$ такой, что $f_0(y) = 0$ для всех $y \in L'$. При этом не может быть $f_0(x) = 0$ для всех $x \in L$, ибо L плотно в $\mathfrak{E}$.

Условие $f_0(x) = 0$ определяет в n-мерном пространстве всех линейных комбинаций $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ подпространство размерности $n-1$. Заменяя $x_1, \ldots, x_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ некоторыми их линейными комбинациями, мы можем добиться того, что это подпространство будет состоять из всех линейных комбинаций вида $\lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$. Тогда $f_0(x_1) \neq 0$ и мы можем пронормировать $f_0(x)$ так, чтобы $f_0(x_1) = 1$. Таким образом,

$$f_0(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + y) = \lambda_1,$$
$$f_1(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + y) = \lambda_1,$$

и, следовательно, $f_1(x) = f_0(x)$ на L. Это противоречит тому, что $f_1(x)$ — неограниченный функционал на L, ибо функционал $f_0(x)$ ограничен.

ЛЕММА 2. *Пусть U_g — унитарное представление группы G и пусть*

$$\int x(g) U_g \, d\mu(g) = 0 \tag{271}$$

для всех функций $x(g)$ из $\mathfrak{A}$. Тогда U_g есть единичное представление, т. е. $U_g \equiv E$.

Доказательство. Линейными комбинациями функций $\tilde{\Phi}$ из F можно аппроксимировать в смысле нормы $\|\tilde{\Phi}\|_1$ любую функцию $\tilde{\Phi}_0(w_1, w_2, \lambda)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1*. Функция $\tilde{\Phi}_0(w_1, w_2, \lambda)$ обращается в нуль вне множества вида

$$0 < \varepsilon_1 \leqslant |w_1| \leqslant C_1, \quad 0 < \varepsilon_2 \leqslant |w_2| \leqslant C_2, \quad 0 < \varepsilon \leqslant |\lambda| \leqslant C \tag{272}$$

и имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по w_1, $\bar{w}_1$, w_2, $\bar{w}_2$ и до шестого включительно по λ, $\bar{\lambda}$.

2* $\int \tilde{\Phi}_0(w_1, w_2, \lambda) |\lambda - \lambda^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} = 0.$

Действительно, можно выбрать последовательность

$$\tilde{\Phi}^{(m)} = \sum_k \Phi_k^{(m)}(w_1) \Psi_k^{(m)}(w_2) \omega_k^{(m)}(\lambda)$$

линейных комбинаций вырожденных функций $\tilde{\Phi}$, удовлетворяющих условиям 1°, 2°, 3° (стр. 470) таким образом, чтобы эта последовательность сходилась равномерно в области, определяемой неравенствами (272), к функции $\tilde{\Phi}_0$.

Пусть $\omega_0(\lambda)$ — фиксированная функция, удовлетворяющая условию 3° и такая, что

$$\int \omega_0(\lambda) |\lambda - \lambda^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} = 1.$$

Положим

$$\tilde{\Phi}_1^{(m)} = \sum_k \Phi_k^{(m)}(w_1) \Psi_k^{(m)}(w_2) \omega_{k,1}^{(m)}(\lambda), \tag{273}$$

где

$$\omega_{1,k}^{(m)}(\lambda) = \omega_k^{(m)}(\lambda) - \omega_0(\lambda) \int \omega_k^{(m)}(\lambda) |\lambda - \lambda^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}.$$

Последовательность $\tilde{\Phi}_1^{(m)}$ является уже линейной комбинацией функций из F и также сходится равномерно вместе с соответствующими производными в области (272) к функции $\tilde{\Phi}_0$.

Действительно, интеграл

$$\int \tilde{\Phi}^{(m)}(w_1, w_2, \lambda) |\lambda - \lambda^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}$$

и его производные рассматриваемых порядков стремятся к нулю равномерно относительно w_1, w_2. Следовательно, выражение

$$\omega_0(\lambda)\int \tilde{\Phi}^{(m)}(w_1, w_2, \lambda)\,|\lambda-\lambda^{-1}|^2\frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}$$

и его производные рассматриваемых порядков стремятся к нулю равномерно относительно w_1, w_2, λ. Поэтому последовательность $\Phi_1^{(m)}$ сходится также к $\tilde{\Phi}_0$ в смысле нормы $\|\tilde{\Phi}\|_1$.

Функции $\tilde{\Phi}_0$ отвечает суммируемая функция $x_0(g)$. Совокупность всех этих функций $x_0(g)$ обозначим через $\mathfrak{A}_0$.

Из только что доказанного и из оценки (246) п. 1 следует, что эту функцию можно аппроксимировать в смысле нормы $\|x\|$ линейными комбинациями функций из $\mathfrak{A}$. Поэтому равенство (271) справедливо также для функций $x_0(g)$ из $\mathfrak{A}_0$.

Обозначим через $\mathfrak{X}$ совокупность всех функций X, удовлетворяющих следующим условиям:

1** Функция $X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ обращается в нуль вне множеств вида

$$0<\varepsilon_1\leqslant|\zeta_1|\leqslant C_1,\quad 0<\varepsilon_3\leqslant|\zeta_3|\leqslant C_3,\quad |\zeta_2|\leqslant C_2$$

и имеет непрерывные производные до второго порядка включительно по ζ_1, $\bar{\zeta}_1$, ζ_3, $\bar{\zeta}_3$ и до шестого порядка включительно по ζ_2, $\bar{\zeta}_2$.

2** $\int X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\,d\mu(\zeta_2)=0.$

Каждой такой функции X отвечает функция $\tilde{\Phi}$, удовлетворяющая условиям 1*, 2*, следовательно, функция $x(g)$ из $\mathfrak{A}_0$.

Действительно, как легко видеть, условия 2** и 2* эквивалентны.

Положим, в частности,

$$X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)=X_1(\zeta_1)\,X_2(\zeta_2)\,X_3(\zeta_3), \tag{274}$$

где функции $X_1(\zeta_1)$, $X_3(\zeta_3)$ обращаются в нуль вне множеств вида

$$0<\varepsilon_1\leqslant|\zeta_1|\leqslant C_1,\quad 0<\varepsilon_3\leqslant|\zeta_3|\leqslant C_3$$

и имеют непрерывные производные до второго порядка включительно, а функция $X_2(\zeta_2)$ обращается в нуль вне множества вида $|\zeta_2|\leqslant C_2$, удовлетворяет условию

$$\int X_2(\zeta_2)\,d\mu(\zeta_2)=0 \tag{275}$$

и имеет непрерывные производные до шестого порядка включительно.

Совокупность всех таких функций X_1, X_2, X_3 обозначим соответственно через $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$.

При выполнении этих условий функция X, определенная равенством (274), принадлежит $\mathfrak{X}$, следовательно, для соответствующих функций $x(g)=\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)$ выполняется равенство (271).

Положим

$$y(p_1, p_2, p_3)=\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)\,|p_2|^{-4}.$$

Функция $y(p_1, p_2, p_3)$ есть трансформация Фурье функции X, поэтому она имеет вид

$$y(p_1, p_2, p_3)=y_1(p_1)\,y_2(p_2)\,y_3(p_3), \tag{276}$$

где

$$y_1(p_1) = \frac{1}{2\pi}\int X_1(\zeta_1)\, e^{i\mathrm{Re}\,(\bar{p}_1\zeta_1)}\, d\mu(\zeta_1), \tag{277}$$

$$y_2(p_2) = \frac{1}{2\pi}\int X_2(\zeta_2)\, e^{-i\mathrm{Re}\,(\bar{p}_2\zeta_2)}\, d\mu(\zeta_2), \tag{278}$$

$$y_3(p_3) = \frac{1}{2\pi}\int X_3(\zeta_3)\, e^{i\mathrm{Re}\,\bar{p}_3\zeta_3)}\, d\mu(\zeta_3). \tag{279}$$

Кроме того,

$$\|x\| = \int |x(g)|\, d\mu(g) = \int |\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)|\, |p_2|^{-6}\, d\mu(p_1)\, d\mu(p_2)\, d\mu(p_3) =$$

$$= \int |y_1(p_1)|\, d\mu(p_1) \cdot \int |p_2|^{-2}\, |y_2(p_2)|\, d\mu(p_2) \cdot \int |y_3(p_3)|\, d\mu(p_2). \tag{280}$$

Обозначим через Y, Y_1, Y_2, Y_3 совокупности функций y, y_1, y_2, y_3, определенных формулами (276), (277), (278), (279), при помощи функций X_1, X_2, X_3 из $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ соответственно.

Обозначим, далее, через $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$, $\tilde{Y}_3$ замыкания множеств Y_1, Y_2, Y_3 в смысле норм

$$\|y_1\|_1 = \int |y_1(p_1)|\, d\mu(p_1), \qquad \|y_3\|_1 = \int |y_3(p_3)|\, d\mu(p_3),$$

$$\|y_2\|_2 = \int |y_2(p_2)|\, |p_2|^{-2}\, d\mu(p_2)$$

соответственно.

Пусть $\tilde{Y}$ — совокупность всех функций вида (276), где $y_1 \in \tilde{Y}_1$, $y_2 \in \tilde{Y}_2$, $y_3 \in \tilde{Y}_3$. Каждая функция из $\tilde{Y}$ является пределом в смысле нормы $\|x\|$ последовательности функций из Y. Поэтому равенство (271) выполняется для всех функций

$$x(g) = \tilde{x}(p_1, p_2, p_3) = y(p_1, p_2, p_3)\, |p_2|^4,$$

где $y \in \tilde{Y}$.

Найдем замыкания $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$, $\tilde{Y}_3$. Для нахождения $\tilde{Y}_1$ воспользуемся очевидной оценкой

$$\|y_1\|_1^2 \leqslant C \int (1 + |p_1|^4)\, |y_1(p_1)|^2\, d\mu(p_1) = C\, \|X_1\|_1^2, \tag{281}$$

где

$$C = \int \frac{d\mu(p_1)}{1 + |p_1|^4}, \qquad \|X_1\|_1^2 = \int [|X_1(\zeta_1)|^2 + |\Delta_{\zeta_1} X_1(\zeta_1)|^2]\, d\mu(\zeta_1). \tag{282}$$

Функциями $X_1(\zeta_1)$ из $\mathfrak{X}_1$ можно аппроксимировать в смысле равномерной сходимости функций и их производных до второго порядка включительно, а следовательно, и в смысле нормы $\|X_1\|_1$, любую функцию $X_1(\zeta_1)$, удовлетворяющую следующим условиям:

a) Функция $X_1(\zeta_1)$ обращается в нуль вне множества вида $|\zeta_1| \leqslant C_1$ и имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

b) Функция X_1 и ее производные до второго порядка включительно обращаются в нуль при $\zeta_1 = 0$.

Поэтому $\widetilde{Y}_1$ содержит все функции y_1, которые являются трансформациями Фурье функций X_1, удовлетворяющих условиям a) и b).

Обозначим через L_1 совокупность всех функций $y_1(p)$ с конечной нормой $\|y_1\|_1$.

Совокупность L_1' всех функций $y_1(p_1)$ с конечной нормой

$$\int (1+|p_1|^4)|y_1(p_1)|^2 d\mu(p_1)$$

плотна в смысле нормы $\|y_1\|_1$.

Далее, совокупность $\mathfrak{X}_1^{(a)}$ всех функций X_1, удовлетворяющих только условию a), плотна в совокупности всех функций X_1 с конечной нормой $\|X\|_1^1$.

Из оценки (281) следует, что совокупность $Y_1^{(a)}$ соответствующих функций $y_1(p_1)$ плотна в L_1', а следовательно, и в L_1 в смысле нормы $\|y_1\|_1$.

Условие b) означает, что

$$\int y_1(p_1)\, p_1^{\alpha} \bar{p}_1^{\beta}\, d\mu(p_1) = 0 \tag{283}$$

для любых неотрицательных чисел α, β, удовлетворяющих условию $\alpha+\beta \leqslant 2$. Но при $\alpha+\beta > 0$ левая часть условия (283) представляет собой неограниченный функционал в L_1, причем никакая линейная комбинация этих функционалов, отличная от тождественного нуля, не может быть ограниченным функционалом в L_1.

Согласно лемме 1, совокупность $Y_1^{(b)}$ всех функций из $Y_1^{(a)}$, удовлетворяющих условию (283) при $0 < \alpha+\beta \leqslant 2$, также плотна в L_1. Остается только условие (283) при $\alpha=\beta=0$, т. е. условие

$$\int y_1(p_1)\, d\mu(p_1) = 0. \tag{284}$$

Таким образом, $\widetilde{Y}_1$ содержит все функции из $Y_1^{(b)}$, удовлетворяющие условию (284).

Так как $Y_1^{(b)}$ плотно в L_1, то замыкание по норме $\|y_1\|_1$ дает совокупность всех функций y_1 с конечной нормой $\|y_1\|_1$, удовлетворяющих условию (284).

Действительно, пусть y_1 — произвольная функция из L_1, удовлетворяющая условию (284). Тогда существует последовательность $y_1^{(n)} \in Y_1^{(b)}$ такая, что

$$\|y_1 - y_1^{(n)}\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда

$$\int y_1^{(n)}(p_1)\, d\mu(p_1) \to \int y_1(p_1)\, d\mu(p_1) = 0. \tag{285}$$

Пусть $y_1^{(0)}(p_1)$ — фиксированная функция из $Y_1^{(b)}$ такая, что

$$\int y_1^{(0)}(p_1)\, d\mu(p_1) = 1.$$

Положим

$$\tilde{y}_1^{(n)}(p_1) = y_1^{(n)}(p_1) - y_1^{(0)}(p_1) \int y_1^{(n)}(p_1)\, d\mu(p_1).$$

В силу (285), последовательность функций $\tilde{y}_1^{(n)}(p_1)$ также сходится к $y_1(p_1)$ в смысле нормы $\| y_1 \|_1$ и $\tilde{y}_1^{(n)}(p_1) \in \tilde{Y}_1$. Следовательно, и $y_1(p_1) \in \tilde{Y}_1$.

Итак, $\tilde{Y}_1$ *состоит из всех функций* $y_1(p_1)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\int |y_1(p_1)|\, d\mu(p_1) < +\infty, \qquad \int y_1(p_1)\, d\mu(p_1) = 0. \tag{286}$$

Аналогичное обстоятельство имеет, очевидно, место и для $\tilde{Y}_3$.

Рассмотрим теперь $\tilde{Y}_2$. Оценим сначала норму

$$\| y_2 \|_2 = \int | y_2(p_2) |\, | p_2 |^{-2}\, d\mu(p_2).$$

Очевидно,

$$\| y_2 \|_2^2 \leqslant C \int | y_2(p_2) |^2\, | p_2 |^{-4} (1 + | p_2 |^4)\, d\mu(p_2), \tag{287}$$

где

$$C = \int \frac{d\mu(p_2)}{1 + | p_2 |^4}.$$

Далее,

$$\int\limits_{|p_2| \geqslant 1} | y_2(p_2) |^2\, | p_2 |^{-4}\, d\mu(p_2) \leqslant \int | y_2(p_2) |^2\, d\mu(p_2). \tag{288}$$

Оценим интеграл

$$\int\limits_{|p_2| \leqslant 1} | y_2(p_2) |^2\, | p_2 |^{-4}\, d\mu(p_2).$$

Пусть, кроме условия $y_2(0) = 0$, выполнены еще условия

$$y'_{2, p_2}(0) = y'_{2, \bar{p}_2}(0) = 0.$$

Положим

$$\varphi(t) = y_2(t p_2).$$

Тогда тождество

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)\, t + \int\limits_0^1 (1 - t)\, \varphi''(t)\, dt$$

перепишется в виде

$$y_2(p) = \int\limits_0^1 (1 - t) \Big[\sum_{\alpha + \beta = 2} p_2^{\alpha} \bar{p}_2^{\beta}\, y''_{2, p_2^{\alpha}, \bar{p}_2^{\beta}}(t p_2) \Big]\, dt.$$

Отсюда

$$| y_2(p) | \leqslant \frac{1}{2} | p_2 |^2 \sum_{\alpha + \beta = 2} \max_{p_2} | y_{2, p_2^{\alpha}, \bar{p}_2^{\beta}}(p_2) |,$$

следовательно,

$$\int\limits_{|p_2|<1} |y_2(p_2)|^2 |p_2|^{-4} d\mu(p_2) \leqslant \frac{\pi}{4} \Big(\sum_{\alpha+\beta=2} \max_{p_2} |y''_{2, p_2^{\alpha}, \bar{p}_2^{\beta}}(p_2)| \Big)^2 .$$

Таким образом,

$$\| y_2 \|_2 \leqslant \| y_2 \|_3 = \| X_2 \|_3, \tag{289}$$

где

$$\| y_2 \|_3^2 = C_1 \int |y_2(p_2)|^2 (1 + |p_2|^4) d\mu(p_2) + \\ + C_2 \Big(\sum_{\alpha+\beta=2} \max_{p_2} y''_{2, p_2^{\alpha}, \bar{p}_2^{\beta}}(p_2) | \Big)^2, \tag{290}$$

следовательно,

$$\| X_2 \|_3^2 = C_1 \int [|X_2(\zeta_2)|^2 + |\Delta_{\zeta_2} X_2(\zeta_2)|^2] d\mu(\zeta_2) + \\ + C_2' \Big(\sum_{\alpha+\beta=2} \int |\zeta_2|^{\alpha+\beta} X_2(\zeta_2)| d\mu(\zeta_2) \Big)^2 \tag{291}$$

и где C_1, C_2, C_2'—некоторые константы.

Обозначим через L_2 множество всех функций $y_2(p_2)$ с конечной нормой $\| y_2 \|_2$ и через L_3—множество всех функций $y_2(p_3)$ с конечной нормой $\| y_2 \|_3$ и равных нулю в некоторой окрестности точки $p_2 = 0$.

Очевидно, L_3 плотно в L_2 в смысле нормы $\| y_2 \|_2$.

Далее, очевидно, что $\mathfrak{X}_2$ плотно в смысле нормы $\| X_2 \|_3$ в совокупности всех функций X_2 с конечной нормой $\| X_2 \|_3$, удовлетворяющих условию (275). Из оценки (289) следует поэтому, что Y_2 плотно в L_3, следовательно, и в L_2 в смысле нормы $\| y_2 \|_2$.

Отсюда следует, что $\tilde{Y}_2$ *состоит из всех функций* $y_2(p_2)$ *таких, что*

$$\int |y_2(p_2)| |p_2|^{-2} d\mu(p_2) < +\infty.$$

Положим

$$\varphi(g) = (U_g f_1, f_2);$$

функции $\varphi(g)$ являются ограниченными непрерывными функциями.

Кроме того, вместе с функцией $\varphi(g)$ и все сдвиги являются функциями этого же вида. Действительно,

$$\varphi(g g_0) = (U_{g g_0} f_1, f_2) = (U_g U_{g_0} f_2, f_2)$$

и

$$\varphi(g_0 g) = (U_{g_0 g} f_1, f_2) = (U_g f_1, U_{g_0}^{-1} f_2).$$

В силу условия (271), функции $\varphi(g)$ удовлетворяют условию

$$\int x(g) \varphi(g) d\mu(g) = 0 \tag{292}$$

для всех функций

$$x(g)=\tilde{x}(p_1, p_2, p_3)=|p_2|^4 y(p_1, p_2, p_3)$$

таких, что $y \in \tilde{Y}$.

Заметим, что для плотного множества элементов f_1 и f_2 функция $\varphi(g)$, а следовательно, и ее сдвиги, являются достаточное число раз дифференцируемыми функциями от g. Действительно, возьмем достаточное число раз дифференцируемую и равную нулю вне компакта функцию $a(g)$. Если в равенстве (292) заменить f_1 на $\int a(g) U_g f_1 \, d\mu(g)$, то $\varphi(g)$ станет дифференцируемой. Множество таких f_1 плотно (см. аналогичное рассуждение в (²)).

Перепишем равенство (292) в параметрах p_1, p_2, p_3, заменив при этом $\varphi(g)$ на $\varphi(p_1, p_2, p_3)$. Мы имеем

$$\int y(p_1, p_2, p_3)\varphi(p_1, p_2, p_3)|p_2|^{-2} d\mu(p_1) d\mu(p_2) d\mu(p_3)=0,$$

т. е.

$$\int y_1(p_1) y_2(p_2)|p_2|^{-2} y_3(p_3)\varphi(p_1, p_2, p_3) d\mu(p_1) d\mu(p_2) d\mu(p_3)=0 \quad (293)$$

для всех функций y_1, y_2, y_3 из $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3$ соответственно. Перепишем равенство (293) в виде

$$\int y_2(p_2)|p_2|^{-2}\left[\int \varphi(p_1, p_2, p_3) y_1(p_1) y_3(p_3) d\mu(p_1) d\mu(p_3)\right] d\mu(p_2)=0;$$

оно имеет место для произвольной суммируемой функции $y_2(p_2)|p_2|^{-2}$. Отсюда

$$\int \varphi(p_1, p_2, p_3) y_1(p_1) y_3(p_3) d\mu(p_1) d\mu(p_3)=0 \qquad (294)$$

для почти всех p_2. Но левая часть (294) есть непрерывная функция от p_2. Поэтому равенство (294) имеет место для всех p_2.

Пусть теперь $y_0(p)$ — фиксированная функция такая, что

$$\int y_0(p) d\mu(p)=1,$$

а $y_1(p_1), y_3(p_3)$ — произвольные суммируемые функции. Положим

$$\tilde{y}_1(p_1)=y_1(p_1)-y_0(p_1)\int y_1(p_1) d\mu(p_1),$$

$$\tilde{y}_3(p_3)=y_3(p_3)-y_0(p_3)\int y_3(p_3) d\mu(p_3).$$

Тогда

$$\int \tilde{y}_1(p_1) d\mu(p_1)=\int \tilde{y}_3(p_3) d\mu(p_3)=0,$$

следовательно, функции $\tilde{y}_1, \tilde{y}_3$ принадлежат $\tilde{Y}_1$ и $\tilde{Y}_3$ соответственно. Поэтому для функций $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_3$ выполнено условие (294). Положим,

далее,

$$\varphi_1(p_2, p_3) = \int \varphi(p_1, p_2, p_3)\, y_0(p_1)\, d\mu(p_1),$$

$$\varphi_2(p_1, p_2) = \int \varphi(p_1, p_2, p_3)\, y_0(p_3)\, d\mu(p_3) -$$

$$- \int \varphi(p_1, p_2, p_3)\, y_0(p_1)\, y_0(p_3)\, d\mu(p_1)\, d\mu(p_3).$$

Подставляя функции $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_3$ в условие (294), мы получаем, что

$$\int \varphi(p_1, p_2, p_3)\, y_1(p_1)\, y_3(p_3)\, d\mu(p_1)\, d\mu(p_3) =$$

$$= \int [\varphi_1(p_2, p_3) + \varphi_2(p_1, p_2)]\, y_1(p_1)\, y_3(p_3)\, d\mu(p_1)\, d\mu(p_3)$$

для всех суммируемых функций $y_1(p_1)$, $y_3(p_3)$. Поэтому функция $\varphi(p_1, p_2, p_3)$ имеет вид

$$\varphi(p_1, p_2, p_3) = \varphi_1(p_2, p_3) + \varphi_2(p_1, p_2). \tag{295}$$

Так как любой сдвиг функции $\varphi(g)$ также удовлетворяет условию (292), то и любой правый или левый сдвиг функции $\varphi(g)$ также имеет вид $\varphi_1(p_2, p_3) + \varphi_2(p_1, p_2)$.

Возьмем $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; при сдвиге $g \to gg_0$ параметры p_1, p_2, p_3 преобразуются по формулам

$$p_1 \to -\frac{1}{p_1}, \quad p_2 \to \frac{p_2}{p_1}, \quad p_3 \to p_3 - \frac{p_2^2}{p_1}.$$

Таким образом, функция φ, с одной стороны, имеет вид

$$\varphi(p_1, p_2, p_3) = \varphi_1(p_2, p_3) + \varphi_2(p_1, p_2)$$

и, с другой стороны,

$$\varphi(p_1, p_2, p_3) = \varphi_3\left(\frac{p_2}{p_1},\ p_2 - \frac{p_2^2}{p_1}\right) + \varphi_4\left(-\frac{1}{p_1},\ \frac{p_2}{p_1}\right). \tag{295}$$

Докажем, что из этих равенств следует, что φ не зависит от p_3. В силу сказанного ранее, мы можем считать функцию φ имеющей непрерывные производные. Из равенства (295) следует, что $\frac{\partial \varphi}{\partial p_3} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3}$, т. е. $\frac{\partial \varphi}{\partial p_3}$ не зависит от p_1. Дифференцируя равенство (296), получаем, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_3} = \frac{\partial \varphi_3\left(\frac{p_2}{p_1},\ p_3 - \frac{p_2^2}{p_1}\right)}{\partial p_3}$$

не зависит от p_1 при любых фиксированных p_2 и p_3.

Обозначим

$$\frac{\partial \varphi_3(u, v)}{\partial v} = \psi(u, v).$$

Мы видим, что на линиях $u = \frac{p_2}{p_1}$, $v = p_3 - \frac{p_2^2}{p_1}$ (p_2 и p_3 фиксированы), функция $\psi(u, v)$ постоянна, т. е. она постоянна на линиях

$$v = p_3 - p_2 u, \tag{297}$$

где p_2 и p_3 — произвольные постоянные. Так как всякие две точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) можно соединить цепью прямых вида (297), то отсюда следует, что $\psi(u, v)$ постоянна, т. е. $\frac{\partial \varphi_3(u, v)}{\partial v}$ постоянна. Аналогично, $\frac{\partial \varphi_3(u, v)}{\partial \bar{v}}$ тоже постоянна и значит $\varphi_3(u, v)$ имеет вид

$$\varphi_3(u, v) = c_1(u)\, v + c_2(u)\, \bar{v} + c(u).$$

Так как φ_3 — ограниченная функция, то $c_1(u) \equiv c_2(u) = 0$ и, следовательно,

$$\varphi(p_1, p_2, p_3) = c\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \varphi_4\left(-\frac{1}{p_1}, \frac{p_2}{p_1}\right),$$

т. е. φ не зависит от p_3.

Аналогично, пользуясь сдвигом $g \to g_0 g$, где $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, мы получим, что $\varphi(p_1, p_2, p_3)$ не зависит от p_1. Следовательно, $\varphi(p_1, p_2, p_3) = \varphi(p_2)$. Производя снова сдвиг $g \to g g_0$, $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, мы получим, что это возможно лишь для случая, когда $\varphi(p_1, p_2, p_3)$ есть константа.

Мы получим, таким образом, что

$$\varphi(g) = (U_g f_1, f_2)$$

и не зависит от g для плотного множества пар f_1, f_2, а значит, и для любых пар f_1, f_2. Следовательно,

$$(U_g f_1, f_2) \equiv (U_e f_1, f_2) \equiv (f_1, f_2),$$

т. е. $U_g \equiv E$. Утверждение доказано.

5. Позитивные функционалы в R. Как известно, всякому унитарному представлению U_g группы G можно поставить в соответствие функционал в кольце R, полагая

$$F(x) = (U_x f_0, f_0), \tag{298}$$

где f_0 — фиксированный элемент пространства представления. Этот функционал позитивен, т. е. $F(x^* x) \geqslant 0$ для всех $x \in R$.

Обратно, по позитивному функционалу можно построить циклическое представление группы G, беря R в качестве пространства представления и определяя в нем скалярное произведение равенством $(x, y) = F(y^* x)$. При этом элемент x считается эквивалентным нулю, если $(x, x) = 0$.

Оператор U_g представления получается тогда, если положить

$$U_{g_0} x(g) = x(g_0^{-1} g).$$

Рассмотрим позитивный функционал $F(x)$ в R, отличный от тождественного нуля. Его можно рассматривать так же, как функционал на вырожденных функциях $\widetilde{X}$ вида (263). Если представление отлично от единичного, то, в силу леммы 2, элемент f_0 можно выбрать так, чтобы функционал F не обращался в нуль одновременно на всех таких функциях.

Вырожденным функциям $\widetilde{X}$ соответствуют вырожденные функции $\widetilde{\Phi}$:

$$\widetilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda) = \Phi(w_1)\,\Psi(w_2)\,\omega(\lambda), \tag{299}$$

где

$$\Phi(w_1) = X_3(w_1), \quad \Psi(w_2) = X_1(w_2), \quad \frac{1}{2\pi}\,\omega(\lambda) = X_2\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right),$$

так что $\omega(\lambda)$ удовлетворяют условию

$$\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \omega(\lambda). \tag{300}$$

Пусть $\Phi(w_1)$, $\Psi(w_2)$—произвольные функции, имеющие непрерывные производные по $w_1, \overline{w_1}, w_2, \overline{w_2}$ до четвертого порядка включительно и равные нулю вне областей:

$$0 < \varepsilon_1 \leqslant |w_1| \leqslant C_1, \quad 0 < \varepsilon_2 \leqslant |w_2| \leqslant C_2.$$

Пусть, далее, $\omega(\lambda)$—произвольная измеримая функция, удовлетворяющая, кроме (300), еще следующим условиям*:

(1) $\int\limits_{|\lambda| \geqslant 1} |\omega(\lambda)|\, d\mu(\lambda) < +\infty$;

(2) функции $\widetilde{\Phi} = \Phi(w_1)\,\Psi(w_2)\,\omega(\lambda)$ отвечает суммируемая функция $x(g)$;

(3) $\int \omega(\lambda)\,|\lambda - \lambda^{-1}|^2 \dfrac{d\mu(\lambda)}{|\lambda^2|} = 0.$

Оценим норму $\|x\|$ этой функции $x(g)$ снизу. Из формулы (42) § 3 следует, что

$$\int |T_\delta|\,|\lambda - \lambda^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \leqslant 2\int |x(g)|\, d\mu(g), \tag{301}$$

где T_δ—функция, введенная в п. 3 § 6.

С другой стороны,

$$T_\delta = \int \varphi(z, z, \lambda)\, d\mu(z),$$

---

* Отметим, что условие (3) фактически следует из прочих условий (см. сноску на стр. 464).

следовательно,

$$\int \left| \int \varphi(z, z, \lambda)\, d\mu(z) \right| |\lambda - \lambda^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \leqslant 2 \int |x(g)|\, d\mu(g). \tag{302}$$

Вырожденная функция Φ по условию имеет непрерывные частные производные по $w_1, \overline{w}_1, w_2, \overline{w}_2$ до четвертого порядка включительно и обращается в нуль вне множеств вида

$$0 < \varepsilon_1 \leqslant |w_1| \leqslant C_1, \quad 0 < \varepsilon_2 \leqslant |w_2| \leqslant C_2.$$

Поэтому к функции Φ применимо разложение в интеграл Фурье по w_1, w_2. Таким образом,

$$\int \varphi(z, z, \lambda)\, d\mu(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \left[\int \Phi(w_1, w_2, \lambda) e^{-i \operatorname{Re} \overline{z}(w_1 - w_2)}\, d\mu(w_1)\, d\mu(w_2) d\mu(z) = \right.$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\int \left[\int \Phi(w_2 + w, w_2, \lambda)\, d\mu(w_2) \right] e^{-i \operatorname{Re} \overline{z} w}\, d\mu(w)\, d\mu(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \Phi(w_2, w_2, \lambda)\, d\mu(w_2) = \frac{1}{2\pi} \int \widetilde{\Phi}(w, w, \lambda)\, d\mu(w) = C_0\, \omega(\lambda),$$

где

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int |\Phi_0(w_1)|^2\, d\mu(w_1).$$

Поэтому неравенство (302) принимает вид

$$C_0 \int |\omega(\lambda)| |\lambda - \lambda^{-1}|^2 \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \leqslant 2 \int |x(g)|\, d\mu(g); \tag{303}$$

это и есть требуемая оценка снизу для $\|x\|$.

Функционал $F(x)$ можно рассматривать как функционал, определенный на функциях $\widetilde{\Phi}$ вида (299). В силу предыдущего, он не может обращаться в нуль на всех таких функциях.

Посмотрим, что делается с функциями Φ и $\widetilde{\Phi}$ при переходе от $x(g)$ к $x^*(g)$.

Обозначим через Φ^* и $\widetilde{\Phi}^*$ функции Φ и $\widetilde{\Phi}$, соответствующие функции $x^*(g)$. Тогда из равенства (213) § 8 следует, что

$$\Phi^*(w_1, w_2, \lambda) = \overline{\Phi\left(w_2, w_1, \frac{1}{\overline{\lambda}}\right)}. \tag{304}$$

Пусть сначала Φ—четная функция от λ. Тогда

$$\Phi^*(w_1, w_2, \lambda) = \Phi^*\left(w_2, w_1, \lambda \sqrt{\frac{\overline{\overline{w}}_1}{\overline{w}_2}}\right) = \overline{\widetilde{\Phi}\left(w_2, w_1, \frac{1}{\overline{\lambda}} \sqrt{\frac{\overline{\overline{w}}_1}{\overline{\overline{w}}_2}}\right)},$$

т. е.

$$\widetilde{\Phi}^*(w_1, w_2, \lambda) = \overline{\widetilde{\Phi}\left(w_2, w_1, \frac{1}{\overline{\lambda}}\right)} = \overline{\Phi(w_2, w_1, \overline{\lambda})}. \tag{305}$$

Пусть Φ — нечетная функция от λ. Тогда

$$\tilde{\Phi}^*(w_1, w_2, \lambda) = \left|\frac{w_1}{w_2}\right|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\overline{w_2}}{\overline{w_1}}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi^*\left(w_1, w_2, \lambda \sqrt{\frac{\overline{w_2}}{w_1}}\right) =$$

$$= \overline{\left|\frac{w_2}{w_1}\right|^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\overline{w_1}}{\overline{w_2}}\right|^{\frac{1}{2}} \Phi\left(w_2, w_1, \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\overline{w_1}}{\overline{w_2}}}\right)} = \overline{\tilde{\Phi}\left(w_2, w_1, \frac{1}{\lambda}\right)},$$

т. е. равенство (305) имеет место и в этом случае. Поэтому (305) имеет место независимо от четности или нечетности Φ по отношению к λ.

Отсюда следует, что при переходе от x к x^*, функции $\tilde{\Phi}$ вида (299) переходят в функции

$$\tilde{\Phi}^*(w_1, w_2, \lambda) = \overline{\Phi(w_2)}\ \overline{\Psi(w_1)}\ \overline{\omega(\lambda)} \tag{306}$$

того же вида.

Посмотрим теперь, что делается с функциями Φ и $\tilde{\Phi}$ при свертке соответствующих функций $x(g)$.

Пусть $x(g) = (x_1 \times x_2)(g)$ и пусть этим функциям отвечают функции Φ, Φ_1, Φ_2 и $\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$ соответственно.

Из формулы (214) § 8 следует, что

$$\Phi(w_1, w_2, \lambda) = \int\int \Phi_1(w_1, w, \lambda\lambda_1)\ \Phi_2(w, w_2, \lambda_1^{-1}) \frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{|\lambda_1|^2}\, d\mu(w). \tag{307}$$

Легко проверить, что это же свойство остается в силе для функций $\tilde{\Phi}$. Именно, если функциям x_1, x_2 соответствуют $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$, то их свертке $x = x_1 \times x_2$ соответствует функция

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda) = \int \tilde{\Phi}_1(w_1, w, \lambda\lambda_1)\, \tilde{\Phi}(w, w_2, \lambda_1^{-1}) \frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{\lambda_1|^2}\, d\mu(w). \tag{308}$$

В частности, если функциям x_1 и x_2 соответствуют функции

$$\tilde{\Phi}_1(w_1, w_2, \lambda) = \Phi_1(w_1)\, \Psi_1(w_2)\, \omega_1(\lambda)$$

и

$$\tilde{\Phi}_2(w_1, w_2, \lambda) = \Phi_2(w_1)\, \Psi_2(w_2)\, \omega_3(\lambda)$$

вида (299), то функции $x = x_1 \times x_2$ соответствует функция

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda) =$$

$$= \Phi_1(w_1)\, \Psi_2(w_2) \int \psi_1(w)\, \Phi_2(w)\, d\mu(w) \cdot \int \omega_1(\lambda\lambda_1)\, \omega_2(\lambda_1^{-1}) \frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{|\lambda_1|^2} \tag{309}$$

того же вида, причем

$$\omega(\lambda) = \int \omega_1(\lambda\lambda_1)\, \omega_2(\lambda_1^{-1}) \frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{|\lambda_1|^2}.$$

Функция $\omega(\lambda)$ также удовлетворяет условиям (1), (2) и (3). Действительно, условия (1) и (2), очевидно, выполнены. Тогда условие (3) следует автоматически в силу примечания на стр. 464. Его можно также

проверить и непосредственно. Именно, так как $\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\omega(\lambda)$, то условие (3) принимает вид

$$\int \omega(\lambda)\ \ 1-\lambda^{-2})\, d\mu(\lambda)=0, \quad d\mu(\lambda)=d\sigma\, d\tau, \quad \lambda=\sigma+i\tau.$$

Но

$$\int \omega(\lambda)\ (1-\lambda^{-1})\, d\mu(\lambda)=$$

$$=\int \omega_1(\lambda\lambda_2^{-1})\,\omega_2(\lambda_2)\,(1-\lambda^{-2})\, d\mu(\lambda)\,\frac{d\mu(\lambda_2)}{|\lambda_2|^2}=$$

$$=\int \omega_1(\lambda_1)\,\omega_2(\lambda_2)\ (1-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})\, d\mu(\lambda_1)\, d\mu(\lambda_2)=$$

$$=\int \omega_1(\lambda_1)\ (1-\lambda_1^{-2})\, d\mu(\lambda_1)\int \omega_2(\lambda_2)\, d\mu(\lambda_2)+$$

$$+\int \omega_1(\lambda_1)\,\lambda_1^{-2}\, d\mu(\lambda_1)\int \omega_2(\lambda_2)\,(1-\lambda_2^{-2})\, d\mu(\lambda_2)=0,$$

ибо, по предположению,

$$\int \omega_1(\lambda_1)\ \ (1-\lambda_1^{-2})\, d\mu(\lambda_1)=0, \quad \int \omega_2(\lambda_2)\ (1-\lambda_2^{-2})\, d\mu(\lambda_2)=0.$$

6. Коммутативные кольца Ω и Γ. Вернемся теперь к нашему позитивному функционалу $F(x)$. Выберем фиксированную функцию $\Phi_0(w)$ такую, что

$$\int |\Phi_0(w)|^2\, d\mu(w)=1.$$

Пусть, кроме того, функция $\Phi_0(w)$ имеет непрерывные производные по $w, \bar{w}$ до четвертого порядка включительно и обращается в нуль вне множества вида $0<\varepsilon\leqslant|w|\leqslant C$.

Положим

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda)=\Phi_0(w_1)\,\overline{\Phi_0(w_2)}\,\omega(\lambda), \tag{310}$$

где функция $\omega(\lambda)$ удовлетворяют условиям (1) и (2) для данной функции $\Phi_0(w)$. Тогда

$$\tilde{\Phi}^*(w_2, w_2, \lambda)=\Phi_0(w_1)\,\overline{\Phi_0(w_2)}\ \ \overline{\omega(\lambda)}$$

и, в силу (309), при свертке двух функций $\tilde{\Phi}$ вида (309) получается функция того же вида, в которой

$$\omega(\lambda)=\int \omega_1(\lambda\lambda_1)\,\omega_2(\lambda_1|^{-1})\,\frac{d\sigma_1\, d\tau_1}{|\lambda_1|^2}. \tag{311}$$

Другими словами, функции $\tilde{\Phi}$ вида (310) образуют коммутативное кольцо изоморфное кольцу Ω функций $\omega(\lambda)$, удовлетворяющих условиям (1), (2) и (3); при этом умножение в кольце Ω определяется по формуле (311), а операция * формулой

$$\omega^*(\lambda)=\overline{\omega(\lambda)}=\omega(\lambda). \tag{312}$$

Если представление отлично от единичного, то, в силу доказанного в п. 4, можно выбрать элемент f_0 в пространстве представления и функцию $\Phi_0(w)$ таким образом, чтобы соответствующий позитивный функционал F отличался от нуля хотя бы на одной из функций $\omega(\lambda)$ из Ω, имеющих непрерывные производные до восьмого порядка и равных нулю вне множества вида $0 < \varepsilon \leqslant |\lambda| \leqslant C$.

При фиксированной функции $\Phi_0(w)$ функциям $\omega(\lambda) \in \Omega$ отвечают суммируемые функции $x(g)$. Перенесем на $\omega(\lambda)$ норму $\|x\| = \int |x(g)|\, d\mu(g)$ соответствующей ей функции $\omega(\lambda)$. Эту норму обозначим через $\|\omega\|$. Оценим норму $\|\omega\|$, для чего воспользуемся оценкой (246) нормы $\|x\|$. В нашем случае

$$I \leqslant \sum_{\alpha+\beta\leqslant 6} c_{\alpha\beta} \int |\lambda|^{2\alpha+2\beta-2+\varepsilon} |\omega_{\lambda^{\alpha}\bar{\lambda}^{\beta}}(\lambda)|^2\, d\mu(\lambda) + c \int |\omega_{\lambda\bar{\lambda}}(\lambda)|^2\, d\mu(\lambda), \tag{313}$$

где $c_{\alpha\beta}$, c—интегралы по w_1, w_2 произведений вида

$$\Phi_0(w_1)\overline{\Phi_0(w_2)}\; |w_1|^{\alpha_1}\; |w_2|^{\alpha_2},$$

α_1, α_2—некоторые целые числа, а α, β—натуральные числа.

Далее,

$$I' \leqslant \sum_{\alpha+\beta\leqslant 6} b_{\alpha\beta} \int |\lambda|^{2\alpha+2\beta-2+\varepsilon+2k} |\omega_{\lambda^{\alpha}\bar{\lambda}^{\beta}}(\lambda)|^2\, d\mu(\lambda) + b \int |\omega_{\bar{\lambda}\lambda}(\lambda)|^2 |(\lambda)^k\, d\mu(\lambda), \tag{314}$$

где константы $b_{\alpha\beta}$, b аналогичны константам $c_{\alpha\beta}$, c.

Положим

$$\lambda = e^t e^{i\theta}, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad u = t + i\theta, \quad \omega(\lambda) = \gamma(t, \theta).$$

Тогда кольцо Ω перейдет в кольцо Γ функций $\gamma(t, \theta)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1$'$. $\gamma(-t, -\theta) = \gamma(t, \theta)$;

2$'$. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} |\gamma(t, \theta)|\, e^{2t}\, dt\, d\theta < +\infty$;

3$'$. функции $\tilde{\Phi} = \Phi(w_1)\,\Psi(w_2)\,\omega(\lambda)$, где $\omega(\lambda) = \gamma(t, \theta)$, отвечает суммируемая функция $x(g)$;

4$'$. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \gamma(t, \theta)\; (e^{2t} - e^{2i\theta})\, dt\, d\theta = 0$.

При этом умножение в Γ определяется как свертка функций $\gamma_1(t, \theta)$, $\gamma_2(t, \theta)$ по формуле

$$\gamma(t, \theta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \gamma_1(t - t_1, \theta - \theta_1)\, \gamma_2(t_1, \theta_1)\, dt_1\, d\theta_1, \tag{315}$$

а операция * по формуле

$$\gamma^*(t, \theta) = \overline{\gamma(-t, -\theta)} = \overline{\gamma(t, \theta)}.$$

Далее,

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}},$$

поэтому оценки для I и I' перепишутся в виде

$$I \leqslant \sum_{\alpha+\beta\leqslant 6} c_{\alpha\beta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_{u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}}|^2 e^{\varepsilon t}\, dt\, d\theta + c \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_{u\pi}|^2 e^{2t}\, dt\, d\theta, \tag{316}$$

$$I' \leqslant \sum_{\alpha+\beta\leqslant 6} b_{\alpha\beta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_{u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}}|^2 e^{(2k+\varepsilon)t}\, dt\, d\theta + b \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_{u\pi}|^2 e^{(k-2)t}\, dt\, d\theta. \tag{317}$$

Комбинируя эти формулы с оценкой (246) и пользуясь соотношением 1′, мы получаем

$$\int |x(g)|\, d\mu(g) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} C_0 \Big[\sum_{\alpha+\beta\leqslant 6} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\infty} |\gamma_{u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}}|^2 e^{(4+\varepsilon)t}\, dt\, d\theta \Big]^{\frac{1}{2}}, \tag{318}$$

где C_0—некоторая константа.

Обозначим через $\|\gamma\|_1$ правую часть неравенства (318). Далее, обозначим через Γ' совокупность всех функций $\gamma(t, \theta)$, удовлетворяющих условиям 1′, 2′, 4′ и таких, что норма $\|\gamma\|_1$ конечна. Из неравенства (318) следует, что условие 3′ также выполнено, следовательно, $\Gamma' \subset \Gamma$.

Перенесем на Γ норму $\|x\| = \int |x(g)|\, d\mu(g)$, т. е. положим $\|\gamma\| = \|x\|$, если γ и x соответствуют друг другу.

Пополнение кольца Γ по норме $\|\gamma\|$ обозначим через $\tilde{\Gamma}$.

Наш позитивный функционал F в R можно рассматривать как позитивный функционал в $\tilde{\Gamma}$; как нами будет доказано в другой статье, этот позитивный функционал имеет вид

$$F(\gamma) = \int_{\mathfrak{M}} M(\gamma)\, dc(\Delta_M), \tag{319}$$

где $M(\gamma)$—значение элемента γ кольца $\tilde{\Gamma}$ на симметрическом* максимальном идеале M этого кольца, $c(\Delta)$—вполне аддитивная неотрицательная функция борелевского множества Δ в пространстве $\mathfrak{M}$ всех симметрических максимальных идеалов кольца $\tilde{\Gamma}$, а интегрирование ведется по всему этому пространству.

Рассмотрим поэтому подробнее максимальные идеалы кольца $\tilde{\Gamma}$.

Обозначим через Γ'' совокупность всех функций $\gamma(t, \theta)$, удовлетворяющих условиям 1′ и 4′ (стр. 485), имеющих непрерывные частные

* Максимальный идеал M называется с и м м е т р и ч е с к и м, если $M^* = M$, т. е. если M вместе с каждым элементом γ содержит и сопряженный элемент

$$\gamma^*(t, \theta) = \overline{\gamma(t, \theta)}.$$

производные по t и θ до восьмого порядка включительно и равных нулю вне множества вида $|t| \leqslant C$.

Очевидно, $\Gamma'' \subset \Gamma'$. Пусть дан какой-нибудь максимальный идеал M кольца $\widetilde{\Gamma}$. Предположим, что существует хотя бы одна функция $\gamma_0(t, \theta)$ из Γ'', отличная от нуля на M и такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t, \theta) e^{2t} \, dt \, d\theta = 0. \tag{320}$$

Пронормируем эту функцию γ_0 так, чтобы $M(\gamma_0) = 1$.

Рассмотрим функцию

$$\gamma_1(t, \theta) = \frac{1}{2} [\gamma_0(t + t_0, \theta + \theta_0) + \gamma_0(t - t_0, \theta - \theta_0)].$$

Эта функция также принадлежит Γ''. Кроме того, из равномерной непрерывности производных функций γ следует, что функция γ_1 есть непрерывная функция от t_0 и θ_0 в смысле нормы $\|\gamma\|_1$. Поэтому она будет также непрерывной функцией от t_0 и θ_0 в смысле нормы $\|\gamma\|$. Но тогда и $M(\gamma_1)$ есть непрерывная функция от t_0 и θ_0.

Положим

$$\chi(t_0, \theta_0) = M(\gamma_1) = \frac{1}{2} M \{\gamma_0(t + t_0, \theta + \theta_0) + \gamma_0(t - t_0, \theta - \theta_0)\}. \tag{321}$$

Из только что сказанного следует, что $\chi(t_0, \theta_0)$ есть непрерывная функция от t_0 и θ_0. Кроме того, эта функция удовлетворяет функциональному уравнению, которое получается следующим образом:

Пусть $\gamma(t, \theta)$—произвольная функция из Γ. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t - t' + t_0, \theta - \theta' + \theta_0) \gamma_0(t', \theta') \, dt' \, d\theta' =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0(t - t' + t_0, \theta - \theta' + \theta_0) \gamma(t', \theta') \, dt' \, d\theta',$$

т. е.

$$\gamma(t + t_0, \theta + \theta_0) \times \gamma_0(t, \theta) = \gamma_0(t + t_0, \theta + \theta_0) \times \gamma(t, \theta).$$

Подставляя сюда $-t_0$, $-\theta_0$ вместо t_0, θ_0 и складывая почленно полученное равенство с предыдущим, мы находим

$$\frac{1}{2} [\gamma(t + t_0, \theta + \theta_0) + \gamma(t - t_0, \theta - \theta_0] \times \gamma_0(t, \theta) = \gamma_1(t, \theta) \times \gamma(t, \theta).$$

Так как $\gamma \rightarrow M(\gamma)$ есть гомоморфизм, то отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} M \{\gamma(t + t_0, \theta + \theta_0) + \gamma(t - t_0, \theta - \theta_0)\} \cdot M(\gamma_0) = M(\gamma_1) M(\gamma). \tag{322}$$

Положим, в частности,

$$\gamma(t, \theta) = \gamma_0(t+t_1, \theta+\theta_1) + \gamma_0(t-t_1, \theta-\theta_1);$$

тогда, пользуясь определением (321) функции $\chi(t_0, \theta_0)$ и равенством $M(\gamma_0) = 1$, мы получим из (322)

$$\chi(t_0+t_1, \theta_0+\theta_1) + \chi(t_0-t_1, \theta_0-\theta_1) = 2\chi(t_0, \theta_0)\chi(t_1, \theta_1). \tag{323}$$

Это и есть искомое функциональное уравнение для $\chi(t, \theta)$.

Но, как известно, непрерывная функция $\chi(t, \theta)$, удовлетворяющая этому функциональному уравнению, должна иметь вид

$$\chi(t, \theta) = \cos(\rho t - n\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\rho t}e^{-in\theta} + e^{-i\rho t}e^{in\theta}). \tag{324}$$

Докажем, что n должно быть целым числом. Действительно, функция $\gamma_0(t, \theta)$ удовлетворяет условию

$$\gamma_0(t, -\pi) = \gamma_0(t, \pi);$$

поэтому она может быть продолжена до непрерывной периодической функции $\gamma_0(t, \theta)$ с периодом 2π. Из тождества

$$\gamma_0(t+t_0, \theta+\theta_0+2\pi) + \gamma_0(t-t_0, \theta-\theta_0+2\pi) =$$
$$= \gamma_0(t+t_0, \theta+\theta_0) + \gamma_0(t-t_0, \theta-\theta_0)$$

следует, что

$$\chi(t_0, \theta_0+2\pi) = \chi(t_0, \theta_0).$$

Это последнее равенство возможно лишь тогда, когда n—целое число.

Пусть теперь $\gamma(t, \theta)$—произвольная функция из Γ, равная нулю вне множества вида $|t| \leqslant C$. Составим выражение

$$\tilde{\gamma}(t, \theta) = (\gamma_0 \times \gamma)(t, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0(t-t', \theta-\theta')\gamma(t', \theta')\,dt'\,d\theta'; \tag{325}$$

в этом выражении интегрирование фактически ведется по области $|t'| \leqslant C$.

В силу гомоморфизма отображения $\gamma \to M(\gamma)$,

$$M(\tilde{\gamma}) = M(\gamma_0)M(\gamma) = M(\gamma). \tag{326}$$

С другой стороны, сделав в последнем интеграле замену переменных $t' \to -t'$, $\theta' \to -\theta'$ и пользуясь четностью функции $\gamma(t, \theta)$, мы можем переписать выражение для $\tilde{\gamma}(t, \theta)$ в виде

$$\tilde{\gamma}(t, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0(t+t', \theta+\theta')\gamma(t', \theta')\,dt'\,d\theta'. \tag{327}$$

Взяв полусумму левых и правых частей равенств (326) и (327), мы получим, что

$$\tilde{\gamma}(t, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0(t+t', \theta+\theta') + \gamma_0(t-t', \theta-\theta')}{2} \gamma(t', \theta')\, dt'\, d\theta'. \quad (328)$$

Составим для интеграла правой части (328) аппроксимирующую его сумму

$$\gamma_a(t, \theta) = \sum_{k,j} \frac{\gamma_0(t+t_k, \theta+\theta_j) + \gamma_0(t-t_k, \theta-\theta_j)}{2} \int_{\Delta_k} \int_{\Delta'_j} \gamma(t', \theta')\, dt'\, d\theta'. \quad (329)$$

Тогда из определения (321) функции $\chi(t, \theta)$ будет следовать, что

$$M(\gamma_a) = \sum_{k,j} \chi(t_k, \theta_j) \int_{\Delta_k} \int_{\Delta'_j} \gamma(t', \theta')\, dt'\, d\theta'.$$

При $\Delta t_k \to 0$, $\Delta'\theta_j \to 0$ это выражение имеет своим пределом

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t, \theta)\, \gamma(t, \theta)\, dt\, d\theta. \quad (330)$$

Докажем, что этот предел равен $M(\tilde{\gamma})$. Для этого, в силу непрерывности $M(\gamma)$ в смысле нормы $\|\gamma\|$, достаточно доказать, что при $\Delta t_k \to 0$, $\Delta'\theta_j \to 0$ будет $\gamma_a \to \tilde{\gamma}$ в смысле нормы $\|\gamma\|$. В силу неравенства (318), достаточно доказать, что $\gamma_a \to \gamma$ в смысле нормы $\|\gamma\|_1$.

Функции $\tilde{\gamma}(t, \theta)$ и $\gamma_a(t, \theta)$ обращаются в нуль вне множества вида $|t| \leqslant \tilde{C}$, так что достаточно доказать, что на этом множестве функция $\gamma_a(t, \theta)$ и все ее производные до 6-го порядка включительно равномерно стремятся к $\tilde{\gamma}(t, \theta)$ и соответствующим ее производным. Но последнее очевидно, в силу равномерной непрерывности функции $\gamma_0(t, \theta)$ и ее частных производных до шестого порядка включительно. Таким образом,

$$M(\tilde{\gamma}) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t, \theta)\, \chi(t, \theta)\, dt\, d\theta.$$

Сравнение с (326) дает

$$M(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t, \theta)\, \chi(t, \theta)\, dt\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t, \theta) \cos(\rho t - n\theta)\, dt\, d\theta. \quad (331)$$

Из соотношения $\gamma(t, \theta) = \gamma(-t, -\theta)$ следует, что

$$M(\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\infty} \gamma(t, \theta) \cos(\rho t - n\theta)\, dt\, d\theta. \quad (332)$$

Пусть функция γ удовлетворяет условию $\gamma^* = \gamma$, т. е., по определению операции $*$ в Γ

$$\overline{\gamma(t, \theta)} = \gamma(t, \theta).$$

Если идеал M — симметрический, то он на такой функции принимает действительные значения. Таким образом, выражение (332) принимает действительные значения, если функция $\gamma(t, \theta)$ принимает только действительные значения. Это возможно только тогда, когда функция $\cos(\rho t - n\theta)$ принимает только действительные значения. Последнее возможно только в следующих двух случаях:

a) ρ — действительное число,

b) $n = 0$, ρ — чисто мнимое число: $\rho = i\rho_1$, $\rho_1 > 0$. В этом последнем случае выражение для $M(\gamma)$ примет вид

$$M(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\infty} \gamma(t, \theta) \operatorname{ch} \rho_1 t \, dt \, d\theta. \tag{333}$$

В случае a) правая часть равенства (332) непрерывна в смысле нормы $\|\gamma\|_1$ на совокупности Γ'_c всех функций γ из Γ', которые вместе со своими производными до шестого порядка ограничены одной и той же константой c. Действительно, положим

$$\|\gamma\|_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\infty} |\gamma(t, \theta)| \operatorname{sh}^2 t \, dt. \tag{334}$$

Тогда из оценки (303) следует, что

$$c_0 \|\gamma\|_0 \leqslant \|\gamma\| \leqslant \|\gamma\|_1. \tag{335}$$

Поэтому достаточно доказать непрерывность на Γ'_c правой части равенства (332) в смысле нормы $\|\gamma\|_0$. Последнее следует из оценки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\infty} |\gamma(t, \theta)| \, dt \, d\theta \leqslant 2\pi\varepsilon c + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} |\gamma(t, \theta)| \operatorname{sh}^2 t dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\varepsilon c + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\infty} |\gamma(t, \theta)| \operatorname{sh}^2 t \, dt.$$

Обозначим через Γ''_c совокупность всех функций из Γ'', которые вместе со своими производными до шестого порядка включительно ограничены одной и той же константой C.

Всякая функция γ из Γ'_c является пределом в смысле нормы $\|\gamma\|$ последовательности функций из Γ''_c.

Действительно, пусть $\gamma^{(N, \varepsilon_1)}(t, \theta)$ — функция из Γ''_c, удовлетворяющая условиям

$$\gamma^{(N, \varepsilon_1)}(t, \theta) = \begin{cases} \gamma(t, \theta) & \text{при } |t| \leqslant N - \varepsilon_1, \\ 0 & \text{при } |t| > N. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}|\gamma_{u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}}-\gamma^{(N,\varepsilon_1)}_{u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}}|^2 e^{(4+\varepsilon)t}\,dt\,d\theta=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{N-\varepsilon_1}^{N}|\gamma_{u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}}-\gamma^{(N,\varepsilon_1)}_{u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}}|^2 e^{(4+\varepsilon)t}\,dt\,d\theta+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{N}^{\infty}|\gamma_{u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}}|^2 e^{(4+\varepsilon)t}\,dt\,d\theta\leqslant 8\pi C^2\int_{N-\varepsilon_1}^{N}e^{(4+\varepsilon)t}\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{N}^{\infty}|\gamma_{u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}}|^2 e^{(4+\varepsilon)t}\,dt\,d\theta.$$

Взяв N настолько большим, чтобы второе слагаемое было меньше ε_2, а затем ε_1 настолько малым, чтобы первое слагаемое было меньше ε_2, мы получим, что

$$\|\gamma-\gamma^{(N,\varepsilon_1)}\|^2<2\varepsilon_2.$$

Так как формула (332) имеет место на Γ''_c, то отсюда и из непрерывности правой части этой формулы в смысле нормы $\|\gamma\|_1$ следует, что эта формула верна для всех функций из Γ'_c, каково бы ни было $c>0$.

В случае b) правая часть равенства (333) непрерывна в смысле нормы

$$\|\gamma\|_{\rho_1}=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}|\gamma(t,\theta)|\operatorname{ch}\rho_1 t\,dt\,d\theta.$$

С другой стороны, мы видели, что при надлежащем выборе N и ε_1

$$\|\gamma-\gamma^{(N,\varepsilon_1)}\|_{\rho_1}<\varepsilon_2.$$

Аналогично, можно показать, что если $\gamma\in\Gamma'_c$ и $\|\gamma\|_{\rho_1}$ конечно, то

$$\|\gamma-\gamma^{(N,\varepsilon_1)}\|_{\rho_1}<\varepsilon_2.$$

Равенство (333) имеет место для функции $\gamma^{(N,\varepsilon_1)}$. Переходя к пределу, мы получаем, что это равенство справедливо для всех функций $\gamma\in\Gamma'_c$ с конечной нормой $\|\gamma\|_{\rho_1}$.

Мы предположили, что наш идеал отличен от нуля хотя бы на одной функции γ_0 из Γ'', удовлетворяющей условию

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\gamma_0(t,\theta)\,e^{2t}\,dt\,d\theta=0. \tag{336}$$

Если это не так, то из предыдущих рассуждений следует, что наш идеал обращается в нуль на всех функциях γ из Γ'_c, удовлетворяющих условию (336).

Выберем фиксированную функцию $\gamma_0(t,\theta)$ из Γ'_c такую, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\gamma_0(t,\theta)\,e^{2t}\,dt\,d\theta=1.$$

Для любой функции $\gamma(t, \theta) \in \Gamma'_c$ положим

$$\gamma_1(t, \theta) = \gamma(t, \theta) - \gamma_0(t, \theta) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \gamma(t, \theta)^{2t}\, dt\, d\theta.$$

Тогда функция $\gamma_1(t, \theta)$ также принадлежит Γ'_c и удовлетворяет условию (336). Поэтому $M(\gamma_1) = 0$, т. е.

$$M(\gamma) = C \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t, \theta)\, e^{2t}\, dt\, d\theta,$$

где $C = M(\gamma_0)$.

Применяя эту формулу к свертке двух функций, получаем, что $C^2 = C$, следовательно, $C = 1$ или $C = 0$. Во втором случае наш идеал обращается в нуль на всех функциях из Γ'_c.

Пусть $\rho_1 > 2$; положим

$$\gamma_{\varepsilon_1}(t, \theta) = t^6 e^{-t(\rho_1 + \varepsilon_1)} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0,$$
$$\gamma_{\varepsilon_1}(t, \theta) = t^6 e^{t(\rho_1 + \varepsilon_1)} \quad \text{при} \quad t \leqslant 0.$$

Эта функция ограничена вместе со своими производными до шестого порядка включительно. Кроме того, очевидно, что норма $\|\gamma\|_1$ конечна, если выбрать число ε в (318) так, чтобы $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(\rho_1 - 2)$. Положим, далее,

$$\gamma'_{\varepsilon_1}(t, \theta) = \gamma_{\varepsilon_1}(t, \theta) - \gamma_0(t, \theta) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \gamma_{\varepsilon_1}(\mathrm{t}, \theta)\,(e^{2t} - e^{2i\theta})\, dt\, d\theta,$$

где $\gamma_0(t, \theta)$ — фиксированная функция из Γ''. Тогда $\gamma \in \Gamma'_c$ при некотором C. Кроме того, норма $\|\gamma'_{\varepsilon_1}\|_{\rho_1}$ также конечна, поэтому

$$M(\gamma'_{\varepsilon_1}) = 2\pi \int_0^{\infty} t^6 (e^{t\rho_1} + e^{-t\rho_1})\, e^{-t(\rho_1 + \varepsilon_1)}\, \mathrm{d}t -$$
$$- M(\gamma_0) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \gamma_{\varepsilon_1}(t, \theta)\,(e^{2t} - e^{2i\theta})\, dt\, d\theta.$$

Легко видеть, что это выражение неограничено при $\varepsilon_1 \to 0$.

С другой стороны, если функционал $M(\gamma)$ непрерывен, то должно быть

$$|M(\gamma'_{\varepsilon_1})| \leqslant C \|\gamma'_{\varepsilon_1}\|_1.$$

При $\varepsilon_1 \to 0$ правая часть этого неравенства стремится к $C\|\gamma'_0\|_1$, где

$$\gamma'_0(t, \theta) = t^6 e^{-t\rho_1} - \gamma_0(t, \theta) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} t^6 e^{-t\rho_1} (e^{2t} - e^{2i\theta})\, dt\, d\theta \quad \text{при} \quad t \geqslant 0,$$

следовательно, $M(\gamma'_{\varepsilon_1})$ должно быть ограниченным при $\varepsilon_1 \to 0$.

Это противоречие показывает, что в случае b) возможны только значения $0 < \rho_1 \leqslant 2$.

Мы предположили, что функционал $M(\gamma)$ отличен от нуля хотя бы на одной из функций $\gamma \in \Gamma''$. Если же $M(\gamma) = 0$ на всех функциях из Γ'', то из предыдущего следует, что $M(\gamma) = 0$ также для всех функций γ из Γ'_c, каково бы ни было $C > 0$. Комбинируя это замечание с формулами (319), (332) и (333), мы получаем:

Для любой функции γ *из* Γ'_c *позитивный функционал* $F(\gamma)$ *на* Γ *имеет вид*

$$F(\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \gamma(t, \theta) \cos(\rho t - n\theta)\, dt\, d\theta \right] dc_n(\rho) + \\ + \int_0^2 \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \gamma(t, \theta) \operatorname{ch} \rho_1 t\, dt\, d\theta \right] dc(\rho_1), \tag{337}$$

где $c_n(\rho)$, $c(\rho_1)$ — *неотрицательные неубывающие функции от* ρ *и* ρ_1.

Переходя к кольцу $\tilde{\mathfrak{Q}}$, мы получаем для функционала $F(\omega)$ $(\omega(\lambda) = \gamma(t, \theta) \in \Gamma'_c)$ выражение

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int \omega(\lambda) \frac{|\lambda|^{n+i\rho}\lambda^{-n} + |\lambda|^{-n-i\rho}\lambda^n}{2} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \right] dc_n(\rho) + \\ + \int_0^2 \left[\int \omega(\lambda) \frac{|\lambda|^{\rho_1} + |\lambda|^{-\rho_1}}{2} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \right] dc(\rho). \tag{338}$$

Так как $\omega(\lambda) = \omega(\lambda^{-1})$, то эту формулу можно также переписать в виде

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int \omega(\lambda) |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \right] dc_n(\rho) + \\ + \int_0^2 \left[\int \omega(\lambda) |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \right] dc(\rho_1). \tag{339}$$

7. Разложение данного унитарного представления группы G на неприводимые. Применим теперь предыдущие результаты к решению нашей основной задачи — разложению данного унитарного представления на неприводимые.

Пусть функция Φ_0 выбрана так же, как и в п. 6. Положим

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda) = \Psi(w_1) \Phi_0(w_2) \omega(\lambda),$$

где функция $\Psi(w_1)$ имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно и обращается в нуль вне области вида $0 < \varepsilon_1 \leqslant \leqslant |w_1| \leqslant C_1$, а функция $\omega(\lambda) = \gamma(t, \theta) \in \Gamma''$.

Функции $x(g)$, соответствующие этим функциям $\tilde{\Phi}$, суммируемы. Их совокупность обозначим через S_{Φ_0}.

Далее, обозначим через $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ совокупность всех конечных сумм вида

$$x(g) = \sum_k x_k(g_k^{-1} g),$$

где $x_k(g) \in S_{\Phi_0}$. Эта совокупность состоит из суммируемых функций $x(g)$ и инвариантна при сдвиге $x(g) \to x(g_0^{-1} g)$. Кроме того, она линейна. Ей соответствует в $\mathfrak{H}$ линейное многообразие элементов

$$f = \int x(g) U_g f_0 \, d\mu(g),$$

инвариантное по отношению ко всем операторам представления U_g. Это многообразие мы можем снова обозначить через $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ и рассматривать функции $x(g)$ как элементы пространства $\mathfrak{H}$.

Согласно п. 5, скалярное произведение двух таких функций $x(g)$ и $y(g)$ определяется формулой

$$(x, y) = F(y^* x),$$

следовательно, есть конечная сумма выражений $F(x_1^* x_{g_0})$, где $x, x_1 \in S_{\Phi_0}$ и $x_{g_0}(g) = x(g_0^{-1} g)$. Поэтому достаточно найти $F(x_1^* x_{g_0})$.

Пусть функциям $x(g)$, $x_1(g)$ из S_{Φ_0} отвечают функции

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \lambda) = \Psi(w_1) \Phi_0(w_2) \omega(\lambda),$$
$$\tilde{\Phi}_1(w_1, w_2, \lambda) = \Psi_1(w_1) \Phi_0(w_2) \omega_1(\lambda)$$

соответственно. Найдем функцию $\tilde{\Phi}$, соответствующую функции $x_1^* x_{g_0}$. Для этого заметим, что для соответствующих функций $\tilde{L}$ имеем

$$\tilde{L}(w_1, w_2, n, \rho) = \Psi(w_1) \Phi_0(w_2) a_{n,\rho},$$
$$\tilde{L}_1(w_1, w_2, n, \rho) = \Psi_1(w_1) \Phi_0(w_2) a'_{n,\rho},$$

где

$$a_{n,\rho} = \int \omega(\lambda) \, |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2},$$
$$a'_{n,\rho} = \int \omega_1(\lambda) \, |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}.$$

Отсюда

$$L(w_1, w_2, n, \rho) = l(w_1, n, \rho) \, l_0(w_2, n, \rho),$$
$$L_1(w_1, w_2, n, \rho) = l_1(w_1, n, \rho) \, l_0(w_2, n, \rho),$$

где при n четном

$$l_0(w_2, n, \rho) = |w_2|^{\frac{n+i\rho}{2}} \bar{w}_2^{-\frac{n}{2}} \Phi_0(w_2), \tag{340}$$

$$l(w_1, n, \rho) = |w_1|^{-\frac{n+i\rho}{2}} \bar{w}_1^{\frac{n}{2}} \Psi(w_1) a_{n,\rho}, \tag{341}$$

$$l_1(w_1, n, \rho) = |w_1|^{-\frac{n+i\rho}{2}} \bar{w}_1^{\frac{n}{2}} \Psi_1(w_1) a'_{n,\rho} \tag{342}$$

и при n нечетном

$$l_0(w_2, n, \rho) = |w_2|^{\frac{n-1+i\rho}{2}} \bar{w}_2^{-\frac{n-1}{2}} \Phi_0(w_2), \tag{343}$$

$$l(w_1, n, \rho) = |w_1|^{-\frac{n-1+i\rho}{2}} \overline{w}_1^{\frac{n-1}{2}} \Psi(w_1) a_{n,\rho}, \tag{344}$$

$$l_1(w_1, n, \rho) = |w_1|^{-\frac{n-1+i\rho}{2}} \overline{w}_1^{\frac{n-1}{2}} \Psi_1(w_1) a'_{n,\rho}. \tag{345}$$

Переходя к ядрам $K(z_1, z_2, n, \rho)$, получаем

$$K(z_1, z_2, n, \rho) = f(z_1, n, \rho) f_0(z_2, n, \rho), \tag{346}$$

$$K_1(z_1, z_2, n, \rho) = f_1(z_1, n, \rho) f_0(z_2, n, \rho), \tag{347}$$

где

$$f_0(z_2, n, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int l_0(w_2, n, \rho) e^{i \operatorname{Re}(z_2 \overline{w}_2)} d\mu(w_2), \tag{348}$$

$$f(z_1, n, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int l(w_1, n, \rho) e^{-i \operatorname{Re}(z_1 \overline{w}_1)} d\mu(w_1), \tag{349}$$

$$f_1(z_1, n, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int l_1(w_1\, n, \rho) e^{-i \operatorname{Re}(z_1 \overline{w}_1)} d\mu(w_1). \tag{350}$$

По доказанному в п. 4 § 7, функции $x_{g_0}(g) = x(g_0^{-1}g)$ соответствует ядро

$$K_{g_0}(z_1, z_2, n, \rho) = f_{g_0}(z_1, n, \rho) f_0(z_2, n, \rho), \tag{351}$$

где

$$f_{g_0}(z_1, n, \rho) = |g_{12}^0 z_1 + g_{22}^0|^{n+i\rho-2} (g_{12}^0 z_1 + g_{22}^0)^{-n} f\left(\frac{g_{11}^0 z_1 + g_{21}^0}{g_{12}^0 z_1 + g_{22}^0}, n, \rho\right) \tag{352}$$

и

$$g_0 = \begin{pmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 \\ g_{21}^0 & g_{22}^0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что любой функции $x(g)$ из $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ также соответствует ядро вида

$$K(z_1, z_2, n, \rho) = f(z_1, n, \rho) f_0(z_1, n, \rho),$$

где функция $f_0(z_1, n, \rho)$ остается фиксированной. Другими словами, каждой функции $x(g)$ из $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ мы можем поставить в соответствие функцию $f(z_1, n, \rho)$. В силу (352), при сдвиге $x(g) \to x(g_0^{-1}g)$ эта функция, рассматриваемая как функция от z, преобразуется по представлению основной серии.

Вернемся теперь к исходным функциям x, x_1 из S_{Φ_0}. Из формул (347) и (351) следует, что функции $x_1^* x_{g_0}$ соответствует ядро

$$K_0(z_1, z_2, n, \rho) = \int \overline{K_1(z, z_1, n, \rho)} K_{g_0}(z, z_2, n, \rho) d\mu(z) = \\ = \overline{f_0(z_1, n, \rho)} f_0(z_2, n, \rho) a_{n,\rho}^{(0)}, \tag{353}$$

где

$$a_{n,\rho}^{(0)} = \int \overline{f_1(z, n, \rho)} f_{g_0}(z, n, \rho) d\mu(z). \tag{354}$$

Из формулы (353) следует, что соответствующее ядро L_0 имеет вид

$$L_0(w_1, w_2, n, \rho) = \overline{l_0(w_1, n, \rho)} l_0(w_2, n, \rho) a_{n,\rho}^{(0)}. \tag{355}$$

Обозначим через $\tilde{L}_0$, $\tilde{\Phi}_0$ соответствующие функции $\tilde{L}$ и $\tilde{\Phi}$. Из формул (340) и (343) следует, что

$$\tilde{L}_0(w_1, w_2, n, \rho) = \overline{\Phi_0(w_1)}\,\Phi_0(w_2)\,a_{n,\rho}^{(0)};$$

отсюда

$$\tilde{\Phi}_0(w_1, w_2, \lambda) = \overline{\Phi_0(w_1)}\,\Phi_0(w_2)\,\omega_0(\lambda), \tag{356}$$

где

$$\omega_0(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_{n,\rho}^{(0)}|\lambda|^{-n-i\rho}\lambda^n\,d\rho. \tag{357}$$

Положим

$$\varphi(z, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z, n, \rho)|\lambda|^{-n-i\rho}\lambda^n\,d\rho, \tag{358}$$

$$\varphi_1(z, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z, n, \rho)|\lambda|^{-n-i\rho}\lambda^n\,d\rho. \tag{359}$$

Формула (358) определяет функцию $\varphi(z, \lambda)$ не только для $x(g) \in S_{\Phi_0}$, но и для любой функции $x(g) \in \mathfrak{M}_{\Phi_0}$, ибо любой функции $x(g)$ из $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ соответствует функция $f(z, n, \rho)$. В случае $x(g)$, $x_1(g) \in S_{\Phi_0}$ эти функции легко выразить через функции $\omega(\lambda)$, $\omega_1(\lambda)$, $\Psi(w_1)$, $\Psi_1(w_1)$. Именно, если, например, $\omega(\lambda)$ есть четная функция от λ, то, в силу формул (341), (349),

$$\varphi(z, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int a_{n,\rho}|w_1|^{-\frac{n+i\rho}{2}}\overline{w}_1^{\frac{n}{2}}\Psi(w_1)\,e^{-i\,\mathrm{Re}(z_1\overline{w}_1)}\,d\mu(w_1)\right]|\lambda|^{-n-i\rho}\lambda^n d\rho =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_{n,\rho}|w_1|^{-\frac{n+i\rho}{2}}\overline{w}_1^{\frac{n}{2}}|\lambda|^{-n-i\rho}\lambda^n\,d\rho\right]\Psi(w_1)\,e^{-i\,\mathrm{Re}(z_1\overline{w}_1)}\,d\mu(w_1),$$

т. е.

$$\varphi(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi}\int \omega\left(\lambda\sqrt{\overline{w}_1}\right)\Psi(w_1)\,e^{-i\,\mathrm{Re}(z_1\overline{w}_1)}\,d\mu(w_1). \tag{360}$$

Если же $\omega(\lambda)$ — нечетная функция от λ, то аналогично,

$$\varphi(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi}\int |w_1|^{\frac{1}{2}}\,\overline{w}_1^{-\frac{1}{2}}\,\omega\left(\lambda\sqrt{\overline{w}_1}\right)\Psi(w_1)\,e^{-i\,\mathrm{Re}(z_1\overline{w}_1)}\,d\mu(w_1). \tag{361}$$

Подставим теперь в формулу (357) для $\omega_0(\lambda)$ вместо $a_{n,\rho}^{(0)}$ его выражение (354). Тогда, в силу (352), (358), (359), получим

$$\omega_0(\lambda) = \int |g_{12}^0 z + g_{22}^0|^{-2}\,\overline{\varphi_1[z, \lambda_1(g_{12}^0 z + g_{22}^0)]}\,\varphi\left[\frac{g_{11}^0 z + g_{21}^0}{g_{12}^0 z + g_{22}^0}, \lambda_1\lambda\right]\frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\,d\mu(z). \tag{362}$$

Докажем, что функция $\omega_0(\lambda)=\gamma_0(t, \theta)$ принадлежит Γ'_c. В формуле (360) для $\varphi(z, \lambda)$ интегрирование по w_1 фактически ведется по области вида $0<\varepsilon_1\leqslant|w_1|\leqslant C_1$. Поэтому существует $\varphi_{\lambda^\alpha\bar{\lambda}^\beta}(z, \lambda)$ для $\alpha+\beta\leqslant 6$. Кроме того, для всех значений z функция $\varphi(z, \lambda)$ обращается в нуль вне области вида $0<\varepsilon\leqslant|\lambda|\leqslant C$. Дифференцируя обе части равенства (362) формально по λ, мы получаем

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}\omega_0(\lambda)}{\partial\lambda^\alpha\,\partial\bar{\lambda}^\beta}=$$

$$=\int|g_{12}^0z+g_{22}^0|^{-2}\overline{\varphi_1[z, \lambda_1(g_{12}^0z+g_{22}^0)]}\,\varphi_{\lambda^\alpha\bar{\lambda}^\beta}\left[\frac{g_{11}^0z+g_{21}^0}{g_{12}^0z+g_{22}^0}, \lambda_1\lambda\right]\lambda_1^\alpha\bar{\lambda}_1^\beta\frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\,d\mu(z). \tag{363}$$

Отсюда, по неравенству Шварца,

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\omega_0(\lambda)}{\partial\lambda^\alpha\,\partial\bar{\lambda}^\beta}\right|^2\leqslant\int|\varphi_1[z, \lambda_1(g_{12}^0z+g_{22}^0)]|^2\frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\,d\mu(z)\cdot$$

$$\cdot\int|g_{12}^0z+g_{22}^0|^{-4}\left|\varphi_{\lambda^\alpha\bar{\lambda}^\beta}\left[\frac{g_{11}^0z+g_{21}^0}{z_{12}^0g+g_{22}^0}, \lambda_1\lambda\right]\right||\lambda_1|^{2(\alpha+\beta)}\frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\,d\mu(z)=$$

$$=|\lambda|^{-2(\alpha+\beta)}\int|\varphi_1(z, \lambda_1)|^2\frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\,d\mu(z)\cdot$$

$$\cdot\int|\varphi_{\lambda^\alpha\bar{\lambda}^\beta}(z, \lambda_1)|^2|\lambda_1|^{2(\alpha+\beta)}\frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\,d\mu(z)=$$

$$=|\lambda|^{-2(\alpha+\beta)}\int|\omega_1(\lambda_1\sqrt{\overline{w}_1})|^2|\Psi_1(w_1)|^2\frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\,d\mu(w_1)\cdot$$

$$\cdot\int|\omega_{\lambda^\alpha\bar{\lambda}^\beta}(\lambda_1\sqrt{\overline{w}_1})|^2|w_1|^{2(\alpha+\beta)}|\lambda_1|^{2(\alpha+\beta)}\frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\,d\mu(w_1)=$$

$$=|\lambda|^{-2(\alpha+\beta)}\int\left|\omega_1(\lambda_1)\right|\frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\cdot\int|\Psi_1(w_1)|^2\,d\mu(w_1)\cdot$$

$$\cdot\int|\omega_{\lambda^\alpha\bar{\lambda}^\beta}(\lambda_1)|^2\,|\lambda_1|^{2(\alpha+\beta)}\frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\cdot\int|\Psi(w_1)|^2\,d\mu(w_1).$$

Эта оценка показывает, что интеграл (363) сходится равномерно относительно λ в любой области вида $0<\varepsilon\leqslant|\lambda|\leqslant C$, следовательно, дифференцирование по λ, $\bar{\lambda}$ под знаком интеграла является законным. Кроме того, из этой оценки следует, что функция

$$|\lambda|^{\alpha+\beta}\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\omega_0(\lambda)}{\partial\lambda^\alpha\,\partial\bar{\lambda}^\beta}\right|$$

ограничена. Положим $\gamma_0(t, \theta)=\omega_0(\lambda)$; тогда

$$|\lambda|^{\alpha+\beta}\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\omega_0(\lambda)}{\partial\lambda^\alpha\,\partial\lambda^\beta}\right|=\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\gamma}{\partial u^\alpha\,\partial\bar{u}^\beta}\right|,$$

следовательно, функция $\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\gamma}{\partial u^\alpha\,\partial\bar{u}^\beta}\right|$ ограничена при $0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 6$.

Пусть

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\gamma}{\partial u^\alpha\,\partial\bar{u}^\beta}\right|\leqslant C. \tag{364}$$

Докажем конечность нормы $\|\gamma_0\|_1$. Для этого достаточно доказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\gamma}{\partial u^\alpha\,\partial \bar{u}^\beta}\right| e^{(4+\varepsilon)t}\,dt\,d\theta < +\infty. \tag{365}$$

Действительно, тогда из неравенства (364) будет следовать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\gamma}{\partial u^\alpha\,\partial \bar{u}^\beta}\right|^2 e^{(4+\varepsilon)t}\,dt\,d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\gamma}{\partial u^\alpha\,\partial \bar{u}^\beta}\right| e^{(4+\varepsilon)t}\,dt\,d\theta < +\infty.$$

Переходя к функции $\omega_0(\lambda)$, мы видим, что достаточно доказать конечность интеграла

$$I = \int |\lambda|^m \left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\omega_0}{\partial \lambda^\alpha\,\partial\bar{\lambda}^\beta}\right| \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}, \tag{366}$$

где $m = \alpha+\beta+4+\varepsilon$. Этот интеграл есть функция от g_{11}^0, g_{12}^0, g_{21}^0, g_{22}^0. Поэтому достаточно, например, доказать существование интеграла $\int |I|\,d\mu(g_{21}^0)$ при фиксированных g_{12}^0, g_{22}^0. Но, из формулы (363) для $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}\omega}{\partial\lambda^\alpha\,g\bar{\lambda}^\beta}$ следует, что

$$\int |I|\,d\mu(g_{21}^0) < \int |g_{12}^0 z + g_{22}^0|^{-2}\,|\varphi_1[z, \lambda_1(g_{12}^0 z + g_{22}^0)]|\,\cdot$$

$$\cdot\left|\varphi_{\lambda^\alpha\bar{\lambda}^\beta}\left[\frac{g_{11}^0 z + g_{21}^0}{g_{12}^0 z + g_{22}^0},\ \lambda_1\lambda\right]\right| |\lambda_1|^{\alpha+\beta}\,|\lambda|^m \frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2}\,\frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}\,d\mu(z)\,d\mu(g_{21}^0). \tag{367}$$

Сделав подстановку

$$\nu_1 = \lambda_1(g_{12}^0 + g_{22}^0), \quad \nu = \lambda_1\lambda,$$

$$u = \frac{g_{11}^0 z + g_{21}^0}{g_{12}^0 z + g_{22}^0} = \frac{\dfrac{1+g_{12}^0 g_{21}^0}{g_{22}^0}\,z + g_{21}^0}{g_{12}^0 z + g_{22}^0}, \qquad z = z,$$

мы получим, что

$$\int |I|\,d\mu(g_{21}^0) \leqslant |g_{22}^0|^2 \int |g_{12}^0 z + g_{21}^0|^{2+\varepsilon}\,|\varphi_1(z, \nu_1)|\,|\varphi_{\lambda^\alpha\bar{\lambda}^\beta}(u, \nu)|\,|\nu|^m\,\cdot$$

$$\cdot\,|\nu_1|^{-4-\varepsilon}\,\frac{d\mu(\nu_1)}{|\nu_1|^2}\,\frac{d\mu(\nu)}{|\nu|^2}\,d\mu(z)\,d\mu(u) = |g_{22}^0|^2 \int |g_{12}^0 z + g_{21}^0|^{2+\varepsilon}\,|\varphi_1(z, \nu_1)|\,\cdot$$

$$\cdot\,|\nu_1|^{-4-\varepsilon}\,\frac{d\mu(\nu_1)}{|\nu_1|^2}\,d\mu(z)\cdot\int |\varphi_{\lambda^\alpha\bar{\lambda}^\beta}(u, \nu)|\,|\nu|^m\,\frac{d\mu(\nu)}{|\nu|^2}\,d\mu(u).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\int |\varphi_{\lambda^\alpha\bar{\lambda}^\beta}(z, \lambda)|\,|\lambda|^m\,\frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}\,d\mu(z) < +\infty \tag{368}$$

и

$$\int |g_{12}^0 z + g_{22}^0|^{2+\varepsilon}\,|\varphi_1(z, \lambda)|\,|\lambda|^{-4-\varepsilon}\,\frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}\,d\mu(z) < +\infty. \tag{369}$$

Так как функции $\varphi(z, \lambda)$, $\varphi_1(z, \lambda)$ для всех значений z обращаются в нуль вне множества вида $0 < \varepsilon \leqslant |\lambda| \leqslant C$, то интегралы

$$I_1 = \int |\varphi_{\lambda\alpha\bar{\lambda}\beta}(z, \lambda)| \, d\mu(z),$$

$$I_2 = \int |g_{12}^0 z + g_{22}^0|^{2+\varepsilon} |\varphi_1(z, \lambda)| \, d\mu(z)$$

обладают этим же свойством. Поэтому достаточно доказать, что интегралы I_1 и I_2 конечны. Последнее же следует из того, что в силу равенств (360) и (361), функции $\varphi_{\lambda\alpha\bar{\lambda}\beta}(z, \lambda)$, $\varphi_1(z, \lambda)$ являются трансформациями Фурье по w_1 функций от w_1, которые имеют, соответственно, непрерывные производные по w_1, $\overline{w_1}$ до второго и четвертого порядков включительно.

Тем самым доказано, что $\omega_0(\lambda) \in \Gamma_c'$ при некотором $C > 0$.

Итак, функции $x_1^* x_{g_0}$ соответствует функция $\tilde{\Phi}$, равная $\overline{\Phi_0(w_1)}\, \Phi_0(w_2)\, \omega_0(\lambda)$, где $\omega_0(\lambda) \in \Gamma_c'$. Поэтому скалярное произведение $(x_{g_0}, x_1) = F(x_1^* x_{g_0})$ есть значение функционала $F(\omega)$ на функции $\omega_0 = \gamma_0$ из Γ_c', определенное формулой (339) п. 6. Таким образом,

$$(x_{g_0}, x_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int \omega_0(\lambda) |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \right] dc_n(\rho) + \\ + \int_0^2 \left[\int \omega_0(\lambda) |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} \right] dc(\rho_1). \tag{370}$$

Из формул (354) и (357) следует, что при действительном ρ

$$\int \omega_0(\lambda) |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \, d\mu(\lambda) = \int \overline{f_1(z, n, \rho)}\, f_{g_0}(z, n, \rho) \, d\mu(z). \tag{371}$$

Другими словами, этот интеграл есть скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{H}_Z$.

Вычислим теперь интеграл

$$\int \omega_0(\lambda) |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}, \quad 0 < \rho_1 \leqslant 2.$$

Положим для этого

$$f(z, \rho_1) = \int \varphi(z, \lambda) |\lambda|^{\rho_1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}, \tag{372}$$

$$f_1(z, \rho_1) = \int \varphi_1(z, \lambda) |\lambda|^{\rho_1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}. \tag{373}$$

Функция $f(z, \rho_1)$ также определена для любой функции $x(g) \in \mathfrak{M}_{\Phi_0}$. При переходе от $x(g)$ к $x_{g_0}(g) = x(g_0^{-1} g)$ функция $f(z, \rho_1)$ в ядре

$$K(z_1, z_2, n, \rho) = f(z_1, n, \rho) f_0(z_2, n, \rho)$$

переходит в

$$f_{g_0}(z_1, n, \rho) = |g_{12}^0 z_1 + z_{22}^0|^{n+i\rho-2} (g_{12}^0 z_1 + g_{22}^0)^{-n} f\left(\frac{g_{11}^0 z_1 + g_{21}^0}{g_{12}^0 z_1 + g_{22}^0}, n, \rho \right);$$

поэтому функция $\varphi(z, \lambda)$ переходит в

$$\varphi_{g_0}(z_1, \lambda) = |g_{12}^0 z_1 + g_{22}^0|^{-2} \varphi\left[\frac{g_{11}^0 z_1 + g_{21}^0}{g_{12}^0 z_1 + g_{22}^0}, \lambda (g_{12}^0 z_1 + g_{22}^0)^{-1}\right]. \qquad (374)$$

Отсюда следует, что функция $f(z, \rho_1)$ переходит в

$$f_{g_0}(z, \rho_1) = |g_{12}^0 z_1 + g_{22}^0|^{-2-\rho_1} f\left(\frac{g_{11}^0 z_2 + g_{21}^0}{g_{12}^0 z_1 + g_{22}^0}, \rho_1\right). \qquad (375)$$

Другими словами, при сдвиге $g \to g_0^{-1} g$ функция $f(z, \rho_1)$, рассматриваемая как функция от z, преобразуется по представлению $U_{\rho_1; g}$ дополнительной серии.

Из определения (372) функции $f(z, \rho_1)$ следует, что в случае четной функции $\omega(\lambda)$

$$f(z, \rho_1) = \frac{1}{2\pi} \int \omega(\lambda \sqrt{\overline{w_1}}) \Psi(w_1) e^{-i\mathrm{Re}(z_1 \overline{w_1})} |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} d\mu(w_1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int a_{\rho_1} \Psi(w_1) |w_1|^{\frac{\rho_1}{2}} e^{-i\mathrm{Re}(z_1 \overline{w_1})} d\mu(w_1),$$

где

$$a_{\rho_1} = \int \omega(\lambda) |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}.$$

Другими словами, функция $f(z, \rho_1)$ есть трансформация Фурье по w_1 функции

$$\psi(w_1, \rho_1) = a_{\rho_1} \Psi(w_1) |w_1|^{-\frac{\rho_1}{2}}.$$

Легко проверить, что это обстоятельство остается верным и в случае нечетной функции $\omega(\lambda)$.

Функция $\psi(w_1, \rho_1)$, рассматриваемая как функция от w_1, есть элемент пространства H_{ρ_1} (см. п. 1 § 8). В силу только что сказанного, при сдвиге $x(g) \to x(g_0^{-1} g)$ она переходит в

$$\psi_{g_0}(w_1, \rho_1) = U_{\rho_1; g_0} \psi(w_1, \rho_1),$$

где $U_{\rho_1; g_0}$ — оператор представления дополнительной серии в пространстве H_{ρ_1}. Заметим еще, что $\omega(\lambda^{-1}) = \omega(\lambda)$, следовательно, $a_{-\rho_1} = a_{\rho_1}$. Отсюда

$$\psi(w_1, -\rho_1) = a_{-\rho_1} \Psi(w_1) |w_1|^{\frac{\rho_1}{2}} = |w_1|^{-\rho_1} \psi(w_1, \rho_1). \qquad (376)$$

Вернемся теперь к интегралу $\int \omega_0(\lambda) |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}$. Из определения (362) функции $\omega_0(\lambda)$ следует, что этот интеграл равен

$$\int \left[\int \overline{\varphi_1(z, \lambda_1)} \varphi_{g_0}(z, \lambda\lambda_1) \frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2} d\mu(z)\right] |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2},$$

а из оценок (367), (368) и (369) следует, что он сходится абсолютно. Поэтому можно изменить порядок интегрирования:

$$\int \omega_0(\lambda) |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\mu(\lambda_1)}{|\lambda_1|^2} = \int \overline{f_1(z, -\rho_1)} f_{g_0}(z, \rho_1) d\mu(z) =$$

$$= \int \overline{\psi_1(w, -\rho_1)} \psi_{g_0}(w, \rho_1) d\mu(w).$$

В силу (376), последнее равенство можно переписать в виде

$$\int \omega_0(\lambda) |\lambda|^{-\rho_1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} = \int |w|^{-\rho_1} \overline{\psi_1(w, \rho_1)}\, \psi_{g_0}(w, \rho_1)\, d\mu(w), \tag{377}$$

т. е. искомый интеграл есть скалярное произведение функций $\psi_1(w, \rho_1)$, $\psi_{g_0}(w, \rho_1)$ в пространстве H_{ρ_1}.

При $\rho_1 = 2$ все функции $f_1(z, 2)$ удовлетворяют условию

$$\int f_1(z, 2)\, d\mu(z) = 0. \tag{378}$$

Действительно, это очевидно для тех функций $f_1(z, 2)$, которые соответствуют функции $x(g) \in S_{\Phi_0}$, ибо в этом случае трансформацией Фурье функции $f_1(z, 2)$ будет $a_2 \Psi(w_1) |w_1|^{\frac{\rho_1}{2}}$, а эта функция обращается в нуль при $w_1 = 0$.

С другой стороны, равенство (378) сохраняется при сдвиге $x(g) \to x(g_0^{-1} g)$, ибо при этом сдвиге $f_1(z, 2)$ переходит в

$$|g_{11}^0 z + g_{21}^0|^{-4} f_1\left(\frac{g_{11}^0 z + g_{21}^0}{g_{12}^0 z + g_{22}^0},\ 2\right).$$

Поэтому равенство (378) имеет место для всех функций $f_1(z, 2)$, которые соответствуют функциям $x(g)$ из $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$. Это означает, что трансформация Фурье $\varphi_1(w, 2)$ функции $f_1(z, 2)$ обращается в нуль при $w = 0$, так что существует интеграл

$$\int \left| \frac{\varphi_1(w, 2)}{w} \right|^2 d\mu(w).$$

Отсюда следует, что при $\rho_1 = 2$

$$\int \omega_0(\lambda) |\lambda|^{-2} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2} = \int |w|^{-2} \overline{\psi_1(w, 2)}\, \psi_{g_0}(w, 2)\, d\mu(w). \tag{379}$$

Каждой функции $f_1(z, 2)$ поставим в соответствие функцию $f(z)$ с суммируемым квадратом и такую, что $f'_{\bar z}(z) = f_1(z, 2)$. Введем в совокупности этих функций $f(z)$ скалярное произведение, полагая

$$(f, f) = \int |f(z)|^2 d\mu(z).$$

Равенство (379) показывает, что соответствие $f(z) \sim f_1(z, 2)$ изометрично. Если $f(z)$ преобразуется оператором $U_{2,0;g_0}$ основной серии, т. е. переходит в

$$(g_{12}^0 z + g_{22}^0)^{-2} f\left(\frac{g_{11}^0 z + g_{21}^0}{g_{12}^0 z + g_{22}^0}\right),$$

то $f_{\bar z}(z)$ переходит в

$$|g_{12}^0 z + g_{22}^0|^{-4} f\left(\frac{g_{11}^0 z + g_{21}^0}{g_{12}^0 z + g_{22}^0}\right),$$

т. е. преобразуется так же, как функция $f_1(z, 2)$.

Поэтому при $\rho_1 = 2$ представление эквивалентно представлению $U_{2,0;g_0}$ основной серии, соответствующему $n = 2$ и $\rho = 0$.

Подставляя выражения (371) и (377) в формулу (370) для скалярного произведения, мы получим

$$(x_{g_0}, x_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int \overline{f_1(z, n, \rho)} f_{g_0}(z, n, \rho) d\mu(z) \right] dc_n(\rho) + \\ + \int_0^2 \left[\int |w|^{-\rho_1} \overline{\psi_1(w, \rho_1)} \psi_{g_0}(w, \rho_1) d\mu(w) \right] dc(\rho). \tag{380}$$

Эта формула выведена нами в предположении, что $x, x_1 \in S_{\Phi_0}$. Но при сдвиге $x(g) \to x(g_0^{-1}g)$, $x_1(g) \to x_1(g_0^{-1}g)$ левая и правая части этого равенства остаются инвариантными. Поэтому равенство (380) имеет место для всех функций x, x_1 из $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{H}_0$ всех пар измеримых функций $f = \{f(z, n, \rho), \psi(w, \rho_1)\}$ таких, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int |f(z, n, \rho)|^2 d\mu(z) dc_n(\rho) + \\ + \int_0^2 \left[\int |w|^{-\rho_1} |\psi(w, \rho_1)|^2 d\mu(w) \right] dc(\rho_1) < +\infty. \tag{381}$$

При этом измеримость по отношению к ρ и ρ_1 следует рассматривать по отношению к $c_n(\rho)$ и $c(\rho_1)$ соответственно.

Определим в $\mathfrak{H}_0$ обычным образом операции сложения и умножения на скаляр. Далее, определим в $\mathfrak{H}_0$ скалярное произведение равенством

$$(f, f_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int f(z, n, \rho) \overline{f_1(z, n, \rho)} d\mu(z) \right] dc_n(\rho) + \\ + \int_0^2 \left[\int |w|^{-\rho_1} \psi(w, \rho_1) \overline{\varphi_1(w, \rho_1)} d\mu(w) \right] dc(\rho_1).$$

Из формулы (380) при $g_0 = e$ следует, что установленное нами выше соответствие

$$x(g) \sim \{f(z, n, \rho), \ \psi(w, \rho_1)\}$$

есть изометрическое отображение $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ в $\mathfrak{H}_0$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\Phi_0}$ замыкание многообразия $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Наше соответствие можно продолжить, и притом единственным образом, до изометрического отображения пространства $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\Phi_0}$ в пространство $\mathfrak{H}_0$.

Докажем, что образом пространства $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\Phi_0}$ при этом отображении является все пространство $\mathfrak{H}_0$. Для этого перейдем от функций $f(z, n, \rho)$ к их трансформациям Фурье по w:

$$\psi(w, n, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int f(z, n, \rho) e^{i\mathrm{Re}(z_1 \overline{w}_1)} d\mu(z).$$

Если $x(g) \in S_{\Phi_0}$, то из формул (341) и (349) следует

$$\psi(w, n, \rho) = |w_1|^{-\frac{n+i\rho}{2}} \overline{w}_1^{\frac{n}{2}} \Psi(w_1) a_{n,\rho} \tag{382}$$

в случае четного n и

$$\psi(w, n, \rho) = |w_1|^{-\frac{n-1+i\rho}{2}} \overline{w}_1^{\frac{n-1}{2}} \Psi(w_1) a_{n,\rho} \tag{383}$$

в случае нечетного n, где

$$a_{n,\rho} = \int \omega(\lambda) |\lambda|^{n+i\rho} \lambda^{-n} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|^2}.$$

При этом $\Psi(w_1)$—произвольная функция, имеющая непрерывные производные до четвертого порядка включительно и равная нулю вне множества вида $0 < \varepsilon_2 \leqslant |w_1| \leqslant C_1$, а $\omega(\lambda)$—произвольная функция, имеющая непрерывные производные до восьмого порядка включительно и равная нулю вне множества вида $0 < \varepsilon \leqslant |\lambda| \leqslant C$. Поэтому линейные комбинации функций вида (382), (383) образуют в $\mathfrak{H}_0$ плотное множество. Следовательно, образ пространства $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ должен совпадать с $\mathfrak{H}_0$.

Итак, мы получили изометрическое отображение

$$x(g) \sim \{f(z, n, \rho),\ \psi(w, \rho_1)\}$$

пространства $\tilde{\mathfrak{M}}_{\Phi_0}$ на $\mathfrak{H}_0$. Формула (380) показывает, что применение оператора U_{g_0} нашего представления в пространстве $\tilde{\mathfrak{M}}_{\Phi_0}$ сводится к применению к соответствующим функциям $f(z, n, \rho)$, $\psi(w, \rho_1)$ операторов $U_{n,\rho;g_0}$, $U_{\rho_1;g_0}$ представлений основной и дополнительной серий. Это означает, что наше представление в инвариантном подпространстве $\tilde{\mathfrak{M}}_{\Phi_0}$ эквивалентно прямой сумме представлений основной и дополнительной серий. В частности, если оно неприводимо, то оно эквивалентно одному из представлений основной или дополнительной серий.

Рассмотрим теперь данное представление в ортогональном дополнении $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}_{\Phi_0}$. Повторяя тот же прием, мы снова выделим из $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}_{\Phi_0}$ инвариантное пространство, в котором наше представление эквивалентно прямой сумме представлений основной и дополнительной серий. После конечного или счетного числа таких шагов остается инвариантное подпространство $\mathfrak{N}$, для которого возможны только следующие два случая:

a) $\mathfrak{N} = (0)$;

b) для любого вектора $f \in \mathfrak{N}$ и для любой функции $x(g) \in \mathfrak{A}$ (см. п. 4) имеет место равенство

$$\int x(g)(U_g f, f)\, d\mu(g) = 0.$$

Согласно лемме 2, доказанной в п. 4, в случае b) $U_g \equiv E$ в $\mathfrak{N}$.

Тем самым доказаны следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 13. *Всякое унитарное представление группы G разлагается в прямую сумму представлений основной и дополнительной серий.*

ТЕОРЕМА 14. *Всякое неприводимое унитарное представление группы G эквивалентно одному из представлений основной или дополнительной серий.*

Отметим еще, что при любом комплексном ρ из полосы I и любом целом n наши формулы определяют также представление $U_{n,\rho;g}$ группы G, но уже не в гильбертовском пространстве, а в пространстве L_p всех функций $f(z)$ таких, что

$$\|f\|^p = \int |f(z)|^p d\mu(z) < +\infty,$$

где

$$p = \frac{4}{\rho_2 + 2}, \quad \rho = \rho_1 + i\rho_2.$$

Легко проверить, что оператор $U_{n,\rho;g}$ сохраняет норму $\|f\|$ в пространстве L_p.

Поступило
25.III.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dirac P. A. M., Proc, Roy. Soc. A., 183 (1945), 284.

[2] Гельфанд И., Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве, Доклады Ак. Наук СССР, XXV (1939), 711—716.

[3] Gelfand I. and Neumark M., Unitary representations of the Lorentz group, Journal of Physics, X (1946), 93—94.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

11 (1947), 505—538

Б. Н. ДЕЛОНЕ

АЛГОРИФМ РАЗДЕЛЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

В статье рассматривается новый алгорифм и одно его приложение к задаче Минковского о произведении двух линейных неоднородных выражений от двух переменных.

Пусть в n-мерном эвклидовом пространстве задана некоторая область γ и рассматриваются все n-мерные решетки, вовсе не имеющие точек в области γ, кроме точек, обусловленных некоторым так называемым дополнительным условием. Такие решетки называются допустимыми.

Всякие непрерывные преобразования допустимой решетки, при которых она все время остается допустимой решеткой, называются допустимыми преобразованиями.

Допустимая решетка, не имеющая таких непрерывных допустимых преобразований, которые лишь уменьшают объем ее основного параллелепипеда, называется предельной.

Мы предлагаем задачу отыскания предельных решеток для заданной области γ и данного дополнительного условия называть «задачей Маркова».

Наиболее важные результаты в решении этой задачи принадлежат петербургским математикам А. Н. Коркину, Е. И. Золотареву, А. А. Маркову и Г. Ф. Вороному.

Коркин и Золотарев первые рассмотрели эту задачу для случая, когда γ есть шар и дополнительное условие состоит в том, что одна точка решетки лежит в центре шара. Они вполне решили эту задачу для $n=2$, 3, 4 и 5. Оказалось, что предельных решеток, соответственно, одна, одна, две и три. Эти работы Коркина и Золотарева о положительных квадратичных формах были напечатаны в Math. Annalen в 1872, 1873 и 1877 гг.

В 1880 г. появилась замечательная магистерская диссертация Маркова «О бинарных квадратичных формах положительного определителя», в которой с большим изяществом и полнотой был решен вопрос о разыскании всех предельных решеток с площадями основных параллелограммов $s \leqslant 3$ для $n=2$ области $|uv|<1$ и дополнительного условия, заключающегося в том, что одна точка решетки лежит в центре этой области. Оказалось, что в этом случае все предельные решетки с $s<3$, если их расположить по возрастанию s, образуют бесконечную последовательность, причем площади их, начиная с $s_1=\sqrt{5}$, $s_2=\sqrt{8}$,

$s_3 = \sqrt{\frac{221}{25}}$, ..., возрастая, приближаются к пределу, равному 3; для $s = 3$ существует бесконечно много разных предельных решеток. Кроме того, оказалось, что каждая предельная решетка с $s < 3$ взаимно однозначно связана с некоторым решением в целых числах неопределенного уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3\,xyz.$$

Вороной в своей работе [1] дал алгорифм для разыскания всех предельных решеток для случая Коркина и Золотарева при любом заданном n и таким образом решил до конца задачу Маркова для n-мерного шара и одной точки в его центре.

Минковский в работе [2] первый заметил, что случай Коркина и Золотарева можно рассматривать как задачу о плотнейшем параллелепипедальном расположении шариков в n-мерном пространстве и в работе [3] показал, что процент занимаемого шариками пространства при любом n для некоторых расположений больше чем

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots\right).$$

В 1911—1926 гг. I. Schur, Frobenius и Remack занимались марковским случаем задачи Маркова и сделали ряд интересных и тонких замечаний. Сам А. А. Марков в работах [4], [5] и [6] нашел первые четыре предельные решетки для случая неопределенных тройничных квадратичных форм и две первые решетки для неопределенных квадратичных форм с четырьмя переменными, т. е. для случаев, когда $n = 3$, область γ есть $|x^2 + y^2 - z^2| < 1$, одна точка в ее центре, и когда $n = 4$, область γ есть $|x^2 + y^2 + z^2 - t^2| < 1$, одна точка в ее центре.

Венков в работе [7] нашел недавно еще семь дальнейших предельных решеток для этого случая и выяснил значение внешних к конусу $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ вершин.

Bleichfeldt и Hofreiter нашли первые предельные решетки для случая Коркина и Золотарева при $n = 6, 7, 8, 9$ и 10.

В последнее время снова поднялся интерес к марковской задаче. В 1941—1946 гг. Davenport, Mordell, Mahler, Segre и др. дали ряд интересных новых результатов. Эти ученые опубликовали более 20 работ, в которых нашли первые экстремальные кубические двойничные формы положительного и отрицательного определителя и первую предельную решетку для области $|uvw| < 1$ в пространстве и одной точки в центре ее, т. е. экстремальное произведение трех линейных форм с тремя переменными, и то же самое для случая, когда две из этих форм комплексно сопряженные и т. д.

Наиболее интересными в этом направлении мне кажутся работы Davenport'а [8], в которой он показывает, что в случае кубических двойничных форм есть формы (предельные решетки) с площадями основных параллелограммов, сколь угодно близкими к минимальным, как в случае $D > 0$, так и в случае $D < 0$, и [9], в которой он нахо-

дит вторую предельную решетку для случая $|uvw| < 1$ с одной точкой в центре и доказывает, что в отношении объема своего основного параллелепипеда эта решетка, как и первая, лежит изолированно.

Интересные общие теоремы получил Mordell в работе ([10]) относительно предельных решеток для областей γ на плоскости, аналогичных области $|uv| < 1$.

В моей работе ([11]) рассматривается один естественный для этого круга вопросов метод и при помощи него находится первая предельная решетка для случая кубической двойничной формы положительного определителя.

В самое последнее время Горшков в Ленинграде дал изящное, чисто геометрическое решение марковского случая, включая связь с неопределенным уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, путем обобщения для $n = 2$ теории совершенных форм Вороного на случай неопределенных квадратичных форм и рассмотрения затем всего вопроса в плоскости Лобачевского.

Еще в своей работе ([12]) Минковский, видоизменяя постановку вопроса, рассмотренного Чебышевым в работе «Об одном арифметическом вопросе», 1866, начал рассматривать задачу о минимумах произведения двух неоднородных линейных выражений с двумя переменными $(\alpha x + \beta y - \xi_0)(\gamma x + \delta y - \eta_0)$, т. е. марковскую задачу для $n = 2$ области $|uv| < 1$ и условия, состоящего в том, что в этой области вовсе нет точек рассматриваемых решеток. Из сравнительно сложных соображений Минковский нашел первую предельную решетку для этого случая при помощи так называемых Diagonalkettenbrüche. Будем называть эту решетку предельной решеткой Минковского.

Минковский также поставил аналогичный вопрос о произведении n линейных неоднородных выражений с n переменными и высказал некоторое предположение относительно первой предельной решетки в этом случае. Предположение это было доказано для $n = 3$ в замечательном и очень трудном мемуаре Remack'а в 1923 г., причем Davenport'у в 1939 г. удалось существенно упростить это доказательство. Для $n > 3$ предположение Минковского до сих пор и не опровергнуто и не доказано.

В настоящей работе в § 1 я кратко напоминаю свойства обычного алгорифма непрерывных дробей и связь его со случаем Маркова задачи Маркова, т. е. когда область γ есть $|uv| < 1$ и одна точка в центре.

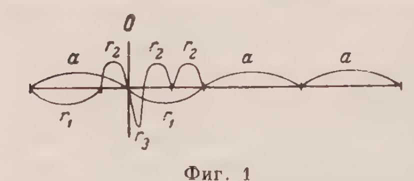
Алгорифм непрерывных дробей или близкий ему алгорифм Diagonalkettenbrüche Минковского вообще играет роль в тех случаях, когда рассматривается двухмерная решетка по отношению к некоторым осям, проходящим через одну из ее точек. Если же оси u, v не проходят через точку решетки, как это имеет место в случае Минковского задачи Маркова, то нужен, я думаю, совсем другой алгорифм. Такой алгорифм, называемый мною «алгорифм разделенных параллелограммов», я рассматриваю в § 2.

В § 3 я даю приложение этого алгорифма к задаче Минковского, а именно, при помощи этого алгорифма я показываю, что в случае Минковского имеется последовательность предельных решеток Γ_n, площади основных параллелограммов которых s_n, начиная с $s_1 = 4\sqrt{2}$, уменьшаясь, стремятся к пределу, равному 4. С этой точки зрения предельная решетка Минковского, имеющая площадь, равную 4, может быть обозначена через Γ_∞.

Наконец, в § 4 я показываю, что в случае $n=3$, когда на плоскостях координат uv, vw, wu вовсе нет точек решетки, в решетке все же **может не быть** разделенного параллелепипеда.

§ 1. Алгорифм непрерывных дробей и его связь с задачей Маркова для неопределенной двойничной квадратичной формы

1. Геометрия непрерывных дробей. Алгорифм Эвклида для разыскания общей меры двух отрезков a и b состоит, как известно, в следующем. На большем отрезке b откладывают меньший отрезок a наибольшее возможное число α_0 раз и получают первый остаток r_1. Этот первый остаток откладывают на меньшем отрезке наибольшее возможное число α_1 раз и получают второй остаток r_2. Этот второй остаток откладывают на первом остатке r_1 наибольшее возможное число α_2 раз и получают третий остаток r_3 и т. д. Если какой-либо остаток r_n отложится на предыдущем остатке r_{n-1} так, что r_{n-1} окажется целиком покрытым и следующего остатка уже не получится, то r_n есть наибольшая общая мера отрезков a и b; если же этот процесс будет продолжаться без конца, то a и b несоизмеримы. Целые положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ называются неполными частными.



Фиг. 1

Наиболее разумно расположить отрезки a и b встык на одной прямой по разные стороны от некоторой ее точки O и откладывать последующие отрезки на предыдущих от их концов внутрь так, чтобы последовательные остатки скапливались по обе стороны точки O (фиг. 1).

«Распроектируем» это построение на плоскость. Именно, возьмем некоторую прямую v и восставим к ней в любых ее точках перпендикуляры длин a и b. Затем, из произвольной ее точки O проведем векторы $\mathfrak{A}_{-1}$ в конец A_{-1} перпендикуляра b и $\mathfrak{A}_0$ в конец A_0 перпендикуляра a, но так, чтобы они не были коллинеарны, т. е. чтобы векторы $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$ образовали репер. Будем теперь вытягивать из конца A_{-1} вектора $\mathfrak{A}_{-1}$ «нос», равный наибольшему целому положительному кратному α_0 вектора $\mathfrak{A}_0$ такому, чтобы конец A_1 этого «носа» был еще по ту же сторону от оси v, где лежит вектор $\mathfrak{A}_{-1}$; так мы получим

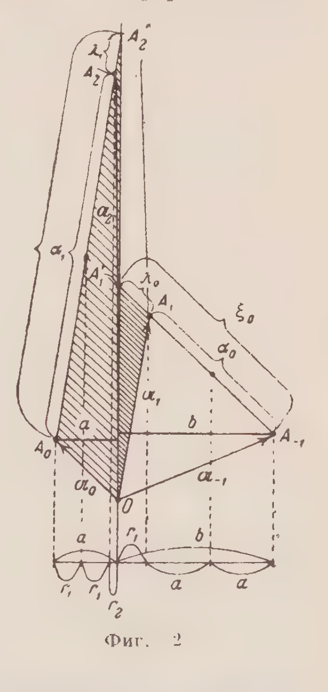
вектор $\mathfrak{A}_1$. Будем, далее, из конца A_0 вектора $\mathfrak{A}_0$ вытягивать «нос», равный наибольшему целому положительному кратному α_1 вектора $\mathfrak{A}_1$ такому, чтобы конец A_2 этого «носа» был еще по ту же сторону от оси v, где лежит вектор $\mathfrak{A}_0$; так мы получим вектор $\mathfrak{A}_2$ и т. д. Очевидно, что длинами перпендикуляров, опущенных на прямую v из точек $A_1, A_2, \ldots$, как раз и будут остатки $r_1, r_2, \ldots$, и если спроектировать получающуюся фиг. 2 на прямую, перпендикулярную оси v, то получится фиг. 1.

Будем рассматривать фиг. 2 аффинно, т. е. будем считать $\xi_0\lambda_0, \xi_1\lambda_1, \ldots$ длинами соответственных отрезков $A_{-1}A_1, A_1A_1', A_0A_2, A_2A_2'$, измеренными длинами векторов $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$, которым они параллельны. В таком случае $\xi_0 = \alpha_0 + \lambda_0$ и из подобия треугольников OA_1A_1' и $A_2'A_0O$ будет следовать $\lambda_0 = \frac{1}{\xi_1}$ и т. д., т. е. мы получаем

$$\xi_0 = \alpha_0 + \frac{1}{\xi_1} = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \lambda_1} =$$

$$= \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\xi_2}} = \ldots =$$

$$= \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n + \lambda_n}}}}.$$



Фиг. 2

Мы видим, следовательно, что ξ_0 раскладывается в непрерывную дробь

$$\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots}}$$

Число ξ_0 есть, очевидно, не что иное, как угловой коэффициент прямой v по отношению к реперу $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$, т. е. отношение $\frac{y}{x}$, где x, y — координаты произвольной точки этой прямой по отношению к реперу $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$.

Докажем сходимость произвольной непрерывной дроби

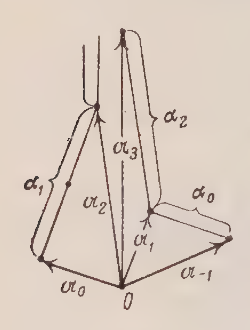
$$\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots}}$$

Очевидно, это достаточно сделать для случая, когда она бесконечная.

Возьмем совершенно произвольный репер $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$, но при этом не будем рассматривать никакой прямой v и будем производить алгорифм вытягивания «носов» соответственно целым положительным числам $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ (фиг. 3). Так будут получаться последовательные векторы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots$

Покажем, что существует одна и только одна такая прямая v, проходящая через начало O, что направления последовательных векторов $\mathfrak{A}_i$ стремятся к направлению этой прямой, как к предельному, и что по отношению к этой прямой все нечетные векторы лежат по одну ее сторону, а все четные — по другую. Действительно, это следует из того, что:

1° по самому построению, всякий следующий угол $\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_{i+1}$ содержится в предыдущем $\mathfrak{A}_{i-1}\mathfrak{A}_i$ и



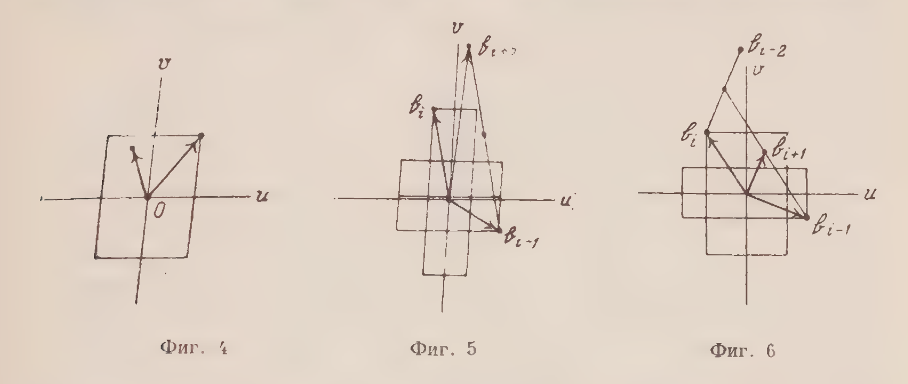
Фиг. 3

2° величины этих углов приближаются к нулю, так как площади параллелограммов $(\mathfrak{A}_{-1}, \mathfrak{A}_0)$, $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$, $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2), \ldots$ очевидно все одинаковы по абсолютной величине, так как всякие два смежные из этих параллелограммов имеют общее основание и одинаковые высоты, а длины их сторон $|\mathfrak{A}_i|$ бесконечно растут, так как координаты векторов $\mathfrak{A}_i$ по отношению к исходному реперу $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$ получаются только прибавлением целых положительных координат.

Рассмотрим теперь некоторую решетку Γ и две прямые u и v, проходящие через некоторую точку O этой решетки так, что *на них нет других точек решетки*. Любой основной репер решетки такой, что конец второго его вектора лежит дальше от оси u, чем конец первого, и по ту же от нее сторону и ближе к оси v, чем конец первого, и по другую от нее сторону, называется *приведенным* репером решетки Γ по отношению к оси v.

Покажем, что в любой решетке Γ есть, и даже бесконечно много, приведенных реперов. Возьмем какой-нибудь произвольный основной репер решетки Γ и, если он не охватывает оси v, заменим один из его векторов на обратный; такой репер уже будет охватывать ось v (может быть он одновременно охватывает и ось u, но это нам безразлично). Будем теперь, исходя от репера, охватывающего ось v, производить алгорифм вытягивания «носов» по отношению к оси v и получать таким образом последовательные основные реперы, охватывающие ось v. После конечного числа шагов алгорифма мы получим приведенный репер. Действительно, при последовательных шагах алгорифма абсолютная величина координаты u (по отношению к осям u, v) всякого следующего вектора меньше, чем у предыдущего. Если бы и координата v все уменьшалась по абсолютной величине, то конец всякого следующего вектора лежал бы в «координатном параллелограмме» конца предыдущего (фиг. 4) вектора, а следовательно, и подавно,

в координатном параллелограмме того вектора, с которого началось это уменьшение. Но в этом параллелограмме находится лишь конечное число точек решетки Г. Следовательно, на некотором конечном шаге случится, что конец последующего вектора будет лежать дальше от оси u, чем конец предыдущего (две точки Г не могут иметь одинаковых координат u или одинаковых координат v, так как тогда вектор, их соединяющий, был бы параллелен соответствующей оси, и на этой оси, кроме точки O, были бы еще точки решетки, вопреки нашему



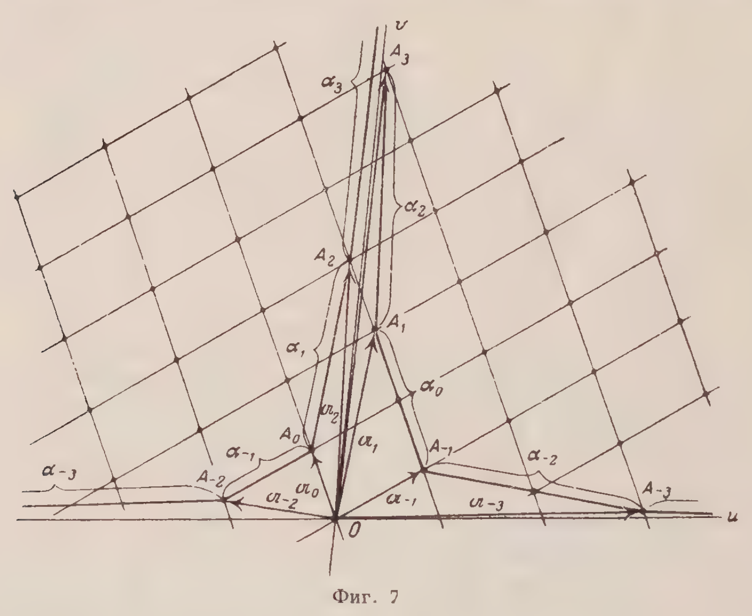
Фиг. 4 Фиг. 5 Фиг. 6

предположению). Если при этом оба вектора рассматриваемого репера $\mathfrak{b}_{i-1}\mathfrak{b}_i$ лежат по одну сторону от оси u, то он уже приведенный. Если же нет, то возможны два случая: либо следующее неполное частное $\alpha_i > 1$ и тогда (см. фиг. 5) уже следующий репер алгорифма $\mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_{i+1}$ приведенный, либо $\alpha_i = 1$ (см. фиг. 6) и тогда лишь еще следующий репер $\mathfrak{b}_{i+1}\mathfrak{b}_{i+2}$ приведенный.

Если мы нашли приведенный репер, то все следующие за ним реперы, получаемые алгорифмом, как легко видеть, уже приведенные. Изложенное сейчас представляет собою геометрическую сущность знаменитой теории Лагранжа приведения неопределенных двойничных квадратичных форм.

Если репер $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$ какой-угодно приведенный вдоль оси v, то, начиная от него, алгорифм вытягивания «носов» по отношению к оси v дает приведенные реперы $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, ..., последующие за $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$. Алгорифм же вытягивания «носов» вдоль оси u, который состоит в том, что из точки A_0 (фиг. 7) откладывается вектор $\mathfrak{A}_{-1}$ наибольшее по абсолютной величине целое отрицательное число $-\alpha_{-1}$ раз такое, чтобы конец A_{-2} построенного «носа» еще лежал по ту же сторону от оси u, где лежит вектор $\mathfrak{A}_0$, и так получается вектор $\mathfrak{A}_{-2}$; затем, из точки A_{-1} откладывается вектор $\mathfrak{A}_{-2}$ наибольшее по абсолютной величине целое отрицательное число $-\alpha_{-2}$ раз такое, чтобы конец A_{-2} построенного «носа» еще лежал по ту же сторону от оси u, где лежит вектор $\mathfrak{A}_{-1}$, и так получается вектор $\mathfrak{A}_{-3}$ и т. д., дает последовательные приведенные реперы $\mathfrak{A}_{-2}\mathfrak{A}_{-1}$, $\mathfrak{A}_{-3}\mathfrak{A}_{-2}$, ..., «предыдущие» по отношению к реперу $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$.

Пусть $\mathfrak{A}_{-1}$ лежит в первом координатном угле осей u, v. Покажем, что полигон Π_1 с последовательными вершинами $\ldots, A_{-3}, A_{-1}, A_1, A_3, \ldots$ есть граница выпуклой оболочки совокупности Γ_1 точек решетки Γ, лежащих в первом координатном угле, а полигон $\ldots, A_{-2}, A_0, A_2, \ldots$ есть граница выпуклой оболочки совокупности Γ_2 точек решетки Γ, лежащих во втором координатном угле. Действительно, треугольник, отрезаемый от соответственного координатного угла прямой стороны A_iA_{i+2} такого полигона, не имеет точек внутри себя, так как репер $\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_{i+2}$ основной и, следовательно, этот треугольник лежит в полоске между линейным рядом OA_{i+2} решетки Γ и ближайшим к нему ее



Фиг. 7

параллельным рядом A_iA_{i+2}. Часть плоскости, заключенная между сторонами рассматриваемого координатного угла и лежащего в нем полигона Π, вся перекрывается такими треугольниками и, следовательно, не содержит в себе точек решетки. Остальная же часть этого координатного угла, как пересечение полуплоскостей, отрезаемых осью u, осью v и прямыми сторон этого полигона, есть выпуклый открытый многоугольник, причем совокупность точек A_i есть совокупность его вершин.

Мы видим, таким образом, что от какого бы приведенного репера $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$ ни исходить, если производить, начиная от него, алгорифм вытягивания «носов» как вдоль оси v, так и вдоль оси u, мы будем получать одну и ту же совокупность точек A_i, а именно, все вершины границ выпуклых оболочек совокупностей Γ_1 и Γ_2.

Полигоны Π_1 и Π_2 называются **полигонами Клейна**, векторы $\mathfrak{A}_i$ — **векторами** этих полигонов, а точки A_i — **подходящими точками** решетки Γ по отношению к осям u и v.

Как мы видим, полигоны Π_1 и Π_2 в следующем смысле взаимны: *всякая сторона первого из них параллельна одному из векторов второго и по длине является целой кратностью длины этого вектора, и обратно.*

Таким образом, если задана решетка Γ и оси u и v, проходящие через одну из ее точек O и не имеющие на себе других точек этой решетки, то тем самым задан бесконечный в обе стороны ряд целых положительных чисел α_i, а именно, ряд последовательных неполных частных этой решетки по отношению к осям u, v:

$$\ldots, \alpha_{-4}, \alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \qquad (\alpha)$$

Покажем обратное, что произвольный бесконечный в обе стороны ряд целых положительных чисел (α) есть ряд последовательных неполных частных некоторой решетки Γ по отношению к данным осям u и v. Действительно, возьмем произвольный репер $\mathfrak{A}'_{-1}\mathfrak{A}'_0$ и будем производить по отношению к нему алгорифм вытягивания «носов» соответственно неполным частным $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$; так получится некоторая прямая v', а по отношению к реперу $-\mathfrak{A}'_0\mathfrak{A}'_{-1}$, «смежному» с $\mathfrak{A}'_{-1}\mathfrak{A}'_0$, будем производить тот же алгорифм соответственно неполным частным $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \alpha_{-3}, \ldots$; так получится некоторая другая прямая u'. Решетка Γ, построенная на репере $\mathfrak{A}'_{-1}\mathfrak{A}'_0$, будет, очевидно, иметь своим рядом неполных частных по отношению к осям u', v' как раз ряд (α). Но весь разбираемый вопрос аффинен. Сделав такое аффинное преобразование, чтобы прямые u', v' перешли в прямые u, v, мы получим из решетки Γ', решетку Γ, которая имеет ряд (α) своим рядом неполных частных по отношению к осям u, v. Эта решетка Γ будет задана рядом (α) с точностью до растяжений по осям u и v, т. е. с точностью до гиперболического поворота относительно асимптот u и v и гомотетии в начале координат O. Действительно, репер $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$ будет задан рядом (α) по отношению к осям u и v в том смысле, что угловые коэффициенты осей u и v по отношению к этому реперу суть

$$\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots}} \quad \text{и} \quad \cfrac{1}{\alpha_{-1} + \cfrac{1}{\alpha_{-2} + \ldots}},$$

т. е. заданы; другими словами, заданы уравнения прямых u и v по отношению к этому реперу $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$.

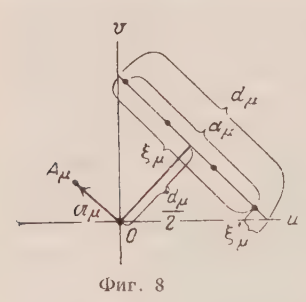
Если $\overline{\mathfrak{A}}_{-1}\overline{\mathfrak{A}}_0$ — другой репер, заданный рядом (α) по отношению к осям u и v, и $\sum$ — то аффинное преобразование, которым он получается из репера $\mathfrak{A}_{-1}\mathfrak{A}_0$, то прямые u', v' с теми же уравнениями относительно него получаются из прямых u и v аффинным преобразованием $\sum$. Но прямые u', v' должны быть прямыми u, v, следовательно, аффинное преобразование $\sum$ преобразует прямые u и v в себя, т. е. есть произведение гиперболического поворота по отношению к асимптотам u, v и гомотетии в начале O.

В заключение этого краткого обзора геометрии непрерывных дробей выведем одну формулу, связывающую между собою площадь s основного параллелограмма решетки, длину d_μ хорды, образуемой прямой μ-ой стороны полигона Π с соответственным координатным углом, измеренную длиной вектора $\mathfrak{A}_\mu$, ей параллельного, и абсолютную величину $|u_\mu v_\mu|$ гиперболического расстояния от начала O подходящей точки A_μ, являющейся концом этого вектора, а именно:

$$|u_\mu v_\mu| = \frac{s}{d_\mu}. \tag{1}$$

Для этого сделаем такой гиперболический поворот, чтобы эта хорда стала перпендикулярной к биссектрисе соответственного координатного угла. При этом ни s, ни d_μ, ни $|u_\mu v_\mu|$ не изменятся. Тогда (фиг. 8) $s = |\mathfrak{A}_\mu| \cdot \frac{d_\mu |\mathfrak{A}_\mu|}{2}$ и $\mathfrak{A}_\mu$ будет иметь координаты $(u_\mu, -u_\mu)$, т. е. $|\mathfrak{A}_\mu|^2 = 2|u_\mu|^2$ и $|u_\mu v_\mu|^2 = u_\mu^2$, откуда и получается формула (1).

2. Задача Маркова для неопределенной двойничной квадратичной формы. Исследуем теперь тот случай задачи Маркова, который был рассмотрен в его диссертации 1880 г., а именно, когда $n = 2$, область γ есть $|uv| < 1$ и дополнительное условие состоит в том, что одна из точек рассматриваемых решеток Γ лежит в центре O этой области.



Фиг. 8

Докажем сначала, что для этого случая существуют допустимые решетки. Очевидно, что если нижняя грань абсолютных величин $|uv|$ гиперболических расстояний точек решетки от начала O не равна нулю, то, делая гомотетии этой решетки относительно начала с достаточно большим коэффициентом, мы будем получать решетки, все точки которых (отличные от O) не лежат внутри области γ, т. е. допустимые решетки.

Заметим, что нижняя грань абсолютных величин гиперболических расстояний точек решетки Γ от начала O та же самая, что нижняя грань этих расстояний для совокупности ее подходящих точек A_i. Действительно, если все подходящие точки лежат в данном координатном угле «внутри» расположенной в нем ветви гиперболы, т. е. на гиперболах с большими по абсолютной величине параметрами, то и все вообще точки Γ, лежащие в этом координатном угле, лежат также «внутри» этой ветви гиперболы, так как область, лежащая «внутри» ветви гиперболы, выпуклая и, следовательно, если в ней лежат вершины A_i границы выпуклой оболочки точек Γ, расположенных в этом координатном угле, то в ней же лежит и вся выпуклая оболочка, т. е. и сами все эти точки Γ.

Рассмотрим теперь ряд (α) решетки и выясним, каким он должен быть для того, чтобы соответствующие ему решетки имели нижние грани абсолютных величин их гиперболических расстояний от начала O отличными от нуля.

Из фиг. 8 следует, что $\alpha_\mu < d_\mu < \alpha_\mu + 2$ и, следовательно, в силу вышесказанного и формулы (1), эти нижние грани будут отличны от нуля тогда и только тогда, когда все члены α_μ ряда (α) ограничены в своей совокупности. Следовательно, допустимые решетки имеются для таких и только таких рядов (α).

Посмотрим, каковы будут в исследуемом случае допустимые преобразования допустимой решетки. Покажем, что они сводятся к гиперболическим поворотам и гомотетиям в начале O. Действительно, если бы, например, ось v при непрерывном изменении допустимого преобразования поворачивалась вокруг точки O, то точки решетки Γ, лежащие далеко от начала O и близко к оси v, непрерывно передвигаясь, входили бы при этом в область γ. Если поэтому отвлечься от гиперболических поворотов по отношению к асимптотам u и v, которые во всем этом вопросе, понятно, можно вовсе не принимать во внимание, то допустимые преобразования сводятся к гомотетиям в начале O.

Отсюда следует, что для каждого ряда (α), члены α_μ которого ограничены в своей совокупности, есть одна и только одна (конечно, с точностью до гиперболических поворотов) предельная решетка, а именно та, которая получается из допустимой решетки с этим рядом (α) при помощи гомотетии, делающей абсолютную величину гиперболических расстояний ее точек от начала равной 1.

Принимая снова во внимание формулу (1) и то, что, по самому определению предельной решетки, нижняя грань аболютных величин гиперболических расстояний ее точек от начала, т. е. величин $|u_\mu v_\mu|$, равна 1, мы получаем окончательно такую теорему:

Предельные решетки существуют для тех и только тех рядов (α), *члены* α_μ *которых ограничены в своей совокупности, причем для каждого такого ряда существует только одна предельная решетка. Площадь основного параллелограмма этой предельной решетки равна верхней грани чисел* d_μ, *соответствующих ряду* (α).

Из фиг. 8 получаем $d_\mu = \xi_\mu + \xi'_\mu$, т. е.

$$d_\mu = \alpha_\mu + \cfrac{1}{\alpha_{\mu+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\mu+2} + \dots}} + \cfrac{1}{\alpha_{\mu-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\mu-2} + \dots}} \qquad (2)$$

Отыскание всех предельных решеток с площадями s основного параллелограмма, меньшими или равными данной величине S, сводится, таким образом, к отысканию всех тех рядов (α), для которых сумма непрерывных дробей (2) для любого μ меньше или равна S.

Марков исследовал только те предельные решетки, для которых $s \leqslant 3$. В этом случае ряды (α) должны быть такими, чтобы все их суммы

(2) были $\leqslant 3$, т. е. должны состоять лишь из единиц и двоек. Но этого, разумеется, еще недостаточно.

Марков показал, что для того чтобы было $s < 3$, необходимо и достаточно, чтобы эти ряды были некоторыми специальными периодическими рядами, составленными из единиц и двоек, а чтобы было $s = 3$ — некоторыми другими специальными рядами из единиц и двоек.

Подробно исследуя сумму (2), Марков получил, что наименьшая площадь основного параллелограмма предельной решетки есть $s_1 = \sqrt{5}$, следующая $s_2 = \sqrt{8}$, еще следующая $s_3 = \sqrt{\frac{221}{25}}$ и т. д. Площади эти образуют растущую последовательность $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$, стремящуюся к числу 3. Различных же предельных решеток с площадью $s = 3$ бесконечно много.

Методом исследования в рассматриваемом мемуаре Маркова является алгорифм непрерывных дробей.

§ 2. Алгорифм разделенных параллелограммов

Мы рассмотрим теперь один алгорифм, который для случая, когда на асимптотах u и v вовсе нет точек решетки, по моему мнению, играет ту же роль, что алгорифм непрерывных дробей для случая, когда точка O пересечения асимптот есть точка решетки Г.

Ввиду того, что все соображения этого параграфа, так же как и соображения предыдущего, аффинны, мы можем предполагать, что асимптоты u и v взаимно перпендикулярны. Как и раньше, будем называть их также осями.

Итак, в этом и следующем параграфах мы будем рассматривать тот случай, когда асимптоты u и v вовсе не имеют на себе точек решетки Г. Будем в этом случае называть разделенным параллелограммом всякий основной параллелограмм решетки Г, вершины A, B, C, D которого лежат в разных координатных углах, образуемых осями u, v, причем вершину его, лежащую в первом координатном угле, будем всегда обозначать через A, вершину, лежащую во втором угле, — через B, в третьем — через C и в четвертом — через D.

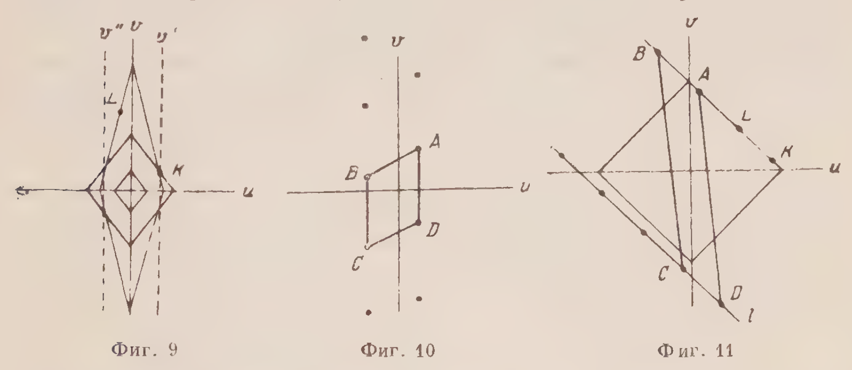
1. ЛЕММА. *В любой решетке Г, вовсе не имеющей точек на осях u и v, всегда есть по крайней мере один разделенный параллелограмм.*

Для доказательства рассмотрим ромб, диагонали которого лежат на осях u и v. Такой ромб будем называть координатным ромбом. Построим вокруг начала такой ромб, столь малый, чтобы в нем вовсе не было точек решетки, и будем его непрерывно увеличивать гомотетией из начала. Очевидно, что он, наконец, наткнется внутренней точкой одной из своих сторон на некоторую точку K решетки Г (фиг. 9). Возможны два случая:

1° Внутри полоски между прямыми v' и v'', параллельными оси v, из которых v' проходит через точку K, а v'' проходит на таком же расстоянии от оси v, но по другую сторону от нее, нет точек решетки Г.

В этом случае на прямой v', кроме точки K, есть еще точки решетки Г, так как, если бы на v' не было, кроме точки K, точек решетки Г, то было бы бесконечно много подходящих точек к этой прямой v' как с одной, так и с другой ее стороны, сколь угодно близко к ней, т. е., вопреки предположению, были бы точки решетки Г внутри полоски $v'v''$.

Если, следовательно, между прямыми v' и v'' нет точек решетки, то на прямой v' есть линейный ряд точек, и тогда все точки решетки Г лежат в этом ряду и в параллельных ему линейных рядах. Ни один



Фиг. 9 Фиг. 10 Фиг. 11

такой линейный ряд не лежит на самой прямой v, так как, по предположению, на ней вообще нет точек решетки Г.

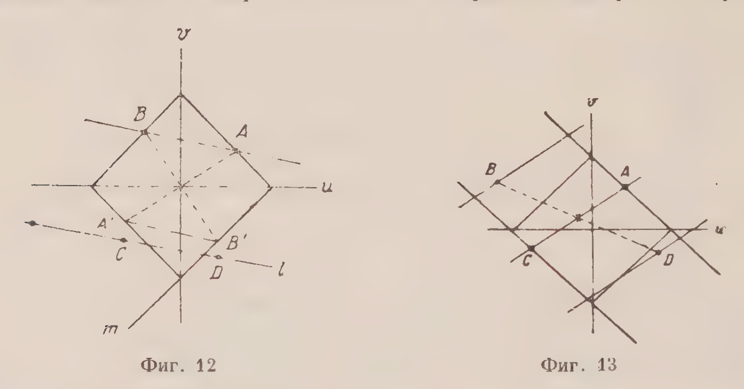
Рассмотрим (фиг. 10) два таких соседних линейных ряда, из которых один лежит справа, а другой слева от оси v. Ни на одном из них нет точек, лежащих на самой оси u, так как на ней вообще нет точек решетки Г. Пусть A и D — две соседние точки правого ряда, из которых одна лежит над, а другая под осью u, а B и C — две аналогичные точки левого ряда. Тогда параллелограмм $ABCD$ будет разделенный.

2°. Внутри полоски $v'v''$ есть точки Г. В этом случае будем непрерывно растягивать полученный ромб вдоль оси v так, чтобы точка K оставалась на его границе, т. е. чтобы проходящая через нее сторона ромба вращалась вокруг нее. В конце концов (см. фиг. 9) ромб наткнется внутренней точкой этой же, или какой-нибудь другой своей стороны, на некоторую точку L решетки Г, лежащую внутри полоски $v'v''$, и получится пустой ромб (т. е. ромб, внутри которого нет точек решетки Г), на границе которого лежат две точки решетки Г. Тут имеются три возможности:

1) Точки K и L решетки Г, лежащие на границе пустого ромба, лежат обе на одной его стороне, например, на расположенной в первом координатном угле (фиг. 11). В таком случае рассмотрим в линейном ряду решетки Г, лежащем на прямой KL, последнюю точку A, которая еще лежит правее оси v, и первую B, которая лежит левее ее. Прямая l ближайшего параллельного к AB линейного ряда точек

решетки Г, лежащая по ту сторону от прямой AB, по которую от нее лежит ромб, лежит не ближе противоположной стороны ромба, так как иначе она образовала бы с ромбом хорду, равную по длине стороне ромба, т. е. более длинную, чем KL, и, следовательно, внутри нее должна была бы лежать хотя бы одна точка этого параллельного ряда, а между тем ромб пустой. Прямая l поэтому образует с **третьим координатным углом** хорду, равную стороне ромба, или более длинную, чем она, и внутри этой хорды, следовательно, есть точки линейного ряда, лежащие на прямой l. Пусть C — последняя из этих точек, еще лежащая левее оси v, а D — первая, лежащая правее ее. Тогда параллелограмм $ABCD$ будет разделенный.

2) Точки K и L лежат на соседних сторонах ромба, например, на расположенных в первом и втором координатных углах, причем,



Фиг. 12 Фиг. 13

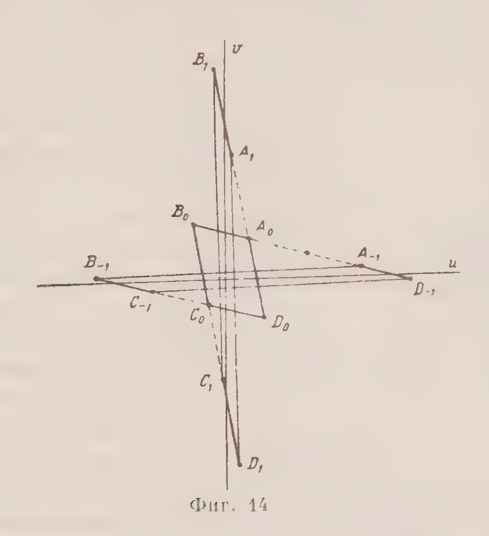
например, K ближе к оси v, чем L (фиг. 12). Обозначим их через A и B.

Прямая l ближайшего к AB параллельного линейного ряда точек решетки Г, лежащая по ту сторону от прямой AB, по которую от нее лежит начало O, лежит не ближе прямой $A'B'$, симметричной с AB по отношению к началу, так как всякая более близкая параллельная прямая образует с ромбом хорду, более длинную чем AB, и внутри нее должна была бы поэтому лежать хотя бы одна точка расположенного на ней линейного ряда, а между тем ромб пустой.

Отрезок PQ прямой l, заключенный между точками ее пересечения с осью u и прямой m стороны ромба, расположенной в четвертом угле, длиннее AB, т. е. внутри него есть хоть одна точка лежащего на ней линейного ряда точек Г. Отрезок PQ может как не пересекать ромба, и тогда он весь лежит в третьем координатном угле, так и пересекать ромб, но в последнем случае, так как ромб пустой, точки Г, на нем лежащие, находятся все же в той его части, которая расположена в третьем координатном угле.

Последняя точка C линейного ряда, лежащего на прямой l, расположенная левее оси v, лежит, следовательно, в третьем, а первая его точка, лежащая правее оси v, — в четвертом координатном угле. Параллелограмм $ABCD$ разделенный.

3) Точки K и L лежат на двух противоположных сторонах ромба, причем можно предполагать, что на каждой из них лежит лишь по одной этой точке, так как иначе мы имели бы уже рассмотренный случай 1). Пусть, например (фиг. 13), K лежит на стороне ромба, расположенной в первом, и тогда L лежит на стороне, расположенной в третьем координатном угле. Обозначим эти точки через A и C. Рассмотрим ближайшие к AC параллельные ряды точек Г, лежащие по разные стороны от AC. Прямые l и l' каждого из этих рядов будут образовывать с полоской, ограниченной прямыми тех сторон ромба, на которых лежат точки A и C, хорды, равные AC, причем эти хорды могут частично и пересекать ромб. На каждой из этих хорд либо будет лежать одна точка Г внутри хорды, либо две точки на ее концах, но во всяком случае на той части хорды, которая лежит вне ромба, так как внутри ромба точек Г нет, а на соответственных его сторонах лежат, по предположению, лишь точки A и C, т. е. точки, лежащие на этих хордах, будут принадлежать тем частям рассматриваемой полоски, которые лежат во втором и в четвертом координатном углах. Обозначим такую точку (или одну из таких точек, если их две), лежащую во втором угле, через B, а симметричную ей относительно середины между точками A и C, которая будет лежать в части полоски, расположенной в четвертом координатном угле, — через D. Параллелограмм $ABCD$ будет разделенный.



Фиг. 14

Итак, какова бы ни была решетка, вовсе не имеющая точек на осях u и v, в ней всегда есть хотя бы один разделенный параллелограмм.

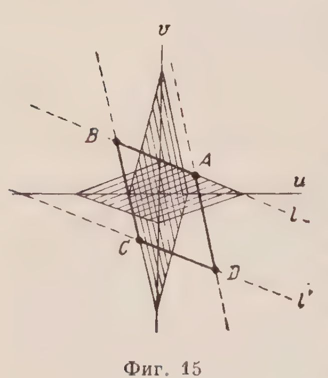
2. Алгорифм разделенных параллелограммов. Рассмотрим некоторый разделенный параллелограмм $A_0B_0C_0D_0$ (фиг. 14). Две из его сторон A_0B_0 и C_0D_0 пересекают ось v, а две другие D_0A_0

и B_0C_0 пересекают ось u. Первые две мы поэтому будем называть v-сторонами параллелограмма, а вторые две — u-сторонами.

Предположим, что u-стороны разделенного параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$ не параллельны оси v, т. е. при продолжении пересекают ось v. Тогда, ввиду того что на оси v нет точек решетки, если эти стороны откладывать на их продолжениях соответственно взятое целое положительное число раз, для каждой из них, вообще говоря, свое, то получатся отрезки A_1B_1 и C_1D_1, пересекающие ось v. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ будет тогда опять основной и разделенный. Этот параллелограмм мы будем называть смежным с разделенным параллелограммом $A_0B_0C_0D_0$ вдоль оси v.

Если u-стороны параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ опять не параллельны оси v, то можно аналогично построить смежный с ним вдоль оси v разделенный параллелограмм $A_2B_2C_2D_2$ и т. д., пока у какого-нибудь из этих параллелограммов его стороны не станут параллельными оси v.

Если у параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$ его v-стороны не параллельны оси u, то, аналогично, вытягивая эти его v-стороны, можно получить разделенный параллелограмм $A_{-1}B_{-1}C_{-1}D_{-1}$, смежный с ним вдоль оси u. Если v-стороны этого параллелограмма опять не параллельны оси v, можно также, исходя от него, получить разделенный параллелограмм $A_{-2}B_{-2}C_{-2}D_{-2}$, смежный с ним вдоль оси u, и т. д., пока у какого-нибудь из этих параллелограммов не получатся v-стороны, параллельные оси u.



Фиг. 15

Легко видеть, что если некоторый разделенный параллелограмм в этом смысле смежен вдоль оси v с некоторым другим разделенным параллелограммом, то второй, наоборот, смежен с первым вдоль оси u.

Описанный алгорифм мы будем называть алгорифмом разделенных параллелограммов.

3. Упорядочивание разделенных параллелограммов по высоте. Рассмотрим некоторый произвольный разделенный параллелограмм $ABCD$. Возьмем из двух его v-сторон ту, прямая которой ближе к началу. Эта прямая l, вообще говоря, проходит в трех координатных углах, причем от среднего из них она отсекает треугольник. Последовательным отражением этого треугольника в осях u и v мы получим четыре таких треугольника, вместе составляющих координатный ромб (фиг. 15). Этот ромб мы будем называть v-ромбом разделенного параллелограмма $ABCD$. Аналогичный ромб, составленный при помощи той из двух u-сторон разделенного параллелограмма $ABCD$, прямая которой ближе к началу, мы будем называть u-ромбом параллелограмма $ABCD$. Очевидно, что весь v-ромб данного разделенного параллелограмма лежит в v-полоске этого параллело-

грамма, т. е. в полоске, ограниченной прямыми его v-сторон, а весь u-ромб — в его u-полоске.

Легко видеть, что u-ромб данного разделенного параллелограмма есть одновременно v-ромб разделенного параллелограмма, смежного с ним вдоль оси v, и обратно.

Всякий пустой координатный ромб, имеющий на своей границе по крайней мере одну точку решетки Г, мы будем называть предельным ромбом решетки Г по отношению к осям u, v. Очевидно, что если увеличивать какую-нибудь из диагоналей предельного ромба, то каждой ее величине, большей, чем у данного предельного ромба, будет соответствовать один и только один предельный ромб (другая диагональ которого будет меньше чем у данного).

Длину v-диагонали любого координатного ромба, т. е. его диагонали, лежащей на оси v, мы будем называть его высотой. Все предельные ромбы могут быть, очевидно, упорядочены по величине их высоты. При увеличении v-диагонали предельного ромба его u-диагональ уменьшается, и обратно. Совокупность предельных ромбов, таким образом, однопараметрическая, причем за параметр можно взять высоту.

Все v- и u-ромбы разделенных параллелограммов пустые и каждый из них имеет на своей границе по крайней мере одну точку решетки Г, а именно, во всяком случае, например, на ней лежит вершина соответствующего разделенного параллелограмма, расположенная в том координатном угле, где лежит тот из четырех треугольников, с которого мы начали его построение. Следовательно, все v- и u-ромбы любых разделенных параллелограммов предельные.

Будем называть высотой разделенного параллелограмма высоту его v-ромба.

Всякий v- или u-ромб разделенного параллелограмма есть, соответственно, v- или u-ромб только одного этого разделенного параллелограмма. Действительно, пусть некоторый координатный ромб есть, например, v-ромб разделенного параллелограмма $ABCD$, причем его сторона, лежащая, например, в первом координатном угле, есть сторона того треугольника, от которого мы его строим отражением треугольников в осях. Тогда вершины A и B лежат на прямой l этой стороны (фиг. 15), причем A—на стороне этого треугольника.

Если бы был другой разделенный параллелограмм $A'B'C'D'$, для которого этот же ромб был бы его v-ромбом, то одна из его вершин должна была бы по той же причине лежать на одной из сторон этого ромба.

Если прямая l' стороны CD не есть прямая стороны ромба, лежащей в третьем координатном угле, то все стороны этого ромба, кроме лежащей в первом координатном угле, лежат внутри пустой полоски ll' и, следовательно, именно вершина A' лежит на стороне ромба, и тогда линейный ряд $A'B'$ лежит на прямой l, следовательно, точки A' и B' совпадают с точками A и B, как последняя, лежащая в этом ряду

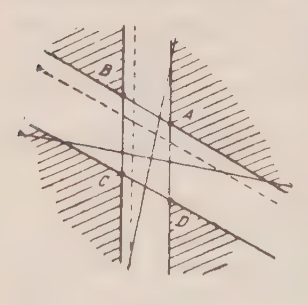
слева и первая справа от оси v. Вершины C' и D' лежат тогда в ближайшем к l параллельном ряду, расположенном по ту же сторону от прямой l, где ромб, т. е. в ряду CD, и по той же причине совпадают с C и D. Следовательно, разделенный параллелограмм $A'B'C'D'$ совпадает с $ABCD$.

Если же прямая l' есть прямая стороны ромба, лежащей в третьем координатном угле, то вершина параллелограмма $A'B'C'D'$, лежащая на стороне ромба, с которой мы начинали предыдущее рассуждение, может быть выбрана как на его стороне, лежащей в первом, так и на стороне, лежащей в третьем координатном угле; рассуждение же остается прежним.

ТЕОРЕМА. *Нет разделенных параллелограммов, промежуточных по высоте между двумя параллелограммами, смежными в смысле нашего алгорифма.*

Доказательство. Рассмотрим u- и v-полоски, соответствующие некоторому разделенному параллелограмму $ABCD$. Они образуют крест (фиг. 16). Все точки решетки Г лежат внутри или на границе четырех (заштрихованных на фиг. 16) углов, остающихся на плоскости, если вырезать из нее этот крест.

Возьмем какой-нибудь из координатных углов и рассмотрим, какие положения может в нем занимать сторона предельного ромба, промежуточного по высоте между v- и u-ромбами параллелограмма $ABCD$. Для этого заметим, во-первых, что направление этой стороны будет промежуточным между направлениями соответственных сторон (т. е. лежащих в том же координатном угле) v- и u-ромба, а следовательно, оно будет «опорным» для того заштрихованного угла, вершина которого лежит в рассматриваемом координатном угле. Во-вторых, заметим, что концы рассматриваемой стороны промежуточного ромба лежат на осях u и v не дальше тех точек, в которых стороны заштрихованных углов пересекают эти оси, так как концы соответственных диагоналей u- и v-ромбов лежат как раз в тех из этих точек K и L, которые более близки к началу, а u- и v-диагонали промежуточного ромба имеют величины меньшие, чем соответственно u-диагональ v-ромба и v-диагональ u-ромба параллелограмма $ABCD$.



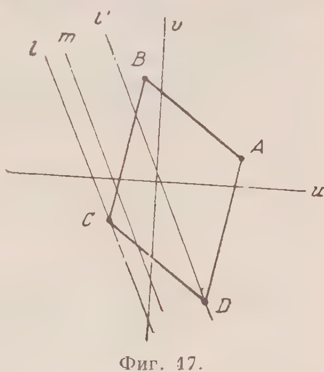
Фиг. 16.

Таким образом, рассматриваемая сторона промежуточного ромба не может содержать на себе точек Г, принадлежащих тем трем заштрихованным углам, вершины которых не лежат в рассматриваемом координатном угле, а что касается точек Г, принадлежащих этому последнему углу, то сторона эта может содержать на себе только вершину этого угла, т. е. соответствующую вершину разделенного параллелограмма $ABCD$.

Пусть, например, сторона такого промежуточного предельного ромба содержит на себе вершину C. Предположим теперь, что этот предельный ромб есть v-ромб некоторого разделенного параллелограмма; тогда на прямой l этой его стороны должен лежать линейный ряд точек Г.

Так как у всякого v-ромба две параллельные его стороны лежат в v-полоске соответствующего ему разделенного параллелограмма, т. е. на них нет точек Г, а две другие параллельны сторонам этой v-полоски, и если, следовательно, на стороне v-ромба есть точка Г, то на прямой l этой стороны лежит линейный ряд точек Г.

Прямая l имеет направление, «опорное» к углу C. Рассмотрим ту из двух точек B и D, которая от нее не дальше другой. Пусть, например, это будет точка D (фиг. 17). На прямой l', параллельной l и проходящей через точку D, лежит линейный ряд Г. Ближайший к l параллельный l линейный ряд Г лежит, следовательно, на некоторой прямой m, которая либо совпадает с l', либо ближе к прямой l. Вся эта прямая m за исключением, быть может, некоторой части ее, лежащей в пустом параллелограмме $ABCD$, лежит вне первого координатного угла, так как все точки той ее части, которая лежит за пересечением ее со стороной BC, имеют отрицательные u, а все те ее точки, которые лежат за пересечением со стороной CD, — отрицательные v. Все точки прямой l также не лежат в первом координатном угле. Но из вершин разделенного параллелограмма, для которого рассматриваемый промежуточный ромб является v-ромбом, две лежат на прямой l, а две другие — на прямой m, и, следовательно, он не может иметь вершин в первом координатном угле.



Фиг. 17.

Таким образом, не может быть разделенного параллелограмма, промежуточного по высоте между v- и u-ромбами данного разделенного параллелограмма, т. е. между v-ромбом данного и v-ромбом смежного с ним в смысле нашего алгорифма вдоль оси v разделенного параллелограмма.

4. О совокупности всех разделенных параллелограммов решетки. Здесь возможны три случая:

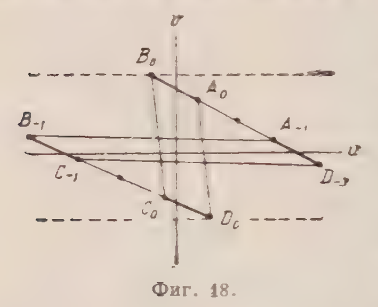
1) Если в решетке Г нет векторов, параллельных координатным осям, то от какого бы разделенного параллелограмма ни начинать, алгорифм будет продолжаться бесконечно как в ту, так и в другую сторону, ибо у любого, получаемого при помощи него, разделенного параллелограмма и u-стороны и v-стороны не параллельны осям. В этом случае из предыдущей теоремы очевидно, что от какого бы произвольно взятого разделенного параллелограмма ни начинать, бесконечный в

обе стороны ряд разделенных параллелограммов, получаемых нашим алгорифмом, исчерпывает все разделенные параллелограммы решетки Г.

2) Предположим теперь, что в решетке Г есть векторы, параллельные оси v, но нет векторов, параллельных оси u. В этом случае алгорифм вдоль оси u будет бесконечен, а вся решетка состоит из линейных рядов, параллельных оси u. Выполнив построение, указанное на фиг. 10, мы получим разделенный параллелограмм со сторонами, параллельными оси v. Его u-ромб бесконечной высоты, а именно, есть полоска со сторонами, параллельными оси v. Упорядочивая разделенные параллелограммы по убыванию высоты их u-ромбов, мы будем, в силу доказанной теоремы, получать все разделенные параллелограммы Г, если будем переходить нашим алгорифмом от этого разделенного параллелограмма со сторонами, параллельными оси v, строя последовательные смежные вдоль оси u. Отсюда видно, что в рассматриваемом случае, если мы начнем строить от любого разделенного параллелограмма смежные вдоль оси v, то мы всегда придем обратно к тому единственному разделенному параллелограмму, стороны которого параллельны оси v.

Обратное будет иметь место, если в решетке есть векторы, параллельные оси u, но нет векторов, параллельных оси v.

3) Наконец, может быть, что в решетке Г есть как векторы, параллельные оси u, так и векторы, параллельные оси v. Тогда в Г есть как некоторый разделенный параллелограмм $A'B'C'D'$ с парой сторон, параллельных оси v, так и некоторый параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ с парой сторон, параллельных оси u. Для рассмотрения этого случая докажем лемму.



Фиг. 18.

ЛЕММА. *Все разделенные параллелограммы цепочки, получаемой нашим алгорифмом, начиная от данного $A_0B_0C_0D_0$, идущей вдоль оси u, лежат в полоске, образованной опорными прямыми к параллелограмму $A_0B_0C_0D_0$, параллельными оси u; аналогичное утверждение имеет место относительно оси v.*

Очевидно, достаточно доказать лемму для разделенного параллелограмма $A_{-1}B_{-1}C_{-1}D_{-1}$, смежного вдоль оси u с параллелограммом $A_0B_0C_0D_0$. Параллелограмм $A_{-1}B_{-1}C_{-1}D_{-1}$ весь лежит в полоске между прямыми, параллельными оси u и проведенными по разные стороны от нее (фиг. 18) на расстояниях, равных проекции A_0B_0 на ось v, а наиболее далекие от оси u вершины параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$, как легко видеть, лежат вне этой полоски.

Из леммы следует, что в случае, когда в Г есть векторы как параллельные оси u, так и параллельные оси v, в Г есть лишь конечное число разделенных параллелограммов. Действительно, все они заключаются в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям

u и v, описанном вокруг совокупности параллелограммов $A'B'C'D'$ и $A_1B_1C_1D_1$, а внутри такого прямоугольника вообще есть лишь конечное число точек Г. В частности, если наименьшие такие векторы образуют основной параллелограмм, другими словами, если в Г есть основной параллелограмм со сторонами, параллельными осям, то есть один и только один разделенный параллелограмм, а именно тот из них, внутри которого лежит начало.

5. Аналитическая запись алгорифма разделенных параллелограммов. Из двух u-сторон разделенного параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$ одна A_0D_0 лежит правее, а другая B_0C_0—левее оси v. Смежный вдоль оси v разделенный параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ получается из $A_0B_0C_0D_0$ откладыванием целого положительного числа раз α_0 и α' этих его сторон по прямым, на которых они лежат, от их концов, либо «против часовой стрелки», т. е. правой кверху, а левой книзу, либо «по часовой стрелке», т. е. правой книзу, а левой кверху, в зависимости от того, в какую сторону они приближаются к оси v. В первом случае мы будем числа α_0, α'_0 подчеркивать снизу $\underline{\alpha_0\alpha'_0}$, а во втором — сверху $\overline{\alpha_0\alpha'_0}$. Таким образом, цепочка разделенных параллелограммов, идущих от $A_0B_0C_0D_0$ вдоль оси v, будет задаваться идущим в правую сторону рядом так подчеркнутых пар целых положительных чисел α, например: $\underline{\alpha_0\alpha'_0}$, $\underline{\alpha_1\alpha'_1}$, $\overline{\alpha_2\alpha'_2}, \ldots$; цепочка разделенных параллелограммов, идущих от $A_0B_0C_0D_0$ вдоль оси u, будет задаваться аналогичным рядом, идущим в левую сторону, например: $\ldots \underline{\alpha_{-2}\alpha'_{-2}}$, $\alpha_{-1}\alpha'_{-1}$, $\underline{\alpha_0\alpha'_0}$. Вся же совокупность разделенных параллелограммов будет задаваться рядом, идущим в обе стороны:

$$\ldots \underline{\alpha_{-2}\alpha'_{-2}}\,\overline{\alpha_{-1}\alpha'_{-1}}\,\underline{\alpha_0\alpha'_0}\,\underline{\alpha_1\alpha'_1}\,\overline{\alpha_2\alpha'_2}\ldots \qquad (\alpha\alpha')$$

Если в Г нет ни векторов, параллельных оси u, ни параллельных оси v, то этот ряд идет в обе стороны до бесконечности.

Если нет векторов, параллельных оси u, но есть параллельные оси v, то ряд обрывается справа, в обратном случае—слева, а если есть как векторы, параллельные оси u, так и параллельные оси v, то ряд конечен.

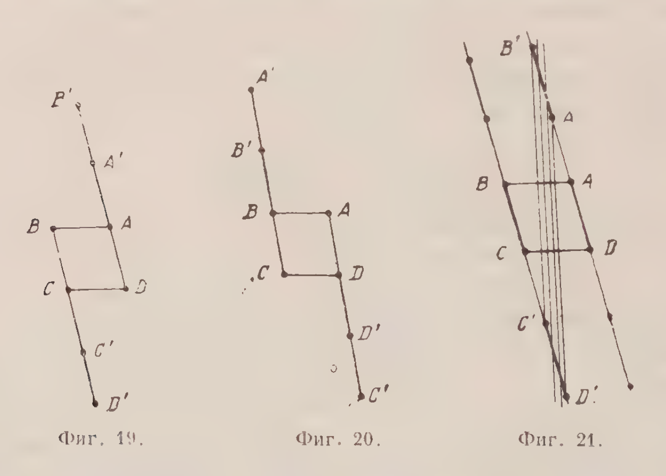
6. Сходимость алгорифма разделенных параллелограммов. Покажем, что если от некоторого совершенно произвольного параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$ строить цепочку параллелограммов, соответствующую ряду $(\alpha\alpha')$, т. е. строить в обе стороны смежные в соответствии с a priori заданным совершенно произвольным рядом $(\alpha\alpha')$ (об одном исключении, которое здесь имеет место, мы скажем ниже), который может быть конечным или бесконечным, то всегда будут существовать такие оси u и v, что совокупность всех параллелограммов цепочки будет совокупностью всех параллелограммов решетки Г, построенной на параллелограмме $A_0B_0C_0D_0$, разделенных по отношению к осям u и v.

Установим сначала, как мы будем обозначать вершины смежного с данным, в силу нашего алгорифма, параллелограмма и, следовательно, какие из его сторон u-стороны и какая из них правая, а какая левая, и какие из его сторон v-стороны и какая из них верхняя, а какая нижняя.

Если задан некоторый параллелограмм $ABCD$, то для того, чтобы строить смежный с ним «вдоль оси v» (хотя в том рассуждении, которое мы сейчас проводим, никакой оси u и никакой оси v нет) параллелограмм $A'B'C'D'$ соответственно паре целых положительных чисел $\alpha\alpha'$, если эта пара подчеркнута снизу, надо (фиг. 19) α раз отложить вектор $\overrightarrow{DA}$ на прямой DA от точки A и тогда последний так отложенный отрезок будет $A'B'$, затем надо отложить вектор $\overrightarrow{BC}$ на прямой BC α' раз от точки C и тогда последний так отложенный отрезок будет $C'D'$.

Если же пара $\alpha\alpha'$ подчеркнута сверху, то надо (фиг. 20) α раз отложить вектор $\overrightarrow{AD}$ на прямой AD от точки D и тогда последний так отложенный отрезок будет $D'C'$, затем надо α' раз отложить вектор $\overrightarrow{CB}$ от точки B и последний так отложенный отрезок будет $B'A'$.

Стороны AD и BC называются u-сторонами, правой и левой, а стороны AB и CD — v-сторонами, верхней и нижней.



Фиг. 19. Фиг. 20. Фиг. 21.

Параллелограмм $A_iB_iC_iD_i$ называется предыдущим в цепочке к параллелограмму $A_jB_jC_jD_j$, если $i<j$ (например, $i=5$, $j=17$ или $i=-8$, $j=-3$), в обратном случае параллелограмм называется последующим.

ЛЕММА I. *u-стороны всякого параллелограмма цепочки пересекают v-стороны всех ему предыдущих параллелограммов цепочки во внутренних их точках или в их концах.*

Действительно, каждая из u-сторон последующего $A'B'C'D'$ из двух соседних параллелограммов цепочки пересекает обе v-стороны предыдущего $ABCD$, так как концы ее лежат (фиг. 21) на противополож-

ных границах u-полоски этого параллелограмма и по разные стороны от каждой из этих его v-сторон. Любой отрезок, соединяющий точки противоположных v-сторон последующего $A'B'C'D'$, следовательно, и подавно пересекает эти v-стороны AB и CD предыдущего, а значит, и u-стороны параллелограмма $A''B''C''D''$, последующего к $A'B'C'D'$, пересекают v-стороны параллелограмма $ABCD$ и т. д.

ЛЕММА II. *С увеличением номера i параллелограмма $A_iB_iC_iD_i$, последующего в цепочке за параллелограммом $A_0B_0C_0D_0$, абсолютная величина проекции его u-стороны на прямую l u-стороны параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$ растет при переходе к следующему номеру на некоторое целое положительное число длин стороны A_0D_0.*

Действительно, если мы обозначим абсолютную величину такой проекции через d_i, то, очевидно (фиг. 22), $d_1 = d_0(\alpha_1 + \alpha_1')$, но все $\alpha \geqslant 1$ и, следовательно, $\alpha_1 + \alpha_1' \geqslant 2$. Рассмотрим теперь i-й параллелограмм цепочки. В таком случае, очевидно,

$$d_{i+1} = d_i(\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1}) \pm d_{i-1}$$

в зависимости от того, будет ли проекция d_{i-1} прибавляться, как на фиг. 23 (α), или вычитаться, как на фиг. 23 (β), где изображены случаи правой ориентации вытягиваний. В случае левой ориентации вытягиваний получается та же формула.

Проведем теперь полную индукцию, предполагая доказанным, что $d_i > d_{i-1}$; тогда, даже если d_{i-1} вычитается, мы имеем

$$d_i(\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1}) - d_{i-1} > d_i,$$

т. е.

$$d_i(\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} - 1) > d_{i-1},$$

так как $\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} - 1 \geqslant 1$. Кроме того, d_1, как мы видели, есть целое кратное d_0, $d_2 = d_1(\alpha_2 + \alpha_2') \pm d_0$ и, следовательно, d_2 есть целое кратное d_0; продолжая так дальше, мы видим, что d_i и d_{i+1} суть целые кратные d_0, причем d_{i+1} больше чем d_i, на целое положительное кратное d_0.

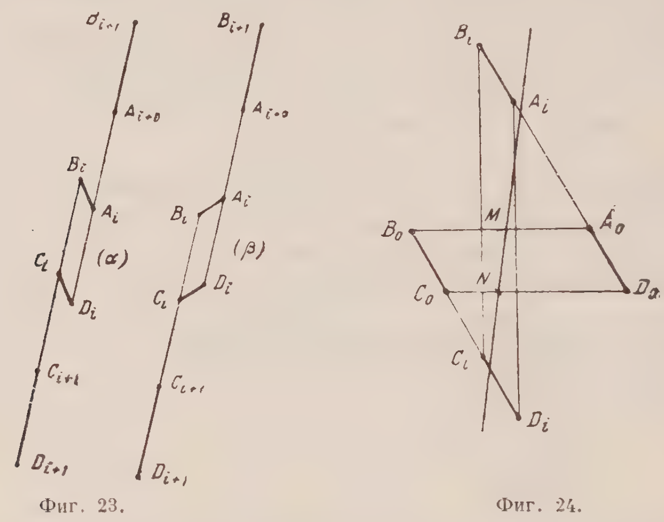
Фиг. 22.

Из этой леммы мы видим, что если цепочка бесконечная, то абсолютные величины проекций u-сторон последовательных параллелограммов цепочки на прямую l растут сверх всякого предела, а следовательно, и подавно растут сверх всякого предела сами длины этих сторон. А так как площади всех этих параллелограммов одинаковы, то отсюда следует, что высоты параллелограммов относительно этих сторон, т. е. расстояния между этими сторонами, бесконечно убывают.

Рассмотрим последовательные отрезки δ_i, высекаемые парами u-сторон параллелограммов цепочки, последующих за $A_0B_0C_0D_0$, на v-сторонах A_0B_0 и C_0D_0 этого параллелограмма. Ввиду того что угол, образуемый этими u-сторонами со сторонами A_0B_0 и C_0D_0, не очень мал, а именно, не меньше чем углы, которые образуют с ними диагонали A_0C_0 и B_0D_0, из стремления к нулю расстояний между этими u-сторонами следует стремление к нулю этих отрезков δ_i.

Кроме того, в силу леммы I, на каждой из сторон A_0B_0 и C_0D_0 всякий следующий отрезок δ_{i+1} вложен в предыдущий δ_i. На каждой из этих сторон имеется, следовательно, одна и только одна точка M и соответственно N, принадлежащая всем этим отрезкам, лежащим на этой стороне.

Прямая v, проходящая через точки M и N, будет пересекать все стороны A_iB_i и C_iD_i всех последующих параллелограммов цепочки. Действительно, если бы она (фиг. 24) не пересекала, например, стороны A_iB_i, то параллелограмм с достаточно большим номером j, гораздо большим чем i, т. е. достаточно узкий, также не мог бы



Фиг. 23. Фиг. 24.

пересекать стороны A_iB_i, так как он должен содержать точки M и N, что противоречило бы лемме I.

Заметим, что прямая v может пересекать сторону A_iB_i в ее конце, например в ее конце A_i, только если правые концы отрезков δ, образуемых всеми следующими параллелограммами на стороне A_iB_i, совпадают с точкой A_i. Это, как легко видеть, будет тогда и только тогда, когда, начиная с i-го номера в ряде $(\alpha\alpha')$, все пары—правые и все их первые числа α_{i+1}, α_{i+2}, ... равны 1. Если же либо не все эти пары правые, либо среди их первых чисел есть большие чем 1, то на том первом номере $i+1$, $i+2$, ..., когда это случится, правый конец отрезка δ на стороне A_iB_i уже не будет совпадать с точкой A_i.

В том же исключительном случае, когда, начиная с данного i, все пары ряда $(\alpha\alpha')$—правые и все первые их числа равны 1, прямая v будет проходить через точку A_i, причем эта точка будет тогда общей вершиной A для всех параллелограммов цепочки с номерами, большими чем i.

Итак, каков бы ни был ряд $(\alpha\alpha')$, идущий направо до бесконечности, если только он не того специального типа, когда, начиная

с некоторого i, все его пары одинаково подчеркнуты и притом либо все их первые, либо все вторые числа равны 1, прямая v (MN) будет пересекать все стороны A_iB_i и C_iD_i всех параллелограммов цепочки во внутренних их точках.

Если ряд $(\alpha\alpha')$ обрывается направо и последний параллелограмм цепочки есть $A_kB_kC_kD_k$, то, в силу леммы I, любая прямая v, параллельная сторонам A_kD_k и B_kC_k и проходящая между ними, будет пересекать все v-стороны всех параллелограммов цепочки во внутренних их точках.

Леммы I, II и все проведенные сейчас рассуждения, разумеется, справедливы для цепочки параллелограммов, предыдущих некоторому заданному; аналогично может быть получена некоторая прямая u, играющая для цепочки предыдущих параллелограммов ту же роль, какую играет прямая v для цепочки последующих.

Соединяя все сказанное, мы получаем такую теорему:

ТЕОРЕМА. *Какой бы бесконечный в обе стороны ряд* $(\alpha\alpha')$ *ни был задан, лишь бы он не был ни в ту, ни в другую сторону вышеуказанного специального типа, и какой бы ни взять исходный параллелограмм* $A_0B_0C_0D_0$, *существует, и притом только одна, такая пара пересекающихся прямых* u *и* v, *что бесконечный в обе стороны ряд параллелограммов* $A_iB_iC_iD_i$ *цепочки, получаемой из* $A_0B_0C_0D_0$ *нашим алгорифмом в соответствии с рядом* $(\alpha\alpha')$, *есть совокупность всех разделенных относительно осей* u *и* v *параллелограммов решетки* Γ, *построенной на параллелограмме* $A_0B_0C_0D_0$.

Если же ряд $(\alpha\alpha')$ *бесконечен лишь в одну сторону и не специальный, то та из прямых* u *и* v, *которая соответствует бесконечной стороне ряда, вполне задана, а прямую, соответствующую конечной стороне ряда, можно еще передвигать параллельно самой себе внутри полоски, составленной прямыми соответственных сторон последнего параллелограмма.*

Если, наконец, ряд $(\alpha\alpha')$ *конечен в обе стороны, то обе прямые* u *и* v *можно передвигать параллельно самим себе в соответственных полосках.*

Если сделать такое аффинное преобразование, чтобы оси u и v сделались данными, то предыдущую теорему можно высказать в следующей форме:

Если ряд $(\alpha\alpha')$ *не специального типа, то всегда есть решетки* Γ *такие, что последовательности их разделенных параллелограммов по отношению к данным осям* u, v *соответствует как раз этот ряд* $(\alpha\alpha')$.

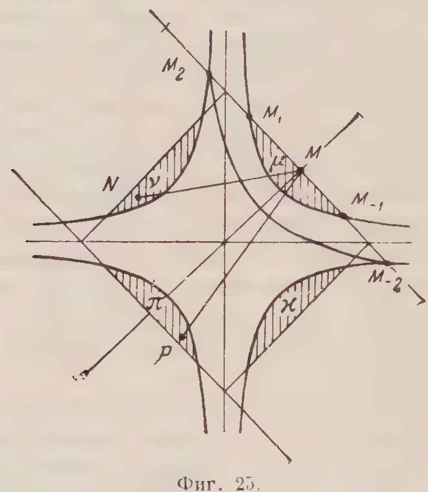
При этом нетрудно показать, что при данных осях u, v ряд $(\alpha\alpha')$ определяет решетку Γ с точностью до гиперболических относительно них поворотов и гомотетии в начале. Если же он конечен в одну или обе стороны, то можно еще делать некоторые небольшие параллельные переносы ее.

7. О точках решетки с данной нижней гранью абсолютных величин гиперболических расстояний ее

точек от начала, гиперболически близких к началу. Вершины разделенных параллелограммов, оказывается, суть хорошие гиперболические приближения решетки к осям u и v. А именно имеет место

ТЕОРЕМА. *Если нижняя грань абсолютных величин гиперболических расстояний* $|uv|$ *точек решетки* Γ *от начала есть 1, то всякая точка* Γ, *абсолютная величина гиперболического расстояния которой от начала меньше чем* $\frac{5}{3}$, *есть вершина разделенного параллелограмма, причем константа* $\frac{5}{3}$ *не может быть улучшена.*

Заметим, во-первых, что если точка решетки Γ есть ромбический минимум, т. е. лежит на границе предельного ромба и притом одна



Фиг. 25.

на соответственной его стороне, то она есть вершина разделенного параллелограмма. Действительно, в силу рассуждения, проведенного в пункте 3, если ромб промежуточный, то это так. Если же ромб есть v-ромб некоторого разделенного параллелограмма, то могут быть только точки на его сторонах, лежащих на границе v-полоски этого параллелограмма. Если на соответственной стороне ромба только одна точка Γ, то эта точка — вершина разделенного параллелограмма.

Пусть теперь какая-нибудь точка M решетки Γ лежит гиперболически ближе, чем на расстоянии $\frac{5}{3}$ от начала, т. е. для нее $|uv| < \frac{5}{3}$. Переведем ее гиперболическим поворотом на биссектрису 1-го координатного угла и построим для нее координатный ромб (квадрат) такой, чтобы она лежала на середине его стороны (фиг. 25). Заметим, что если точка M лежит на этой биссектрисе на гиперболическом расстоянии от начала, меньшем $\frac{5}{3}$, то точек Γ нет не только в гиперболическом кресте $|uv| < 1$, но и в заштрихованном сегменте μ, в середине хорды которого лежит точка M, так как сегмент, получающийся

из сегмента μ гомотетичным из точки M увеличением вдвое, в этом случае как раз еще лежит в области $|uv| < 1$.

Если сегменты ν, π, $\varkappa$, включая их гиперболические дуги, пустые, то рассматриваемый ромб—пустой и точка M—единственная, расположенная на его стороне, лежащей в первом координатном угле, т. е. есть вершина разделенного параллелограмма.

Предположим теперь, что не все сегменты ν, π, $\varkappa$ пустые, а, например, что есть точка N решетки Γ в сегменте ν.

В таком случае на отрезке MN нет точек Γ, так как часть его, лежащая в сегменте μ и в области γ, длиннее его половины. Любая прямая, параллельная MN и лежащая от нее по ту сторону, где лежит начало, которая образует с областью γ, дополненной сегментом μ, хорду не более короткую, чем MN, если N выше M, дает с третьим координатным углом хорду, более длинную чем MN, а с четвертым — имеет бесконечную общую часть. Если же N ниже M, то такая прямая с третьим координатным углом имеет бесконечную общую часть, а с четвертым, дополненным теми частями креста γ, которые к нему прилегают, образует хорду, более длинную чем MN. В ближайшем параллельном к MN линейном ряду точек Γ есть, следовательно, как точки, лежащие в третьем, так и лежащие в четвертом координатном угле. Если C и D — соседние его точки, лежащие по разные стороны оси v, то $MNCD$ — разделенный параллелограмм.

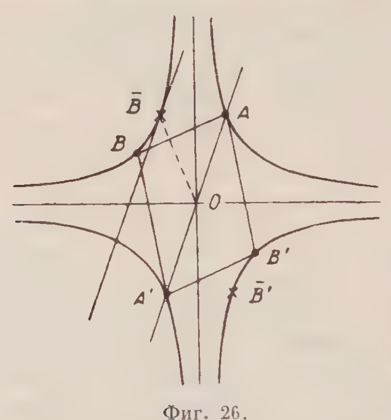
Предположим теперь, что точек Γ нет ни в сегменте ν, ни в сегменте $\varkappa$, но есть точка P из Γ в сегменте π. Тогда, во-первых, в π лежит только одна эта точка из Γ, так как если бы была еще вторая P', то вектор PP' или $P'P$, отложенный от точки M, дал бы точку внутри ромба, не лежащую в сегменте π.

Рассмотрим теперь полоску, образованную прямой стороны ромба, проходящей через точку M, и ей параллельной прямой, проходящей через точку P. Те части хорд, образуемых с этой полоской прямыми, параллельными MP, которые лежат вне ромба, находятся во втором и четвертом координатных углах. Пусть B — точка ближайшего к MP параллельного ряда Γ, лежащая на такой хорде во втором координатном угле; тогда точка D, ей симметричная по отношению к середине между M и P, лежит в четвертом угле, и параллелограмм $MBPD$ разделенный.

Если точка M лежит на биссектрисе первого угла ровно на гиперболическом расстоянии $\frac{5}{3}$ от начала, то возможен исключительный случай, когда в точках $M_1 M_2 M_{-1} M_{-2}$ лежат точки решетки Γ (фиг. 25), и тогда предыдущие рассуждения неприменимы. Решетка Γ с такими точками, не имеющая точек в кресте γ, существует — это решетка Γ_3 из той последовательности Γ_1, Γ_2, ... решеток, которую мы рассматриваем в пункте 9.

8. Решетка с наименьшей площадью основного параллелограмма, вовсе не имеющая точек в области $|uv| < 1$. Так как всякая решетка, вовсе не имеющая точек в области $|uv| < 1$, и подавно вовсе не имеет точек на осях u и v, то в любой такой решетке есть хоть один разделенный параллелограмм. Его вершины, очевидно, лежат по одной в каждом из «карманов», образуемых гиперболическим крестом.

Применим локальный метод [см. мою работу ([10])], т. е. найдем наименьший по площади такой параллелограмм. Можно, очевидно, только уменьшая площадь такого «допустимого» разделенного параллелограмма, сделать так, чтобы три из его вершин лежали на границе области (при помощи гомотетии к началу, гомотетии к той вершине, которая при этом первая попадет на границу γ, и сжатия к прямой, проходящей через эту и вторую вершину, которая попадет на границу γ). Если, например, A, B, C уже лежат на границе γ, то, передвигая сторону CD параллельно самой себе так, чтобы C оставалась на границе γ и площадь уменьшалась, можно, очевидно, добиться того,



Фиг. 26.

чтобы и D оказалось на границе γ. В этом положении параллелограмм $ABCD$ будет иметь свой центр симметрии в начале O. Оставляя его таким, можно, закрепив точку A, передвигать по соответственной гиперболе точку B, лишь уменьшая площадь параллелограмма, пока она не попадет (фиг. 26) в конец $\bar{B}$ радиуса, сопряженного с радиусом OA. Такой параллелограмм лишь гиперболическим поворотом отличается от квадрата, вершины которого лежат в вершинах гипербол $uv = \pm 1$.

Всякий допустимый разделенный параллелограмм можно, следовательно, лишь уменьшая его площадь, преобразовать в этот квадрат, который есть поэтому (с точностью до гиперболических поворотов) допустимый разделенный параллелограмм наименьшей площади. Так как решетка, на нем построенная, очевидно не имеет точек в γ, то она (из дальнейших соображений будем обозначать ее через Γ_∞) есть предель-

ная решетка с наименьшей площадью основного параллелограмма. Эту предельную решетку с площадью 4 мы будем также называть решеткой Минковского.

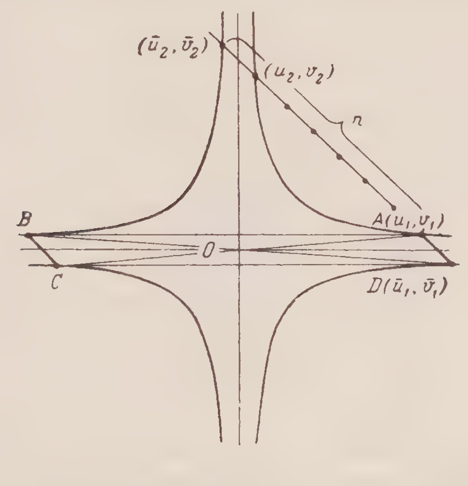
9. **Последовательность предельных решеток Γ_n, площади основных параллелограммов которых, уменьшаясь, приближаются как к пределу к площади предельной решетки Минковского.** Рассмотрим предельные решетки Γ_n, соответствующие периодическим рядам $(\alpha\alpha')$ вида:

$$\ldots, \underline{nn}, \overline{nn}, \underline{nn}, \overline{nn}, \underline{nn}, \ldots \qquad (n)$$

т. е. таким, все элементы α и α' которых равны, а пары подчеркнуты попеременно, одна сверху и одна снизу. В силу симметрии ряда (n) относительно каждого из его элементов, очевидно, что:

1° решетка Γ_n симметрична по отношению к началу и

2° все вершины ее разделенных параллелограммов имеют одинаковые по абсолютной величине гиперболические расстояния от начала.



Фиг. 27.

В силу теоремы п. 7, они дают нижнюю грань абсолютных величин таких расстояний для всех точек решетки Γ_n. Если решетка предельная, то эти расстояния все равны ± 1 и, следовательно, все вершины разделенных параллелограммов лежат на границе области γ.

Найдем площадь s_n основного параллелограмма такой предельной решетки Γ_n. Для этого сделаем такой гиперболический поворот, чтобы сторона AD некоторого разделенного параллелограмма этой решетки Γ_n стала перпендикулярной к биссектрисе 1-го координатного угла, и пусть тогда уравнение ее прямой есть $u + v = t$. В таком случае (фиг. 27) координаты u, v точек пересечения этой прямой с гиперболами $uv = 1$, $uv = -1$ получатся из квадратных уравнений

$$u^2 - ut + 1 = 0; \quad \bar{u}^2 - \bar{u}t - 1 = 0,$$

а именно

$$u_1 = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}, \quad u_2 = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4}}{2}$$

и

$$\bar{u}_1 = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2}, \quad \bar{u}_2 = \frac{t - \sqrt{t^2 + 4}}{2}.$$

Из фиг. 27 имеем

$$\frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{u_1 - u_2} = \frac{n+1}{n-1},$$

но

$$u_1 - u_2 = \sqrt{t^2 - 4}, \quad \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \sqrt{t^2 + 4},$$

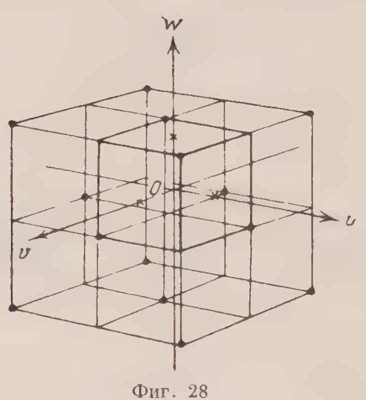
следовательно,

$$t^2 = \frac{2(n^2+1)}{n},$$

и значит

$$s_m = 2\begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{v}_1 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \bar{u}_1 & t - u_1 \\ u_1 & t - u_1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2t(\bar{u}_1 - u_1) = 2t\,\frac{\sqrt{t^2+4} - \sqrt{t^2-4}}{2} = 4\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}.$$



Фиг. 28

Мы видим, таким образом, что в рассматриваемом нами двумерном случае Минковского, т. е. когда область γ есть область $|uv| < 1$ и допустимыми считаются решетки, вовсе не имеющие точек в области γ, существует последовательность предельных решеток $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, площади основных параллелограммов которых, начиная от $s_1 = 4\sqrt{2}$, уменьшаясь, приближаются как к пределу к площади $s_\infty = 4$ предельной решетки Минковского с наименьшей площадью. Тут дело обстоит как бы обратно тому, как в случае Маркова.

10. Пример трехмерной решетки, вовсе не имеющей точек на плоскостях координат uv, vw, wu, в которой нет разделенного основного параллелепипеда. Пусть u, v, w—трехмерные декартовы координаты и пусть Γ—трехмерная решетка, вовсе не имеющая точек на координатных плоскостях uv, vw, wu.

Такой основной параллелепипед решетки Γ, каждая из восьми вершин

которого лежит в своем из восьми координатных углов, мы будем называть **разделенным основным параллелепипедом** одного из решетки Г *.

Разумеется, что существуют решетки Г, имеющие разделенные основные параллелепипеды. Такою, например, будет решетка, если грани одного из основных параллелепипедов параллельны координатным плоскостям, а центр его лежит в начале координат. Покажем, однако, что бывают решетки Г, в которых нет разделенных основных параллелепипедов.

Пусть оси координат u, v, w прямоугольные. Рассмотрим центрогранную кубическую решетку Γ_k такую, что начало лежит в центре одной из восьмушек центрируемого куба (фиг. 28) и координатные плоскости параллельны граням этого куба; докажем, что

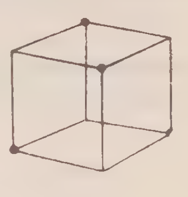
1° в ней нет точек, лежащих на координатных плоскостях и

2° в ней нет разделенного основного параллелепипеда.

Для этого заметим, во-первых, что если имеется кубическая решетка, т. е. решетка, основной параллелепипед которой есть куб, и мы центрируем все грани всех этих ее кубов, то получится опять решетка, но уже построенная на меньшем косом параллелепипеде, так называемая **центрогранная кубическая решетка**, играющая весьма большую роль в кристаллографии.

Если мы мысленно разрежем центрируемый большой куб на восемь малых кубов, то каждый такой малый куб K будет иметь точки этой центрогранной кубической решетки в четырех из своих восьми вершин.

Если сгустить нашу решетку Γ_k, добавив точки во все незанятые вершины малых кубов, то получится кубическая решетка Γ_k', для которой основным параллелепипедом является малый куб. Ни одна точка даже этой более густой решетки Γ_k' не лежит на плоскостях координат, так как эти плоскости идут внутри пустых слоев решетки Γ_k'; таким образом, свойство 1° для решетки Γ_k доказано.



Фиг. 29

Пусть, теперь, в какой-нибудь решетке Г, вовсе не имеющей точек на координатных плоскостях, есть разделенный основной параллелепипед. В таком случае грани его, пересекающие ось u, мы будем называть u-гранями, пересекающие ось v, — v-гранями, пересекающие ось w, — w-гранями, и соответственно им будем рассматривать u-слой, v-слой и w-слой, соответствующий этому параллелепипеду. Всякая плоскость, не параллельная осям координат и не проходящая через начало, пересекает семь координатных октантов, причем от одного и только от одного из них отсекает пирамиду.

* В случае плоскости разделенный основной параллелограмм я называл просто **разделенным параллелограммом**, так как там я не рассматривал никаких разделенных параллелограммов, кроме основных. В пространственном же случае я буду в дальнейших работах рассматривать разделенные параллелепипеды и не основные, поэтому тут, когда я рассматриваю основной разделенный параллелепипед, приходится это подчеркивать.

Рассмотрим ту из двух u-граней нашего разделенного параллелепипеда, плоскость которой ближе к началу O, и отразим ту пирамиду, которую эта плоскость отрезает от одного из координатных октантов в координатных плоскостях. Мы получим октаэдр, диагонали которого лежат на координатных осях u, v, w. Этот октаэдр назовем u-октаэдром рассматриваемого разделенного параллелепипеда. Аналогично можно рассматривать его v-октаэдр и w-октаэдр.

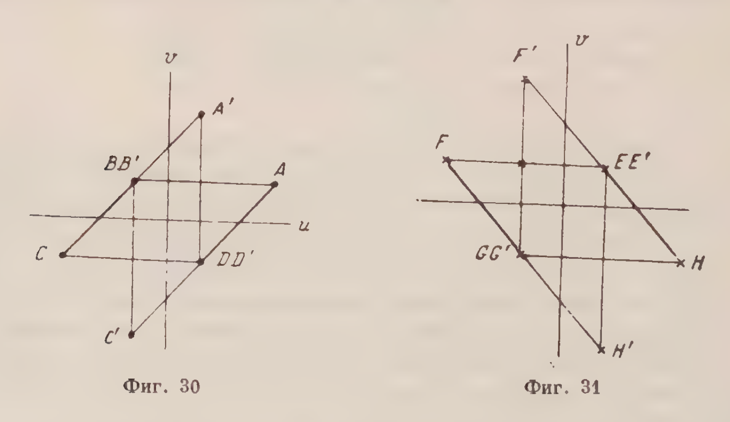
Вообще, всякий октаэдр, диагонали которого лежат на координатных осях u, v, w, пустой внутри и на границе которого лежит хоть одна точка Г, будем называть **предельным октаэдром** решетки Г. Семейство предельных октаэдров, очевидно, двупараметрическое; если заданы длины двух его диагоналей, то третья уже тем самым задана.

u,- v- и w-октаэдры разделенного параллелепипеда суть, очевидно, некоторые предельные октаэдры.

Рассмотрим все предельные октаэдры решетки Γ_k по отношению к осям u, v, w. В силу того, что всякий октаэдр, имеющий диагонали на осях u, v, w, симметричен относительно начала O, предельные октаэдры решетки Γ_k будут те же самые, что у решетки Γ'_k. Но все точки решетки Γ'_k расположены внутри и на границе трехгранных углов, «вертикальных» трехгранным углам малого куба K, имеющего в своем центре начало O, и потому предельные октаэдры решетки Γ_k имеют грани, проходящие через вершины этого куба K и «опорные» к кубу K.

Таким образом, всякий предельный октаэдр решетки Γ_k есть октаэдр, описанный вокруг куба K.

Предположим теперь, что в решетке Γ_k был бы разделенный основной параллелепипед. Рассмотрим, например, его w-октаэдр. Он, как предельный, будет описан вокруг куба K; w-слой, ему соответствующий, т. е.



Фиг. 30 Фиг. 31

слой, образованный плоскостями w-граней этого октаэдра, т. е. граней этого октаэдра, параллельных w-граням рассматриваемого параллелепипеда, не должен содержать внутри себя точек решетки Γ_k. А между тем плоскости его будут двумя противоположными опорными плоскостями куба K и, следовательно, это возможно, только если эти плоскости суть

плоскости двух противоположных граней куба K. Действительно, если они касаются куба в двух противоположных вершинах, то шесть вершин куба лежат внутри между ними, а между тем в трех из них расположены точки Γ_k. Если же эти плоскости касаются куба по двум противоположным ребрам, то четыре вершины куба лежат внутри между ними, а между тем в двух из них расположены точки Γ_k. В случае же, когда плоскости, ограничивающие w-слой w-октаэдра, соответствующего рассматриваемому разделенному основному параллелепипеду решетки Γ_k, суть плоскости двух противоположных граней куба K, октаэдр вырождается в самый этот слой, так как плоскости эти параллельны координатной плоскости uv, и, следовательно, диагонали, лежащие на осях u и v, бесконечны. В этом случае две из граней разделенного параллелепипеда параллельны координатной плоскости uv.

Посмотрим, может ли быть такой разделенный основной параллелепипед. Его вершины $ABCD$, $EFGH$ лежат тогда в соседних параллельных uv плоских решетках, из которых первая расположена выше, а вторая ниже плоскости uv, причем $ABCD$ и $EFGH$ суть разделенные параллелограммы этих решеток по отношению к плоскостям uw и vw. В нашем случае в каждой из этих решеток два и только два разделенных параллограмма — в верхней $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (фиг. 30), а в нижней $EFGH$ и $E'F'G'H'$ (фиг. 31). Но ни один из этих параллелограммов верхней решетки не получается параллельным переносом ни из одного из этих параллелограммов нижней. Следовательно, в Γ_k нет разделенных основных параллелепипедов с гранями, параллельными координатной плоскости uv.

Аналогично это может быть показано и для других координатных плоскостей. Мы видим, таким образом, что в Γ_k вообще нет разделенных основных параллелепипедов.

Поступило
4.V.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Voronoï G. F., Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, Journ. für reine und angew. Math. Bd. 133 (1908), 97—178.

[2] Minkowski H., Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen, Journ. für reine und angew. Math. Bd. 107 (1891), 278—297.

[3] Minkowski H., Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, Journ. für reine und angew. Math., Bd. 129 (1905), 220—274.

[4] Марков А. А., О неопределенных тройничных квадратичных формах, Изв. Ак. Наук, т. XIV, № 5 (1901), 510—523.

[5] Марков А. А., О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными, Изв. Ак. Наук, т. XVI, № 3 (1902), 97—108.

[6] Markoff A., Table des formes quadratiques ternaires indéfinies ne représentantes pas zéro pour déterminants positifs $d \leqslant 50$. Mémoires de l'Académie Imp. des Sciences de St.-Pétersbourg, VIII sér., vol. XXIII, № 7, 1909.

[7] Венков Б. А., Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм, 9 (1945), 429—494.

[8] Davenport H., On a conjecture of Mordell concerning binary cubic forms' Proc. Cambridge Philos. Soc. 37 (1941), 325—330.
[9] Davenport H., On the product of three homogeneous linear forms. IV. Proc. Cambridge Philos. Soc. 39 (1943), 1—21.
[10] Mordell L. I., On the geometry of numbers in some non-convex regions, Proc. London Math. Soc. (2) 48 (1945), 339—390.
[11] Делоне Б. Н., Локальный метод в геометрии чисел, Изв. Ак. Наук СССР, 9 (1945), 241—256.
[12] Minkowski H., Über die Annäherung an eine reele Grösse durch rationale Zahlen, Math. Ann., Bd. 54 (1901), 91—124.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
11 (1947), 539–546

Ю. В. ЛИННИК и А. А. РЕНЬИ

О НЕКОТОРЫХ ГИПОТЕЗАХ ТЕОРИИ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье исследуется взаимная связь некоторых гипотез теории характеров Дирихле, в частности, гипотезы о порядке роста наименьшего степенного невычета (mod d) и о порядке роста суммы последовательных значений неглавного примитивного характера.

В настоящей статье мы занимаемся следующими известными гипотезами, принадлежащими И. М. Виноградову.

Пусть $\chi(n)$ — неглавный примитивный характер mod D. Всюду, кроме теоремы I, $\chi(n)$ будет считаться вещественным характером, $\pm D$ — фундаментальным дискриминантом.

ГИПОТЕЗА I/a. *Пусть $N_{\min}$ означает наименьшее положительное число, для которого $\chi(n) \neq +1$. Тогда $N_{\min} < D^{\frac{1}{k}}$ для любого $k > 0$ и достаточно большого $D > D_0(k)$.*

Мы будем формулировать эту гипотезу также в следующей более слабой форме:

ГИПОТЕЗА I/b. *Пусть $N^*_{\min}$ означает число с наименьшей абсолютной величиной ($\neq 0$), для которого $\chi(n) \neq +1$. Тогда $N^*_{\min} < D^{\frac{1}{k}}$ для $D > D_0(k)$ и любого $k > 0$.*

Очевидно, гипотеза I/b верна для $\chi(-1) = -1$ и эквивалентна гипотезе I/a в случае $\chi(-1) = +1$.

ГИПОТЕЗА II. *Если $P_{\min}$ означает наименьшее простое число, для которого $\chi(p) = +1$, то $P_{\min} < D^{\frac{1}{k}}$ для любого $k > 0$ и $D > D_0(k)$*.*

Ниже будут доказаны теоремы, освещающие в некоторой степени связь этих гипотез с двумя другими проблемами аналитической теории чисел, именно, с вопросами об истинном порядке величин

---

* Эта гипотеза имеет весьма важное значение для теории положительных тернарных квадратичных форм [см. (1)].

$$M(\chi) = \max_{1 \leqslant x \leqslant D-1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \right| \tag{1}$$

и

$$L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}. \tag{2}$$

Относительно $M(\chi)$ известны следующие оценки:

$$\sqrt{\frac{D}{12}} < M(\chi) < \sqrt{D} \ln D. \tag{3}$$

Верхняя оценка принадлежит G. Pólya ([2]), нижняя оценка следует из формулы Parseval'я для ряда Fourier функции $S(x) = \sum_{n \leqslant xD} \chi(n)$ [см. также статью ([3]) одного из авторов]. Что касается $L(1, \chi)$, то из (3) имеем

$$|L(1, \chi)| < \ln D. \tag{4}$$

Следуя Littlewood'у ([4]), из расширенной гипотезы Riemann'а можно вывести, что

$$\frac{1+o(1)}{2b \ln \ln D} \leqslant |L(1, \chi)| \leqslant (1+o(1))\, 2c \ln \ln D, \tag{5}$$

где $b = \frac{6}{\pi^2} e^C$, $c = e^C$ и C—постоянная Эйлера.

Если $\chi(n)$ — вещественный характер, то известно, что $L(1, \chi)$ положительно (основная лемма в теореме Дирихле о прогрессиях) и что

$$L(1, \chi) > \frac{c(\varepsilon)}{D^{\varepsilon}}$$

для любого $\varepsilon > 0$. [Последнее неравенство эквивалентно знаменитому неравенству Siegel'я ([5])]. Мы докажем следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Либо верна гипотеза* I / b, *либо* $M(\chi) < c\sqrt{D}$.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\chi(n)$ — *вещественный характер, то либо верна гипотеза* II, *либо* $M(\chi) < c\sqrt{D}$.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $\chi(n)$ — *вещественный характер, то либо верна гипотеза* I / a, *либо* $L(1, \chi) > c \ln D$.

Здесь c означает константу, зависящую только от k.

Эти три теоремы можно выразить в более сжатой форме. Очевидно, три вышеуказанные гипотезы эквивалентны следующим утверждениям:

ГИПОТЕЗА I / a. $\lim\limits_{D \to \infty} \frac{\ln N_{\min}}{\ln D} = 0.$

ГИПОТЕЗА I / b. $\lim\limits_{D \to \infty} \frac{\ln N^{*}_{\min}}{\ln D} = 0.$

ГИПОТЕЗА II. $\lim\limits_{D \to \infty} \frac{\ln P_{\min}}{\ln D} = 0.$

Далее, сформулируем следующие гипотезы:

ГИПОТЕЗА III. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{M(\chi)}{\sqrt{D}\ln D} = 0.$

ГИПОТЕЗА IV. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{|L(1,\chi)|}{\ln D} = 0.$

Хотя мы ничего не можем сказать об их верности или неверности, мы получаем:

ТЕОРЕМА 1 / b. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{\ln N^*_{\min}}{\ln D} \cdot \frac{M(\chi)}{\sqrt{D}\ln D} = 0.$

ТЕОРЕМА 2 / b. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{\ln P_{\min}}{\ln D} \cdot \frac{M(\chi)}{\sqrt{D}\ln D} = 0.$

ТЕОРЕМА 3 / b. *Из* $\overline{\lim\limits_{D\to\infty}} \frac{\ln N_{\min}}{\ln D} > 0$ *следует*

$$\overline{\lim_{D\to\infty}} \frac{|L(1,\chi)|}{\ln D} > 0.$$

Последние теоремы содержатся, соответственно, в теоремах 1, 2 и 3 Первая из наших теорем доказывается с помощью следующей общей леммы.

ЛЕММА. *Пусть* $a(n)$ *означает мультипликативную функцию такую, что* $a(n\cdot m) = a(n)\cdot a(m)$ *для* $(m, n) = 1$ *и пусть* $|a(n)| \leqslant 1$. *Пусть, далее,* $f(x)$ *периодична с периодом* 1, *а* $G_k(\eta)$ — *совокупность целых чисел* $\leqslant \eta x$ $(0 < \eta \leqslant 1)$, *все простые множители которых* $\leqslant x^{\frac{1}{k}}$. *Тогда*

$$\left| \sum_{n\in G_k(\eta)} \frac{a(n)f(n\vartheta)}{n} \right| \leqslant c \max_{\substack{1\leq n\leq x\\ 0\leq\vartheta\leq 1}} \left| \sum_{1}^{n} \frac{a(m)f(m\vartheta)}{m} \right| = cM,$$

где c *зависит только от* k.

Доказательство. Пусть $H_k(\eta)$ — множество целых чисел, все простые множители которых $> x^{\frac{1}{k}}$. Имеем

$$\sum_{n\in G_k(\eta)} \frac{a(n)f(n\vartheta)}{n} = \sum_{n\leq\eta x} \frac{a(n)f(n\vartheta)}{n} - \sum_{r\in H_k(\eta)} \frac{a(r)}{r} \sum_{n\in G_k\left(\frac{\eta}{r}\right)} \frac{a(n)f(nr\vartheta)}{n}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{n\in G_k(\eta)} \frac{a(n)f(n\vartheta)}{n} \right| \leqslant M + \left(\sum_{r\in H_k(\eta)} \frac{1}{r} \right) \cdot \max_{\substack{r\in H_k(\eta)\\ 0\leq\varphi\leq 1}} \left| \sum_{n\in C_k\left(\frac{\eta}{r}\right)} \frac{a(n)f(n\varphi)}{n} \right|, \tag{7}$$

где

$$M = \max_{\substack{1\leq n\leq x\\ 0\leq\vartheta\leq 1}} \left| \sum_{1}^{n} \frac{a(m)f(m\vartheta)}{m} \right|. \tag{8}$$

С помощью известной теоремы Mertens'а получаем

$$\sum_{r \in H(\eta)} \frac{1}{r} \leqslant \prod_{x^{\frac{1}{k}} < p \leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \leqslant 2k, \quad \text{если } x > e^{15k^2}. \tag{9}$$

Применяя это неравенство $(k-1)$ раз, найдем

$$\left| \sum_{n \in G_k(\eta)} \frac{a(n) f(n\vartheta)}{n} \right| \leqslant M(1+2k+(2k)^2+\ldots+(2k)^{k-2})+m(2k)^{k-1}, \tag{10}$$

где

$$m = \max_{\substack{r_i \in H_k(\eta) \\ 0 \leq \varphi \leqslant 1}} \left| \sum_{m \in G_k\left(\frac{\eta}{r_1 r_2 \cdots r_{k-1}}\right)} \frac{a(m) f(m\varphi)}{m} \right|. \tag{11}$$

В силу определения множеств $G_k(\eta)$ и $H_k(\eta)$, очевидно, что

$$\frac{\eta}{r_1 r_2 \cdots r_{k-1}} < x^{\frac{1}{k}}.$$

Далее, из (11) и (8) следует, что $m \leqslant M$.

Таким образом,

$$\left| \sum_{n \in G_k(\eta)} \frac{a(n) f(n\vartheta)}{n} \right| \leqslant M(2k)^k \tag{12}$$

и наша лемма доказана.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующее известное неравенство:

$$\left| \sum_{1}^{N} \frac{\sin n\vartheta}{n} \right| \leqslant \frac{\pi}{2} + 1. \tag{13}$$

Наиболее изящно его можно доказать, следуя L. Fejér'у. Ряд $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ есть ряд Fourier для $\frac{\pi-\vartheta}{2}$ $(0 < \vartheta < 2\pi)$, и по одной теореме Fejér'а (6), его средние арифметические равномерно ограничены теми же границами, что и сама функция, т. е. $\pm \frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$\left| \sum_{1}^{N} \frac{\sin n\vartheta}{n} \right| \leqslant \left| \sum_{1}^{N} \frac{N+1-n}{(N+1)\cdot n} \sin n\vartheta \right| + \left| \sum_{1}^{N} \frac{\sin n\vartheta}{N+1} \right| \leqslant \frac{\pi}{2} + 1.$$

Применяя нашу лемму для случая $a(n)=1$, $f(x)=\sin 2\pi x$, найдем

$$\left| \sum_{n \in G_k(\eta)} \frac{\sin 2\pi n\vartheta}{n} \right| \leqslant \left(\frac{\pi}{2}+1\right)(2k)^k. \tag{14}$$

Предположим, что гипотеза I неверна, так что для какого-либо $k > 0$ имеем $\chi(n) = 1$ при $n \in G_k(1)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{D} \frac{\overline{\chi}(n) \sin 2\pi n\vartheta}{n} = \sum_{n \in G_k(1)} \frac{\sin 2\pi n\vartheta}{n} + \sum_{r \in H_k(1)} \frac{\overline{\chi}(r)}{r} \sum_{n \in G_k\left(\frac{1}{r}\right)} \frac{\sin 2\pi n r\vartheta}{n}. \qquad (15)$$

В силу (14) и (9), левая часть (15) будет равномерно ограничена.

Далее, рассмотрим ряд Fourier для функции $S(x) = \sum_{n \leq xD} \chi(n)$, который в случае $\chi(-1) = +1$ (единственно интересном здесь) имеет вид

$$S(x) \sim \frac{\varepsilon \sqrt{D}}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\overline{\chi}(n)}{n} \sin 2\pi n x, \qquad (16)$$

где $|\varepsilon| = 1$. Очевидно, можно положить $x = \frac{l}{D}$, где l — целое. Тогда

$$\left| S\left(\frac{l}{D}\right) \right| \leq \frac{\sqrt{D}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) (2k)^k (2k+1) + \frac{\sqrt{D}}{\pi} \left| \sum_{n=D+1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \sin 2\pi n \frac{l}{D} \right|. \qquad (17)$$

Остаточный член оценим с помощью равенства

$$\sum_{1}^{D-1} \overline{\chi}(n) \sin 2\pi n \frac{l}{D} = 0,$$

из которого следует

$$\left| \sum_{D+1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \sin 2\pi n \frac{l}{D} \right| \leq 1. \qquad (18)$$

Таким образом,

$$M(\chi) = \max_{1 \leq l \leq D-1} \left| S\left(\frac{l}{D}\right) \right| < \sqrt{D} (2k)^{k+2}, \qquad (19)$$

что доказывает теорему 1.

Теорема 2 также следует из нашей леммы. Вместо неравенства (13) используем теорему И. М. Виноградова, которую мы применяем в форме, опубликованной Davenport'ом ([7]), доказавшим, что

$$\sum_{1}^{x} \mu(n) e^{2\pi i n\vartheta} = O\left(\frac{x}{(\ln x)^h}\right) \qquad (20)$$

равномерно по ϑ для любого $h > 0$. Выбирая $h \geq 2$, найдем с помощью суммирования по Абелю, в силу сходимости ряда $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$, что

$$\left|\sum_{1}^{D} \frac{\mu(n)\sin 2\pi n\vartheta}{n}\right| \leqslant c. \tag{21}$$

Применяя нашу лемму для случая $a(n)=\mu(n)$, $f(x)=\sin 2\pi x$, найдем

$$\left|\sum_{n\in G_k(\eta)} \frac{\mu(n)\sin 2\pi\mu\vartheta}{n}\right| \leqslant c(k). \tag{22}$$

Пусть, теперь, гипотеза II неверна для данного $k>0$ и вещественного характера $\chi(n)$. В этом случае, очевидно,

$$\chi(n)=\chi(\bar{n})=\lambda(n) \quad \text{для} \quad n\in G_k(1)$$

($\lambda(n)$ означает известную функцию Liouvill'я). Если $n=q\in G_k(1)$ свободно от квадратов, то $\bar{\chi}(q)=\mu(q)$. Отсюда имеем

$$\sum_{1}^{D} \frac{\bar{\chi}(n)\sin 2\pi n\vartheta}{n} =$$

$$=\sum_{m^2\leqslant D} \frac{\bar{\chi}(m^2)}{m^2}\left(\sum_{n\in G_k\left(\frac{1}{m^2}\right)} \frac{\mu(n)\sin 2\pi n m^2\vartheta}{n} + \sum_{r\in H_k(1)} \frac{\bar{\chi}(r)}{r} \sum_{n\in G_k\left(\frac{1}{rm^2}\right)} \frac{\mu(n)\sin 2\pi n m^2 r\vartheta}{n}\right). \tag{23}$$

Сопоставляя формулы (23), (22), (9) и (16), мы получаем утверждение теоремы II для случая $\chi(-1)=+1$.

Случай $\chi(-1)=-1$ будет изучен ниже.

Теорему 3 можно доказать с помощью следующей формулы, принадлежащей к типу, изученному A. Wintner'ом ([8]). Пусть $g(n)=\sum_{d/n}\chi(d)$; тогда

$$L(1,\chi)=\frac{1}{x}\sum_{1}^{x} g(n)+O\left(\frac{\sqrt{D}\ln D}{\sqrt{x}}\right). \tag{24}$$

Для доказательства (24) используем следующую оценку [см. ([8])]:

$$\sum_{1}^{x}\left|\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)-\left(\frac{x}{n+1}-\left[\frac{x}{n+1}\right]\right)\right| \leqslant 4\sqrt{x}. \tag{25}$$

Мы имеем

$$L(1,\chi)=\frac{1}{x}\sum_{1}^{x} g(n)+\frac{1}{x}\sum_{1}^{x}\chi(n)\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)+\sum_{x+1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}. \tag{26}$$

Суммированием по Абелю из (25) и (3) получаем (24).

Пусть теперь $\chi(n)$ — вещественный характер. Тогда, очевидно,

$$g(n)=\sum_{d/n}\chi(d)=\prod_{p^\alpha/n}(1+\chi(p)+\chi(p^2)+\ldots+\chi(p^\alpha))\geqslant 0. \tag{27}$$

Для доказательства теоремы 3 предположим, что гипотеза I неверна для данного $k>0$ и D. Тогда $\chi(n)=1$ для $n \in G_k(1)$. Полагая в (24) $x = D \ln^2 D$, находим

$$L(1,\chi) \geqslant \frac{1}{x} \sum_{n \in G_k(1)} \sum_{d/n} 1 + O(1) \geqslant \frac{1}{x} \sum_{d \leqslant D^{\frac{1}{k}}} \sum_{\delta \in G_k\left(\frac{1}{d}\right)} 1 + O(1). \tag{28}$$

Следуя теореме Бухштаба, согласно которой число чисел $\leqslant x$, все простые множители которых $\leqslant x^{\frac{1}{k}}$, превосходит $cxe^{-k \ln k}$, получаем

$$L(1,\chi) \geqslant ce^{-k \ln k} \sum_{d \leqslant D^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{d} \geqslant \frac{c}{k} e^{-k \ln k} \ln D, \tag{29}$$

что и доказывает теорему 3.

Остается доказать теорему 2 для случая $\chi(-1) = -1$. Рассмотрим ряд Фурье для функции $S(x)$:

$$S(x) \sim a_0 + \frac{s\sqrt{D}}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\overline{\chi}(n)}{n} \cos 2\pi n x, \tag{30}$$

где $a_0 = \frac{-s\sqrt{D}}{\pi} L(1,\chi)$. Предположим, что гипотеза II неверна. Тогда, полагая в (24) $x = D \ln^2 D$, найдем

$$L(1,\chi) \leqslant \frac{1}{x} \sum_{n \in G_{k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \sum_{\delta \in H_{k+1}\left(\frac{1}{n^2}\right)} g(\delta) + O(1), \tag{31}$$

где

$$\delta = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}, \quad r \leqslant k+1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r \leqslant k+1$$

и, следовательно,

$$g(\delta) = \prod_{1}^{r} (1+\alpha_i) \leqslant \left(\frac{\sum_{1}^{r} \alpha_i + r}{r} \right)^r \leqslant \left(\frac{k+1}{r} \right)^r \leqslant 2^{k+1}.$$

Таким образом,

$$L(1,\chi) \leqslant \frac{2^{k+1}}{x} \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n^2} + O(1) = O(1), \tag{32}$$

откуда следует, что $|a_0| < c\sqrt{D}$, что и требовалось доказать.

Проведенное доказательство будет аналогично доказательству в случае $\chi(-1) = +1$, если в формулах (21), (22) и (23) заменить sin на cos, что можно сделать, используя равенство (20).

Поступило
30.1.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Линник Ю. В., О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 363—402.

[2] Polya G., Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, Nachrichten d. G. d. W. Göttingen, 1, (1918), 21—29.

[3] Реньи А. А., Об одном новом применении метода И. М. Виноградова, Доклады Ак. Наук СССР, LVI (7) (1947), 675—678.

[4] Littlewood J. E., On the class number of the corpus $P(\sqrt{-k})$, Proc. London Math. Soc. (2), 27 (1928), 358—372.

[5] Siegel C. L., Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper, Acta Arithmetica 1 (1935), 83—86.

[6] Fejér L., Untersuchungen Über Fouriersche Reihen, Math. Annalen 58 (1904), 501—569.

[7] Davenport N., On some infinite series involving arithmetical functions (II), Quart. Journ. of Math. Oxf., ser. 8, 32 (1937), 313—320.

[8] Wintner A., Square root estimates of arithmetical sum functions, Duke Math. Journ. v. 18 (1946), 135—194.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

11 (1947), 547–560

А. О. ГЕЛЬФОНД и И. И. ИБРАГИМОВ

О ФУНКЦИЯХ, ПРОИЗВОДНЫЕ КОТОРЫХ РАВНЫ НУЛЮ В ДВУХ ТОЧКАХ

В статье рассматривается вопрос о единственности и существовании аналитической функции при задании ее последовательных производных в двух различных точках.

Известно, что если $f(z)$ — аналитическая функция в круге $|z-a|\leqslant R$ и если все ее последовательные производные в точке a равны нулю, то она тождественно равна нулю.

Естественно возникает вопрос: если все последовательные производные функции $f(z)$, голоморфной в круге $|z|\leqslant\rho$, равны нулю в двух различных внутренних точках a и b круга $|z|\leqslant\rho$, то при каких условиях функция $f(z)$ будет тождественно равна нулю?

Не уменьшая общности этой задачи, для простоты рассуждений предположим, что $a=0$, $b=1$ и функция $f(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f^{(\nu_s)}(1)=0 \quad (s=0, 1, 2, \ldots), \quad f^{(k)}(0)=0 \quad (k\neq\nu_s),$$

где ν_s — целые положительные числа.

В настоящей работе будут разобраны два случая: когда

$$\lim\left[\frac{\nu_s!}{(\nu_s-\nu_{s-1})!\ldots(\nu_1-\nu_0)!\,\nu_0!}\right]^{\frac{1}{\nu_s}}=\sigma\leqslant\infty$$

и когда ν_s образует арифметическую прогрессию.

1. Прежде чем перейти к разрешению поставленной задачи, докажем несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА I. *Если* $n-k\geqslant k+1$, *то*

$$\ln\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\leqslant n\ln n-k\ln k-(n-k)\ln(n-k). \tag{1}$$

Доказательство будем вести методом индукции. Заметим, что неравенство (1) верно для $k=0$. Покажем, что если (1) верно для заданного k, то оно будет верно и для $k+1$. Прежде всего заметим, что имеет место неравенство

$$k\ln k-(k+1)\ln(k+1)+(n-k)\ln(n-k)-(n-k-1)\ln(n-k-1)=$$
$$=-\ln(k+1)+k\ln\frac{k}{k+1}+\ln(n-k)-(n-k-1)\ln\frac{n-k-1}{n-k}=$$
$$=\ln\frac{n-k}{k+1}+(n-k-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-k-1}\right)-k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)>\ln\frac{n-k}{k+1}, \tag{2}$$

так как разность

$$(n-k-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-k-1}\right)-k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

есть положительное число при $n-k\geqslant k+1$.

Складывая неравенство (1) (по предположению верное для заданного k) и неравенство (2), находим, что

$$\ln\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\leqslant n\ln n-(k+1)\ln(k+1)-(n-k-1)\ln(n-k-1),$$

т. е. что неравенство (1) верно для $k+1$, что и требовалось доказать.

Следствие. Имея в виду очевидное тождество

$$\frac{\nu_s!}{(\nu_s-\nu_{s-1})!\,(\nu_{s-1}-\nu_{s-2})!\,\ldots\,(\nu_1-\nu_0)!\,\nu_0!}=$$
$$=\frac{\nu_s!}{(\nu_s-\nu_{s-1})!\,\nu_{s-1}!}\cdot\frac{\nu_{s-1}!}{(\nu_{s-1}-\nu_{s-2})!\,\nu_{s-2}!}\cdots\frac{\nu_1!}{(\nu_1-\nu_0)!\,\nu_0!},$$

в силу леммы I, получаем неравенство

$$\ln\frac{\nu_s!}{(\nu_s-\nu_{s-1})!\,\ldots\,(\nu_1-\nu_0)!\,\nu_0!}\leqslant$$
$$\leqslant\nu_s\ln\nu_s-(\nu_s-\nu_{s-1})\ln(\nu_s-\nu_{s-1})-\ldots-\nu_0\ln\nu_0. \qquad (3)$$

ЛЕММА II. *Если* $n\geqslant k>s\geqslant 0$, *то*

$$\left[\frac{n!}{(n-s)!\,s!}\right]^{\frac{1}{n-s}}\leqslant\left[\frac{k!}{(k-s)!\,s!}\right]^{\frac{1}{k-s}}. \qquad (4)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что справедливо неравенство

$$\frac{q+1}{q-s+1}<\frac{k+1}{k-s+1}=1+\frac{s}{k-s+1}\qquad (q>k). \qquad (5$$

Допустим, что при заданном k $(k>s)$

$$\frac{k!}{(k-s)!\,s!}\geqslant\left[\frac{k+1}{k-s+1}\right]^{k-s}.$$

Покажем, что это неравенство остается в силе при замене k на $k+1$. Действительно,

$$\frac{(k+1)!}{(k-s+1)!\,s!}=\frac{k!}{(k-s)!\,s!}\cdot\frac{k+1}{k-s+1}\geqslant\left[\frac{k+1}{k-s+1}\right]^{k+1-s}>\left[\frac{k+2}{k+2-s}\right]^{k+1-s}$$

Следовательно, в силу (5), при $n\geqslant k$ имеем

$$\frac{k!}{(k-s)!\,s!}>\left[\frac{n+1}{n-s+1}\right]^{k-s}. \qquad (6)$$

Пользуясь неравенством (6), находим

$$\left[\frac{k!}{(k-s)!\,s!}\right]^{n+1-s}=\left[\frac{k!}{(k-s)!\,s!}\right]^{n-s}\cdot\frac{k!}{(k-s)!\,s!}>\left[\frac{n!}{(n-s)!\,s!}\right]^{k-s}\cdot\frac{k!}{(k-s)!\,s!}>$$
$$>\left[\frac{n!\,(n+1)}{(n-s)!\,(n-s+1)\cdot s!}\right]^{k-s}=\left[\frac{(n+1)!}{(n-s+1)!\,s!}\right]^{k-s},$$

что и требовалось доказать.

Введем обозначения:

$$\sigma_s=\left[\frac{\nu_s!}{(\nu_s-\nu_{s-1})!\,\ldots\,(\nu_1-\nu_0)!\,\nu_0!}\right]^{\frac{1}{\nu_s}}, \qquad (7)$$

$$\tau_s=\left[\frac{\nu_s!}{(\nu_s-\nu_{s-1})!\,\nu_{s-1}!}\right]^{\frac{1}{\nu_s-\nu_{s-1}}}. \qquad (8)$$

Тогда из равенств (7) и (8) следует соотношение

$$\sigma_s^{\nu_s} = \tau_s^{\nu_s - \nu_{s-1}} \cdot \sigma_{s-1}^{\nu_{s-1}}. \tag{9}$$

ЛЕММА III. *Если последовательность* $\{\eta_n\}$ *имеет конечный нижний предел*

$$\varliminf_{n\to\infty} \eta_n = \eta < \infty,$$

то возможно одно из двух:

1° *или* $\eta_n > \eta_{n-1}$ *при* $n > n_0$,

2° *или существует подпоследовательность* $\{\eta_{n_i}\}$ *такая, что*

$$\lim_{i\to\infty} \eta_{n_i} = \eta \text{ и } \eta_{n-1} \geqslant \eta_n.$$

Доказательство. Действительно, или при $n > n_0$ $\eta_n > \eta_{n-1}$, или для бесчисленного множества n $\eta_{n-1} \geqslant \eta_n$. Во всяком случае совершенно очевидно, что нижний предел η_{n_i}, взятый по тем n_i, для которых $\eta_{n_i} \leqslant \eta_{n_i-1}$, равен точно σ. Этим и доказывается наша лемма.

Для сокращения записи в дальнейшем введем обозначения:

$$L_{n,s}[f(z), z] = \int_z^1 \int_0^{z_{\nu_s+1}} \ldots \int_0^{z_{\nu_{s+1}}-1} \ldots \int_{z_{\nu_{n-1}}}^0 \int_0^{z_{\nu_{n-1}}+1} \ldots \int_0^{z_{\nu_n-1}} f(z_{\nu_n})\, dz_{\nu_s+1} \ldots dz_{\nu_n}, \tag{10}$$

$$L_{n,s}[1, z] = \int_z^1 \int_0^{z_{\nu_s}+1} \ldots \int_0^{z_{\nu_{s+1}-1}} \ldots \int_{z_{\nu_{n-1}}}^1 \int_0^{z_{\nu_{n-1}}+1} \ldots \int_0^{z_{\nu_n-1}} dz_{\nu_n} \ldots dz_{\nu_s+1}, \tag{11}$$

$$\alpha_{n,s} = L_{n,s}[1, 0] =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{z_{\nu_s}+1} \ldots \int_0^{z_{\nu_{s+1}}-1} \ldots \int_{z_{\nu_{n-1}}}^1 \int_0^{z_{\nu_{n-1}}+1} \ldots \int_0^{z_{\nu_n-1}} dz_{\nu_{s+1}} dz_{\nu_{s+1}+1} \ldots dz_{\nu_n}. \tag{12}$$

Из равенства (12) нетрудно заметить, что

$$\alpha_{s+1,s} = \frac{1}{(\nu_{s+1} - \nu_s)!} \text{ и } \alpha_{s,s} = 1. \tag{12'}$$

ЛЕММА IV. *При* $0 \leqslant z \leqslant 1$

$$|L_{n,s} = [f(z), z]| \leqslant L_{n,s}[1, z] \cdot \max_{0\leqslant z\leqslant 1} |f(z)| \tag{13}$$

и при $f(z)$ *действительном* $(f(z) \geqslant 0)$

$$L_{n,s}[1, z] \cdot \min_{0\leqslant z\leqslant 1} |f(z)| < |L_{n,s}[f(z), z]|. \tag{13'}$$

Очевидно, неравенства (13) и (13′) следуют из равенства (10).

ЛЕММА V. *Для* $s \geqslant 1$ *имеет место неравенство*

$$\alpha_{n,s} < \frac{1}{(\nu_n - \nu_{n-1})! \ldots (\nu_{s+1} - \nu_s)!} \tag{14}$$

и для $s = 0$ *существует конечное число* α *такое, что*

$$\alpha_{n,0} > \frac{\alpha}{(\nu_n-\nu_{n-1})!\dots(\nu_1-\nu_0)!\,\nu_0!}, \tag{15}$$

если

$$\sum_{s=2}^{\infty} \frac{(\nu_s-\nu_{s-1})!\,(\nu_{s-1}-\nu_{s-2}-1)!}{(\nu_s-\nu_{s-2}-1)!} < \infty. \tag{15 }$$

Доказательство. Прежде всего, произведя $(\nu_n-\nu_{n-1})$ раз внутреннее интегрирование в правой части (11), находим

$$L_{n,s}[1,z] = L_{n-1,s}\left[\frac{1-z^{\nu_n-\nu_{n-1}}}{(\nu_n-\nu_{n-1})!}, z\right];$$

заменяя в равенстве (10) n на $n-1$, подставляя, затем, вместо $f(z)$ функцию $\frac{1-z_n^{\nu_n-\nu_{n-1}}}{(\nu_n-\nu_{n-1})!}$ и произведя $(\nu_{n-1}-\nu_{n-2})$ раз внутреннее интегрирование, получаем

$$L_{n-1,s}\left[\frac{1-z^{\nu_n-\nu_{n-1}}}{(\nu_n-\nu_{n-1})!}, z\right] =$$
$$= L_{n-2,s}\left[\frac{1-z^{\nu_{n-1}-\nu_{n-2}}}{(\nu_n-\nu_{n-1})!\,(\nu_{n-1}-\nu_{n-2})!} - \frac{1-z^{\nu_n-\nu_{n-2}}}{(\nu_n-\nu_{n-2})!}, z\right].$$

Таким образом,

$$L_{n,s}[1,z] = L_{n-2,s}\left\{\frac{1-z^{\nu_{n-1}-\nu_{n-2}}}{(\nu_n-\nu_{n-1})!\,(\nu_{n-1}-\nu_{n-2})!}\left[1-\frac{1-z^{\nu_n-\nu_{n-2}}}{1-z^{\nu_{n-1}-\nu_{n-2}}}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{(\nu_n-\nu_{n-1})!\,(\nu_{n-1}-\nu_{n-2})!}{(\nu_n-\nu_{n-2})!}\right]; z\right\}.$$

Так как при $m > l$ и $0 \leqslant z \leqslant 1$

$$\frac{1-z^m}{1-z^l} \leqslant \frac{m}{l},$$

то

$$\left[1-\frac{(\nu_{n-1}-\nu_{n-2}-1)!\,(\nu_n-\nu_{n-1})!}{(\nu_n-\nu_{n-2}-1)!}\right]\cdot\frac{L_{n-1,s}[1,z]}{(\nu_n-\nu_{n-1})!} <$$
$$< L_{n,s}[1,z] < \frac{L_{n-1,s}[1,z]}{(\nu_n-\nu_{n-1})!}. \tag{16}$$

Полагая в неравенстве (16) $s=0$ и $z=0$, получаем

$$\left[1-\frac{(\nu_{n-1}-\nu_{n-2})!\,(\nu_n-\nu_{n-1})!}{(\nu_n-\nu_{n-2}-1)!}\right]\cdot\frac{\alpha_{n-1,0}}{(\nu_n-\nu_{n-1})!} < \alpha_{n,0} < \frac{\alpha_{n-1,0}}{(\nu_n-\nu_{n-1})!}. \tag{16'}$$

Давая n значения $1, 2, 3, \dots, n$ в левой части (16′) и перемножая полученные неравенства, находим

$$\alpha_{n,0} > \frac{\alpha_{n_0,0}}{(\nu_n-\nu_{n-1})!\,(\nu_{n-1}-\nu_{n-2})!\dots\nu_0!}\prod_{n=n_0}^{\infty}\left[1-\frac{(\nu_n-\nu_{n-2}-1)!\,(\nu_n-\nu_{n-1})!}{(\nu_n-\nu_{n-2}-1)!}\right].$$

Отсюда видно, что если ряд

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(\nu_{n-1}-\nu_{n-2}-1)!\,(\nu_n-\nu_{n-1})!}{(\nu_n-\nu_{n-2}-1)!} < \infty$$

сходится, то существует конечное число α такое, что

$$\alpha_{n,0} > \frac{\alpha}{(\nu_n - \nu_{n-1})! \ldots (\nu_1 - \nu_0)!\, \nu_0!} .$$

Наконец, применяя аналогичные рассуждения к правой части неравенства (16′), получаем

$$\alpha_{n,s} < \frac{\alpha}{(\nu_n - \nu_{n-1})! \ldots (\nu_{s+1} - \nu_s)!} .$$

2. ТЕОРЕМА I. *Если*

$$\sum_1^\infty \frac{(\nu_{n-1} - \nu_{n-2} - 1)!\, (\nu_n - \nu_{n-1})!}{(\nu_n - \nu_{n-2} - 1)!} < \infty, \tag{17}$$

то существует аналитическая функция $f(z)$, *удовлетворяющая условиям:*

a) $f^{(\nu_s)}(1) = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \ldots), \quad f^{(k)}(0) = 0 \quad (k \neq \nu_s)$,

b) $f(z) = \sum\limits_0^\infty a_s z^{\nu_s}, \quad |a_s| < \alpha \cdot \dfrac{(\nu_s - \nu_{s-1})!\, (\nu_{s-1} - \nu_{s-2})! \ldots \nu_0!}{\nu_s!}$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$P_n(z) = \int_0^z \ldots \int_0^{z_{\nu_0 - 1}} L_{n,0}[1, z_{\nu_0}]\, dz_1 dz_2 \ldots dz_{\nu_0}. \tag{18}$$

Из равенства (11) нетрудно заметить, что

$$L_{n,s+k}[1, z] = (-1)^k \frac{d^{\nu_{s+k} - \nu_s}}{dz^{\nu_{s+k} - \nu_s}} L_{n,s}[1, z]$$

и, следовательно,

$$(-1)^k \frac{d^{\nu_k}}{dz^{\nu_k}} P_n(z) = L_{n,s}[1, z].$$

Пользуясь этой формулой, многочлен $P_n(z)$ легко представить в следующем виде:

$$P_n(z) = \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{\alpha_{n,s}}{\nu_s!} z^{\nu_s}.$$

Отсюда находим

$$Q_n(z) = \frac{P_n(z)}{\alpha_{n,0}} = \sum_{s=0}^n \beta_s z^{\nu_s}, \tag{19}$$

где

$$\beta_s = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,0} \cdot \nu_s!} < \alpha \cdot \frac{(\nu_s - \nu_{s-1})! \ldots (\nu_1 - \nu_0)!\, \nu_0!}{\nu_s!}, \quad \beta_0 = \frac{1}{\nu_0!} .$$

Наконец, равенство (19) можно представить в виде

$$|Q_n(z)| < \alpha \sum_0^\infty \frac{(\nu_s - \nu_{s-1})! \ldots (\nu_1 - \nu_0)!\, \nu_0!}{\nu_s!} |z|^{\nu_s} = \alpha \sum_0^\infty \sigma_s^{-\nu_s} \cdot z^{\nu_s}.$$

Отсюда следует, что из последовательности полиномов $Q_n(z)$, в силу равномерной ограниченности $Q_n(z)$ в области, где сходится равномерно ряд $\sum_0^\infty \sigma_s^{-\nu_s} \cdot z^{\nu_s}$, можно извлечь подпоследовательность $Q_{n_i}(z)$ такую, что

$$\lim Q_{n_i}(z) = f(z) = \sum a_s z^{\nu_s}, \quad |a_s| \leqslant \sigma_s^{-\nu_s}.$$

Если же $\lim \sigma_s = 1$, то нетрудно заметить, что при условии (17) $\sum \sigma_s^{-\nu_s} < \infty$; другими словами, $f(z)$ непрерывна на окружности $|z| = 1$.

Действительно, из условия (17) очевидно, что

$$(\nu_{n-1} - \nu_{n-2})(\nu_n - \nu_{n-1}) \to \infty.$$

Отсюда следует, что при $n > n_0$, либо $\nu_{n-1} - \nu_{n-2} \geqslant 2$, либо $\nu_n - \nu_{n-1} \geqslant 2$. Но, так так

$$\sigma_s^{-\nu_s} < \frac{(\nu_s - \nu_{s-1})!\, \nu_{s-1}!}{\nu_s} < \frac{1}{(\nu_s - 1)^2},$$

если $\nu_s - \nu_{s-1} \geqslant 2$ и

$$\sigma_s^{-\nu_s} < \sigma_{s-1}^{-\nu_{s-1}} < \frac{1}{(\nu_{s-1} - 1)^2},$$

если $\nu_{s-1} - \nu_{s-2} \geqslant 2$, то, очевидно, $\nu_s > s$ и, значит,

$$\sigma_s^{-\nu_s} < \frac{1}{(s-2)^2},$$

что и обеспечивает нужную пам сходимость ряда $\sum \sigma_s^{-\nu_s}$. **Этим** теорема доказана.

Пусть теперь

$$\lim_{s\to\infty} \left[\frac{\nu_s!}{(\nu_s - \nu_{s-1})! \ldots (\nu_1 - \nu_0)!\, \nu_0!} \right]^{\frac{1}{\nu_s}} = \sigma \ (< \infty);$$

тогда ясно, что $f(z)$ регулярна внутри круга $|z| < \sigma$ и при $\sigma = 1$ непрерывна на окружности $|z| = 1$.

Примечание. Допустим, что существует некоторое положительное число m такое, что ряд

$$\sum \frac{1}{(\nu_n - \nu_{n-1})^m}$$

сходится. Покажем, что из сходимости этого ряда следует сходимость ряда

$$\sum_1^\infty \frac{(\nu_{n-1} - \nu_{n-2} - 1)!\, (\nu_n - \nu_{n-1})!}{(\nu_n - \nu_{n-2} - 1)!}.$$

Для этой цели заметим, что если $k \geqslant m$ и $n - k \geqslant m$, то

$$\frac{k!\,(n-k)!}{n!} < \frac{m!\,(n-m)!}{n!}. \tag{20}$$

Далее, из сходимости ряда $\sum \frac{1}{(\nu_s-\nu_{s-1})^m}$ следует, что существует целое положительное число s_0 такое, что при $s \geqslant s_0$

$$\nu_s - \nu_{s-1} \geqslant m+1$$

и, значит,

$$\nu_s - \nu_{s-2} - 1 \geqslant m.$$

В этом случае, вследствие неравенства (20), имеем

$$\frac{(\nu_s-\nu_{s-1})!(\nu_{s-1}-\nu_{s-2}-1)!}{(\nu_s-\nu_{s-2}-1)!} < \frac{m!}{(\nu_s-\nu_{s-1})^m},$$

что и требовалось доказать.

3. Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z| \leqslant R$, $R>1$, и удовлетворяющая условиям

$$f^{(\nu_n)}(1)=0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots), \quad f^{(k)}(0)=0 \quad (k \neq \nu_n), \tag{21}$$

может быть представлена в виде интеграла

$$f(z)=(-1)^{n+1}\int\limits_0^z \cdots \int\limits_0^{z_{\nu_0-1}} L_{n-1,0}\left[\int\limits_{z_{\nu_{n-1}}}^1 f^{(\nu_{n-1}+1)}(z)\,dz; z\right] dz_1 \ldots dz_{\nu_0}.$$

Отсюда, вследствие лемм IV и V, находим

$$|f(z)| < \max_{0 \leqslant z \leqslant 1} |f^{(\nu_{n-1}+1)}(z)| \cdot L_{n-1,0}[1, 0] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{0\leqslant z\leqslant 1} |f^{(\nu_{n-1}+1)}(z)|}{(\nu_{n-1}-\nu_{n-2})!\ldots(\nu_1-\nu_0)!\,\nu_0!} = \frac{c_{n-1}^{\nu_{n-1}}}{\nu_{n-1}!}\max_{0\leqslant z\leqslant 1} |f^{(\nu_{n-1}+1)}(z)|. \tag{22}$$

Очевидно, в силу условий (21), разложение Тейлора для функции $f(z)$, регулярной внутри круга $|z| \leqslant R$, имеет следующий вид:

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n z^{\nu_n}. \tag{23}$$

Заметим, что из равенства (23) легко получается неравенство

$$\max_{0\leqslant z\leqslant 1} |f^{(\nu_{n-1}+1)}(z)| = \sum_{k=n}^\infty |a_k| \frac{\nu_k!\,(\nu_k-\nu_{n-1})}{(\nu_k-\nu_{n-1})!} =$$

$$= \nu_{n-1}! \sum_{k=n}^\infty (\nu_k-\nu_{n-1}) \cdot \frac{\nu_k!\,|a_k|}{\nu_{n-1}!\,(\nu_k-\nu_{n-1})!},$$

откуда вытекают следующие неравенства:

$$|f^{(\nu_{n-1}+1)}(z)| < \nu_{n-1}! \sum_{k=n}^\infty (\nu_k-\nu_{n-1})\,\tau_n^{\nu_k-\nu_{n-1}}\,|a_k|, \tag{24}$$

$$|f^{(\nu_{s-1}+1)}(z)| < \frac{\nu_{n-1}!}{\sigma_{n-1}^{\nu_{n-1}}} \sum_{k=n}^\infty (\nu_k-\nu_{n-1}) \frac{(\nu_k-\nu_{k-1})!\ldots(\nu_n-\nu_{n-1})!}{(\nu_k-\nu_{n-1})!}\,\sigma_k^{\nu_k}\,|a_k| <$$

$$< \frac{\nu_{n-1}}{\sigma_{n-1}^{\nu_{n-1}}} \sum_{k=n}^\infty (\nu_k-\nu_{n-1}) \frac{\sigma_k^{\nu_k}\,|a_k|}{(k-n+1)!}, \tag{25}$$

так как при любых $k_1, k_2, \ldots, k_s \geqslant 1$

$$\frac{k_1!\,k_2!\ldots k_s!}{(k_1+k_2+\ldots+k_s)!} < \frac{1}{s!}.$$

Очевидно, в силу (24) и (25), из неравенства (22) следуют неравенства:

$$|f(z)| < \sigma_{n-1}^{\nu_{n-1}} \sum_{k=n}^{\infty} (\nu_k - \nu_{n-1})\, \tau_n^{\nu_k - \nu_{n-1}} |a_k|, \tag{26}$$

$$|f(z)| < \sum_{k=n}^{\infty} (\nu_k - \nu_{n-1}) \frac{\sigma_k^{\nu_k} |a_k|}{(k-n+1)!}. \tag{27}$$

ТЕОРЕМА II. *Если*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sigma_n = \lim \left[\frac{\nu_n!}{(\nu_n - \nu_{n-1})! \ldots (\nu_1 - \nu_0)!\, \nu_0!} \right]^{\frac{1}{\nu_n}} = \sigma < \infty \tag{28}$$

и функция $f(z)$, *регулярная внутри круга* $|z| \leqslant R$, *где* $R > \sigma$, *удовлетворяет условиям:*

$$f^{(\nu_n)}(1) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad f^{(k)}(0) = 0 \quad (k \neq \nu_n),$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Выберем числа R_1 и σ_1 так, чтобы $R > R_1 > \sigma_1 > \sigma$. Если справедливо (28), то вследствие леммы III, возможно одно из двух:

1°. $\sigma_n > \sigma_{n-1}$. В таком случае $\{\sigma_n\}$ есть монотонно возрастающая последовательность, сходящаяся к конечному пределу σ, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma, \quad \sigma_k \leqslant \sigma_1, \quad \sigma_1 > \sigma \quad (k \geqslant k_1). \tag{29}$$

Из сходимости ряда (23) внутри круга $|z| \leqslant R$ следует, что

$$|a_k| \leqslant R_1^{-\nu_k} \quad (k \geqslant k_0). \tag{30}$$

Таким образом, в силу (29) и (30), неравенство (27) принимает вид

$$|f(z)| < \sum_{k=n}^{\infty} (\nu_k - \nu_{n-1}) \cdot \frac{\sigma_1^{\nu_k}}{(k-n+1)!} R_1^{-\nu_k} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\nu_k - \nu_{n-1}}{(k-n+1)!} \left(\frac{\sigma_1}{R_1}\right)^{\nu_k} < \varepsilon_1, \tag{31}$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — сколь угодно малое число.

2° $\{\sigma_n\}$ — немонотонная последовательность. Тогда, по лемме III, существует последовательность $\{n_i\}$ такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} \sigma_{n_i} = \sigma$. В этом случае, вследствие (9),

$$\tau_{n_i} \leqslant \sigma_{n_i} \leqslant \sigma_1 \quad (n_i > n_{i_0}). \tag{32}$$

Таким образом, в силу (30) и (32), неравенство (26) принимает вид

$$|f(z)| < \sum_{k=n}^{\infty} (\nu_k - \nu_{n-1}) \left(\frac{\sigma_1}{R_1}\right)^{\nu_k} < \varepsilon_2, \tag{33}$$

где $\varepsilon_2 > 0$ — сколь угодно малое число.

Из неравенств (31) и (33) следует, что $f(z)\equiv 0$.

Примечание I. Сопоставляя теоремы I и II, мы видим, что при $R\leqslant\sigma$, вообще говоря, существует функция $f(z)$, регулярная внутри круга $|z|\leqslant R$ и удовлетворяющая условиям теоремы II.

Примечание II. Если существует нижний предел $\varliminf \frac{\sum\limits_{0}^{n}\nu_k}{\nu_n}$, то заведомо существует нижний предел $\varliminf \sigma_n<\infty$.

Действительно, на основании леммы 1, имеет место неравенство

$$\ln\frac{\nu_s!}{(\nu_s-\nu_{s-1})!\,(\nu_{s-1}-\nu_{s-2})!\,\ldots\,(\nu_1-\nu_0)!\,\nu_0!}<$$

$$<\sum_{k=1}^{s}\left[\nu_k\ln\nu_k-(\nu_k-\nu_{k-1})\ln(\nu_k-\nu_{k-1})-\nu_{k-1}\ln\nu_{k-1}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{s}\nu_k\left[\frac{\nu_{k-1}}{\nu_k}\ln\frac{\nu_k}{\nu_{k-1}}+\left(1-\frac{\nu_{k-1}}{\nu_k}\right)\ln\frac{1}{1-\frac{\nu_{k-1}}{\nu_k}}\right].$$

Но функция

$$\varphi(t)=t\ln\frac{1}{t}+(1-t)\ln\frac{1}{1-t}$$

при $0\leqslant t\leqslant 1$ удовлетворяет неравенству $\varphi(t)\leqslant\ln 2$, откуда следует, что

$$\ln\sigma_n<\ln 2\cdot\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\nu_k}{\nu_n}.$$

4. ТЕОРЕМА III. *Если*

$$\lim\sigma_s=\infty\quad\textit{и}\quad\lambda_s=\min_{k\geqslant s}\sigma_k, \tag{34}$$

то целая функция

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{\nu_k}, \tag{35}$$

где

$$|a_k|<\frac{\delta_k}{\nu_k\lambda_k^{\nu_k}}\quad\textit{и}\quad\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k<\infty, \tag{36}$$

удовлетворяющая условиям

$$f^{(\nu_s)}(1)=0\quad(s=0,1,2,\ldots)\quad\textit{и}\quad f^{(n)}(0)=0\quad(n\neq\nu_s),$$

*тождественно равна нулю**.

Доказательство. Из того, что $\lambda_s=\min\limits_{k\geqslant s}\sigma_k$ следует существование последовательности $\{s_i\}$ такой, что

$$\lambda_s<\sigma_s\quad\text{при}\quad s\neq s_i\quad\text{и}\quad\lambda_{s_i}=\sigma_{s_i}.$$

* Подобную задачу рассматривал Zia-Uddin (1) [см. еще J. M. Whittaker (2)].

Допустим, что для $\{s_i\}$ имеет место неравенство $\tau_{s_i} > \lambda_{s_i}$ при $i > i_0$. Тогда, в силу (9),

$$\sigma_{s_i}^{\nu_{s_i}} = \lambda_{s_i}^{\nu_{s_i}} > \lambda_{s_i}^{\nu_{s_i} - \nu_{s_i-1}} \sigma_{s_i-1}^{\nu_{s_i-1}},$$

откуда следует, что $\lambda_{s_i} > \sigma_{s_i-1}$. Поэтому

$$\sigma_{s_i-1} = \lambda_{s_i-1} \quad \text{и} \quad \lambda_{s_{i-1}} = \lambda_{s_i-1},$$

т. е. $1 + s_{i-1} = s_i \quad (i > i_0)$; это значит, что $s_i = i + s_{0i}$ при $i > i_0$

Таким образом, возможно одно из двух: или

$$\sigma_s > \sigma_{s-1} \quad \text{и} \quad \lambda_s = \sigma_s \quad (s > s_0), \tag{37}$$

или существует подпоследовательность $\{k_i\}$ такая, что

$$\sigma_{k_i} = \lambda_{k_i} \quad \text{и} \quad \tau_{k_i} \leqslant \lambda_{k_i}. \tag{38}$$

1°. Пусть числа σ_n удовлетворяют (37); тогда из неравенства (27) находим

$$|f(z)| < \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\nu_n - \nu_{s-1}}{\nu_n} \cdot \frac{\lambda_n^{\nu_n}}{\lambda_n^{\nu_n}} \cdot \frac{\delta_n}{(n-s+1)!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_{n+s}}{(n+1)!} < \varepsilon_1, \tag{39}$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — сколь угодно малое число.

2°. Пусть числа σ_n удовлетворяют (38); тогда, полагая $s = k_i$, из неравенства (26) получим

$$|f(z)| < \lambda_{k_i}^{\nu_{k_i}} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\nu_n - \nu_{k_i-1}}{\nu_n} \tau_{k_i}^{\nu_n - \nu_{k_i}} \frac{\delta_n}{\lambda_{k_i}^{\nu_n}} < \sum_{n=s}^{\infty} \delta_n < \varepsilon_2, \tag{40}$$

причем, в силу сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$, $\varepsilon_2 > 0$ есть сколь угодно малое число.

Таким образом, из неравенств (39) и (40) следует, что $f(z) \equiv 0$.

П р и м е ч а н и е. Из теоремы 1 следует, что при известных ограничениях на ν_n существует функция $f(z)$, для которой

$$|a_k| \leqslant \frac{c}{\lambda_k^{\nu_k}},$$

причем равенство достигается для бесчисленного множества значений k.

5. Предположим теперь, что

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^{\nu_n}$$

есть целая функция конечного порядка ρ'. Как известно, число ρ' посредством коэффициентов a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ определяется формулой

$$\frac{1}{\rho'} = \varliminf \frac{\ln \left|\frac{1}{a_n}\right|}{\nu_n \ln \nu_n}. \tag{41}$$

Для такой целой функции $f(z)$ справедлива

ТЕОРЕМА IV. *Если*

$$\lim \frac{\ln \sigma_n}{\ln \nu_n} = \frac{1}{\rho} \quad (1 < \rho < \infty), \tag{42}$$

и целая функция $f(z)$ *порядка меньше* ρ *удовлетворяет условиям:*

$$f^{(\nu_s)}(1) = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \ldots), \quad f^{(n)}(0) = 0 \quad (n \neq \nu_s),$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Выберем числа ρ_1' и ρ_1 так, чтобы $\rho' < \rho_1' < < \rho_1 < \rho$.

Если справедливо (49), то, вследствие леммы III, возможно одно из двух:

1°. $\frac{\ln \sigma_n}{\ln \nu_n} > \frac{\ln \sigma_{n-1}}{\ln \nu_{n-1}}$. В таком случае из (42) имеем

$$\sigma_n < \nu_n^{\frac{1}{\rho_1}} \quad (n > n_0),$$

а вследствие (41),

$$|a_k| < \nu_k^{-\frac{\nu_k}{\rho_1'}} \quad (k > k_0).$$

Неравенство (27) принимает вид

$$|f(z)| < \sum_{k=n}^{\infty} (\nu_k - \nu_{n-1}) \sigma_k^{\nu_k} \frac{|a_k|}{(k-n+1)!} <$$

$$< \sum_{k=n}^{\infty} (\nu_k - \nu_{n-1}) \nu^{-\left(\frac{1}{\rho_1'} - \frac{1}{\rho_1}\right)\nu_k} < \varepsilon_1, \tag{43}$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — сколь угодно малое число.

2°. $\left\{\frac{\ln \sigma_n}{\ln \nu_n}\right\}$ — немонотонная последовательность. Тогда, по лемме III, существует последовательность $\{n_i\}$ такая, что

$$\lim_{n_i = \infty} \frac{\ln \sigma_{n_i}}{\ln \nu_{n_i}} = \frac{1}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{\ln \sigma_{n_i}}{\ln \nu_{n_i}} \leqslant \frac{\ln \sigma_{n_i - 1}}{\ln \nu_{n_i - 1}}. \tag{44}$$

Далее, из формулы (9) следует, что

$$\frac{\ln \sigma_n}{\ln \nu_n} = \left(1 - \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n}\right) \frac{\ln \tau_n}{\ln \nu_n} + \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n} \frac{\ln \nu_{n-1}}{\ln \nu_n} \cdot \frac{\ln \sigma_{n-1}}{\ln \nu_{n-1}}, \tag{45}$$

откуда, в силу (44),

$$\frac{\ln \sigma_{n_i}}{\ln \nu_{n_i}} \geqslant \frac{1 - \frac{\nu_{n_i - 1}}{\nu_{n_i}}}{1 - \frac{\nu_{n_i - 1}}{\nu_{n_i}} \cdot \frac{\ln \nu_{n_i - 1}}{\ln \nu_{n_i}}} \cdot \frac{\ln \tau_{n_i}}{\ln \nu_{n_i}} = \frac{1 - \frac{\nu_{n_i - 1}}{\nu_{n_i}}}{1 - \frac{\nu_{n_i - 1}}{\nu_{n_i}} - \frac{\frac{\nu_{n_i - 1}}{\nu_{n_i}} \ln \frac{\nu_{n_i - 1}}{\nu_{n_i}}}{\ln \nu_{n_i}}} \cdot \frac{\ln \tau_{n_i}}{\ln \nu_{n_i}}. \tag{45'}$$

Заметим, что произведение $\frac{\nu_{n_i - 1}}{\nu_{n_i}} \ln \frac{\nu_{n_i - 1}}{\nu_{n_i}}$ стремится к нулю, если $\frac{\nu_{n_i - 1}}{\nu_{n_i}}$ стремится к единице или к нулю. В случае, когда $\frac{\nu_{n_i - 1}}{\nu_{n_i}}$ стремится

к конечному пределу, дробь

$$\frac{\frac{\nu_{n_i-1}}{\nu_{n_i}} \ln \frac{\nu_{n_i-1}}{\nu_{n_i}}}{\ln \nu_{n_i}} = \frac{\nu_{n_i-1}}{\nu_{n_i}} \cdot \frac{\ln \left[1 - \left(1 - \frac{\nu_{n_i-1}}{\nu_{n_i}}\right)\right]}{\ln \nu_{n_i}}$$

стремится к нулю. Таким образом, из неравенства (45′) следует, что

$$\lim \frac{\ln \tau_{n_i}}{\ln \nu_{n_i}} \leqslant \lim \frac{\ln \sigma_{n_i}}{\ln \nu_{n_i}} \leqslant \frac{1}{\rho_1} \quad \text{или} \quad \tau_{n_i} < \nu_{n_i}^{\frac{1}{\rho_1}},$$

и неравенство (26) принимает вид:

$$|f(z)| < \nu_{n_i}^{\frac{\nu_{n_i}}{\rho}} \sum_{n=n_i}^{\infty} (\nu_n - \nu_{n_i-1}) \, \nu_n^{\frac{\nu_n - \nu_{n_i}}{\rho_1}} \cdot \nu_n^{-\frac{\nu_n}{\rho_1'}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=n_i}^{\infty} (\nu_n - \nu_{n_i-1}) \cdot \nu_n^{-\left(\frac{1}{\rho_1'} - \frac{1}{\rho_1}\right)\nu_n} < \varepsilon_2, \tag{46}$$

где $\varepsilon_2 > 0$ — сколь угодно малое число.

Из неравенства (43) и (46) следует, что $f(z) \equiv 0$.

Примечание. Из теоремы I следует, что при известных ограничениях на ν_n существует целая функция порядка ρ, удовлетворяющая условиям теоремы IV.

6. Допустим, что числа ν_s образуют арифметическую прогрессию $\nu_s = ps - 1$ и $f(z)$ — целая функция порядка 1 типа I, удовлетворяющая условиям:

$$f^{(ps-1)}(a) = 0 \quad (s = 1, 2, 3, \ldots), \quad f^{(n)}(0) = 0 \quad (n \neq ps - 1),$$

где a — произвольное действительное положительное число. В этом случае $f(z)$ представляется интегралом

$$f(x) = \int_0^x \int_0^c \ldots \int_{x_{\nu_1}}^a \int_0^{x_{\nu_1+1}} \ldots \int_0^{x_{\nu_s-1}} f^{(\nu_s)}(x_{\nu_s}) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{\nu_s}.$$

Отсюда следует, что для всех значений x, находящихся на отрезке $[0, a]$,

$$|f(x)| \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant a} |f^{(\nu_s)}(x)| \cdot \max_{0 \leqslant x \leqslant a} |I_s|, \tag{47}$$

где

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant a} |I_s| = \max_{0 \leqslant x \leqslant a} \left| \int_0^x \ldots \int_{x_{\nu_s-1}}^a \frac{x_{\nu_{s-1}}^{\nu_s - \nu_{s-1} - 1} + 1}{(\nu_s - \nu_{s-1} - 1)!} \, dx_1 dx_2 \ldots dx_{\nu_{s-1}+1} \right|.$$

Заметим, что для $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant a} |I_s|$ справедливо неравенство

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant a} |I_s| < \frac{a^{\nu_s - \nu_{s-1}}}{(\nu_s - \nu_{s-1})!} \cdot \max_{0 \leqslant x \leqslant a} \left| \int_0^x \ldots \int_0^{x_{\nu_{s-1}-1}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{\nu_{s-1}} \right| <$$

$$< \frac{a^{\sum\limits_{j=s}^{j=2}(\nu_j-\nu_{j-1})}}{(\nu_s-\nu_{s-1})!\,(\nu_{s-1}-\nu_{s-2})!\ldots(\nu_2-\nu_1)!}\cdot\max_{0\leqslant x\leqslant a}\left|\int\limits_0^x\ldots\int\limits_0^{x_{\nu_1-1}}dx_1\,dx_2\ldots dx_{\nu_1}\right| =$$

$$= \frac{a^{\nu_s}}{(\nu_s-\nu_{s-1})!\ldots(\nu_2-\nu_1)!\,\nu_1!}.$$

Таким образом, неравенство (47) принимает вид

$$|f(x)| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant a}|f^{(\nu_s)}(x)|\cdot\frac{a^{\nu_s}}{(\nu_s-\nu_{s-1})\quad(\nu_{s-1}-\nu_{s-2})!\ldots(\nu_2-\nu_1)!\,\nu_1!}. \tag{48}$$

В силу формулы Стирлинга

$$\lg t! = t\lg t - t + o(t),$$

очевидно, что

$$\ln\prod_{k=s}^{k=1}(\nu_k-\nu_{k-1})! = \sum_{s=k}^{s=1}(\nu_k-\nu_{k-1})\ln(\nu_k-\nu_{k-1}) - \sum_{k=s}^{k=1}(\nu_k-\nu_{k-1}) + o(k) =$$

$$= \sum_{k=s}^{k=1} p\ln p - (pk-1) + o(s) = sp\ln p - (ps-1) + o(s) =$$

$$= kp\,[(\ln p - 1) + o(s)],$$

откуда

$$\prod_{k=s}^{k=1}(\nu_k-\nu_{k-1})! \geqslant e^{sp\ln\frac{p}{e}} = \left(\frac{p}{e}\right)^{sp}. \tag{49}$$

Далее, вследствие того что $f(z)$ есть целая аналитическая функция порядка 1 типа I,

$$\max_{0\leqslant x\leqslant a}|f^{(ps-1)}(x)| \leqslant (1+\varepsilon)^{ps}, \tag{50}$$

где ε — достаточно малое положительное число.

Таким образом, в силу (49) и (50), неравенство (48) представится в следующем виде:

$$|f(x)| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant a}|f^{(ps-1)}(x)|\cdot\left(\frac{ae}{p}\right)^{sp} \leqslant \left[\frac{a(1+\varepsilon)e}{p}\right]^{ps}.$$

Отсюда видно, что при достаточно большом s $|f(x)|$ будет сколь угодно малым для всех x, лежащих на отрезке $(0, a)$, если только $a \leqslant \frac{p}{e}$.

Итак, мы пришли к следующему заключению:

ТЕОРЕМА V. *Целая функция $f(z)$ порядка 1 типа I, удовлетворяющая условиям*

$$f^{(ps-1)}(a) = 0 \quad (s = 1, 2, 3, \ldots), \qquad f^{(n)}(0) = 0 \quad (n \neq ps-1),$$

тождественно равна нулю, если только $a < \frac{p}{e}$.

7. Заметим, что условие $a < \frac{p}{e}$ нельзя заменить условием $a \leqslant \alpha\cdot\frac{p}{e}$, $\alpha < 1$, при достаточно больших p.

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ корни из единицы степени p, где p — целое положительное число, и рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \omega_k e^{\omega_k z}. \tag{51}$$

Очевидно, $f(z)$ является целой функцией порядка 1 типа I, и кроме этого, удовлетворяет условиям:

$$f^{(s)}(0) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \omega_k^{s+1} = \begin{cases} 0 \text{ при } s+1 \neq pk, \\ 1 \text{ при } s+1 = pk. \end{cases}$$

Дифференцируя равенство (51) $pk-1$ раз, находим

$$f^{(pk-1)}(z) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \omega_k^{qp} e^{\omega_k z} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} e^{\omega_k z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{(pn)!},$$

откуда при помощи подстановки $z = \sqrt[p]{p!}\, u$ получаем

$$f^{(pk-1)}(\sqrt[p]{p!}\, u) = 1 + u^p \left[1 + \frac{(p!)^2}{(2p)!} u^p + \frac{(p!)^3}{(3p)!} u^{2p} + \ldots \right].$$

Введем обозначения:

$$v = u^p, \quad \varphi(v) = \frac{(p!)^2}{(2p)!} v + \frac{(p!)^3}{(3p)!} v^2 + \ldots$$

Заметим, что при достаточно большом p

$$\varphi(v) = \frac{v}{2^{2p}} + \frac{v^2}{3^{3p}} + \ldots$$

есть достаточно малое число для всех конечных значений v. Следовательно, самый близкий к началу координат корень уравнения

$$1 + v(1 + \varphi(v)) = 0$$

асимптотически равен -1. Тогда

$$u \approx e^{\frac{2k\pi i}{p} + \frac{\pi i}{p}}$$

будет самым близким к началу координат корнем производной $f^{(pk-1)}\left(\sqrt[p]{p!\, u}\right)$ и поэтому

$$z \approx \frac{p}{e} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{p} + \frac{\pi i}{p}}, \quad |z| \approx \frac{p}{e}$$

является самым близким к началу координат корнем производной $f^{(pk-1)}(z)$ от нашей функции $f(z)$.

Таким образом, функция $f(z)$, представленная формулой (51), удовлетворяет условиям:

$$f^{(n)}(a) = 0 \text{ при } n = pk-1,$$

$$f^{(n)}(0) = 9 \text{ при } n \neq pk-1$$

и

$$\lim \frac{ae}{p} = 1.$$

Поступило
20.1.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Zia-Uddin, Note on an «Alternant» with Factorial Elements, Proc. Edinburgh. Math. Soc. 3 (1933), 296—299.

[2] Whittaker J. M., Interpolatory Function Theory, Cambridge, 1935.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

11 (1947), 561–566

А. Н. КОЛМОГОРОВ, А. А. ПЕТРОВ и Ю. М. СМИРНОВ

ОДНА ФОРМУЛА ГАУССА ИЗ ТЕОРИИ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Статья содержит уточнение некоторых оценок из гауссовской теории метода наименьших квадратов.

В § 39 гауссовской Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae вычисляется средняя квадратическая ошибка, совершаемая при замене $\mu\mu$ на

$$\frac{M}{\pi-\rho}=\frac{\lambda\lambda+\lambda\lambda'+\lambda''\lambda''+\ldots}{\pi-\rho}.$$

Гаусс устанавливает, что эта средняя квадратическая ошибка равна

$$\sqrt{\frac{\nu^4-\mu^4}{\pi-\rho}-\frac{\nu^4-3\mu^4}{(\pi-\rho)^2}\left[\rho-\sum\left((a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)^2\right)\right]}. \tag{1}$$

В § 40 Гаусс извлекает из формулы (1) более простые оценки интересующей его средней квадратической ошибки. Эти оценки он основывает на неравенствах

$$\frac{\rho\rho}{\pi}\leqslant\sum\left((a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)^2\right)<\pi. \tag{2}$$

По какому-то недосмотру Гаусс не заметил, что верхняя из оценок (2) может быть заметно усилена и неравенства (2) могут быть заменены неравенствами

$$\frac{\rho\rho}{\pi}\leqslant\sum\left((a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)^2\right)\leqslant\rho. \tag{3}$$

Из-за этого недосмотра выводы § 40 оказались неожиданно слабыми: нижняя оценка, предлагаемая Гауссом для исследуемой им средней квадратической ошибки, оказывается в некоторых случаях даже отрицательной.

Нашей задачей является доказательство неравенств (3) и установление того обстоятельства, что они не могут быть усилены.

§ 1. Постановка задачи

Мы начнем с краткого изложения задачи в современных обозначениях, примыкающих к статье А. Н. Колмогорова [1].

Пусть величины y_r, a_i и x_{ir}, где $r=1, 2, \ldots, N$; $i=1, 2, \ldots, n$; $n<N$, удовлетворяют N уравнениям

$$y_r = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ir}. \tag{4}$$

Величины x_{ir} предполагаются известными точно, вместо же величин y_r предполагаются заданными величины

$$\eta_r = y_r + \Delta_r, \tag{5}$$

где Δ_r—взаимно независимые случайные величины, для которых

$$M(\Delta_r)=0, \quad M(\Delta_r^2)=s^2, \quad M(\Delta_r^4)=f^4 \tag{6}$$

(M есть знак математического ожидания). Матрица $\|x_{ir}\|$ предполагается имеющей ранг n.

В указанных предположениях метод наименьших квадратов рекомендует принимать в качестве приближенных значений неизвестных величин a_i значения α_i, определяемые из условия

$$\sum_{r=1}^{N} \left(\eta_r - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{ir}\right)^2 = \min. \tag{7}$$

Решение поставленной таким образом задачи, как известно, однозначно и имеет вид

$$\alpha_i = \sum_{r=1}^{N} u_{ir} \eta_r. \tag{8}$$

Коэффициенты u_{ir} в формулах (8) имеют следующий геометрический смысл: в N-мерном пространстве векторы

$$u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{iN}), \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

образуют биортогональную систему к векторам

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iN}), \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Это значит, что векторы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ однозначно определяются следующими условиями: они лежат в линейном n-мерном подпространстве L, определяемом векторами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и удовлетворяют условиям биортогональности:

$$\sum_{r=1}^{N} x_{ir} u_{jr} = e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i=j, \\ 0, & \text{при } i\neq j. \end{cases} \tag{9}$$

Полагая

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-n}\sum_{r=1}^{N} \varepsilon_r^2, \tag{10}$$

где

$$\varepsilon_r = \eta_r - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{ir}, \tag{11}$$

имеем

$$M(\sigma^2) = s^2. \tag{12}$$

Задача Гаусса, указанная в начале нашей статьи, заключается в определении

$$D^2(\sigma^2) = M(\sigma^2 - s^2)^2. \tag{13}$$

Гауссова формула (1) в наших обозначениях записывается так:

$$D^2(\sigma^2) = \frac{f^4 - s^4}{N-n} - \frac{f^4 - 3s^4}{(N-n)^2}(n - \Omega), \tag{14}$$

где

$$\Omega = \sum_{r=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ir} u_{ir}\right)^2. \tag{15}$$

§ 2. Оценка Ω

Выражение (15) имеет простой геометрический смысл. Именно, если обозначить через

$$e^* = (e^*, e^*_{r_2}, \ldots, e^*_{rN})$$

проекцию единичного координатного вектора e_r в пространство L, то

$$\Omega = \sum_{r=1}^{N} |e_r^*|^4 = \sum_{r=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{N}(e^*_{rk})^2\right]^2. \tag{16}$$

В самом деле, проекция z^* любого вектора z в пространство L может быть записана в виде

$$z^* = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

Вычисляя скалярное произведение (zu_i), получим, в силу (9),

$$(zu_i) = (z^* u_i) = c_i.$$

Если $z = e_r$, то последняя формула дает $c_i = u_{ir}$. Поэтому

$$e_r^* = \sum_{i=1}^{n} u_{ir} x_i, \tag{17}$$

или в координатной форме

$$e^*_{rk} = \sum_{i=1}^{n} u_{ir} x_{ik}. \tag{18}$$

Вполне аналогично получим

$$e_r^* = \sum_{i=1}^{n} x_{ir} u_i, \tag{19}$$

$$e_{rk}^* = \sum_{i=1}^{n} x_{ir} u_{ik}. \tag{20}$$

Из (18) и (20) вытекает

$$|e_r^*|^2 = \sum_{k=1}^{N} (e_{rk}^*)^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (u_{ir} x_{ik} x_{jr} u_{jk}) = \sum_{i=1}^{n} u_{ir} x_{ir}. \tag{21}$$

Равенство (21) в соединении с (15) непосредственно приводит к (16).

Введем теперь в нашем N-мерном пространстве новую ортогональную систему координат, расположив первые n осей в пространстве L, а остальные $N-n$ выбрав ортогональными к этому пространству.

Пусть в новой системе координат векторы e_r представятся в виде

$$e_r = (\Omega_{r1}, \Omega_{r2}, \ldots, \Omega_{rN}).$$

Очевидно, что в этой системе координат

$$e_r^* = (\Omega_{r1}, \Omega_{r2}, \ldots, \Omega_{rn}, 0, 0, \ldots, 0).$$

Поэтому

$$\Omega = \sum_{r=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} \Omega_{rk}^2 \right)^2. \tag{22}$$

Матрица $\| \Omega_{rk} \|$ ортогональна. Легко заметить, что никаких других ограничений на вид этой матрицы общая постановка нашей задачи не накладывает: при надлежаще подобранной матрице $\| x_{ir} \|$ ранга n можно достигнуть того, что матрица $\| \Omega_{rk} \|$ будет произвольной ортогональной матрицей.

Таким образом, проблема оценки возможных значений может быть поставлена так: *какие значения может принимать при $n < N$ выражение* (22) *для ортогональной матрицы N-го порядка?*

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} \Omega_{rk}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{N} \Omega_{rk}^2 = 1,$$

то всегда

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \Omega_{rk}^2 \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \Omega_{rk}^2.$$

Поэтому из (22) вытекает

$$\Omega \leqslant \sum_{r=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \Omega_{rk}^2 = n.$$

В установленном таким образом неравенстве

$$\Omega \leqslant n \tag{23}$$

знак равенства достигается, если матрица $\|\Omega_{rk}\|$ единичная:

$$\Omega_{rk} = e_{rk}.$$

С другой стороны, так как всегда

$$\sum_{r=1}^{N} c_r^2 \geqslant \frac{1}{N} \left(\sum_{r=1}^{N} c_r\right)^2,$$

то из (22) вытекает

$$\Omega \geqslant \frac{1}{N} \left(\sum_{r=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \Omega_{rk}^2\right)^2 = \frac{n^2}{N}.$$

В полученном неравенстве

$$\Omega \geqslant \frac{n^2}{N} \tag{24}$$

знак равенства тоже достижим при любых N и $n < N$, как это было установлено по нашей просьбе А. И. Мальцевым (его заметка по этому поводу печатается на стр. 567—568).

§ 3. Выводы

В § 2 установлено, что

$$\frac{n^2}{N} \leqslant \Omega \leqslant n \tag{25}$$

и обе указанные в (25) границы достигаются. Для оценки $D^2(\sigma^2)$ отсюда получается, в силу (14),

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f^4 - s^4}{N-n} - \frac{n}{N}\left(\frac{f^4 - 3s^4}{N-n}\right) \leqslant D^2(\sigma^2) \leqslant \frac{f^4 - s^4}{N-n}, \text{ если } f^4 - 3s^4 \geqslant 0, \\ &\frac{f^4 - s^4}{N-n} \leqslant D^2(\sigma^2) \leqslant \frac{f^4 - s^4}{N-n} + \frac{n}{N}\left(\frac{3s^4 - f^4}{N-n}\right), \text{ если } f^4 - 3s^4 \leqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

причем указанные в (26) границы достигаются при любых N и $n < N$ в некоторых частных случаях.

Если $f^4 - 3s^4 = 0$, то из (26) получается известная для случая нормального гауссовского распределения ошибок Δ_r формула

$$D^2(\sigma^2) = \frac{2s^4}{N-n}. \tag{27}$$

Если отношение $\frac{n}{N}$ стремится к нулю и $f^4 - s^4 > 0$, то асимптотически

$$D^2(\sigma^2) \sim \frac{f^4 - s^4}{N-n}. \tag{28}$$

В мемуаре Гаусса вместо этого при $\frac{n}{N}$ стремящемся к нулю, указаны для $D^2(\sigma^2)$ лишь асимптотические оценки

$$\frac{2f^4-4s^4}{N-n} \text{ и } \frac{2s^4}{N-n}.$$

Заметим еще, что в вырожденном случае $f^4 = s^4$ (случай $f^4 < s^4$, как хорошо известно, невозможен) из (26) получается

$$D^2(\sigma^2) \leqslant \frac{2ns^4}{N(N-n)}. \tag{29}$$

Поступило
5.V.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., К обоснованию метода наименьших квадратов, Успехи математических наук, т. 1, вып. 11 (1946), 57—70.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
11 (1947), 567–568

А. И. МАЛЬЦЕВ

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ А. Н. КОЛМОГОРОВА, А. А. ПЕТРОВА и Ю. М. СМИРНОВА «ОДНА ФОРМУЛА ГАУССА ИЗ ТЕОРИИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ»

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В указанной работе ищется максимум и минимум величины

$$\Omega = \sum_{r=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} \Omega_{rk}^2 \right)^2,$$

где Ω_{rk} — элементы вещественной ортогональной матрицы степени N $(n < N)$.

Согласно (24), величина Ω окажется минимальной, если все суммы $\sum_{k=1}^{n} \Omega_{rk}^2$ будут равными. В связи с этим авторы указанной работы обратились ко мне с вопросом: *существует ли вещественная ортогональная матрица* Ω^* *степени* N, *у которой сумма квадратов первых* n *элементов в каждом столбце одна и та же* (N, n произвольны, $n < N$)?

Вопрос, очевидно, равносилен следующему: существует ли прямоугольная вещественная матрица A с n строками и N столбцами, строки которой ортогональны, сумма квадратов элементов каждой строки равна 1, а сумма квадратов элементов каждого столбца одна и та же и, следовательно, равна $\frac{n}{N}$? Пример матрицы A строится ниже.

Если матрица Ω^* при некоторых n, N существует, то, располагая ее строки в обратном порядке, мы получим ортогональную матрицу Ω_1^*, у которой сумма квадратов первых $N - n$ элементов каждого столбца будет одна и та же. Поэтому можно считать, что $n \leqslant \frac{1}{2} N$. В случае $n = \frac{1}{2} N$ в качестве A можно взять пару каких-нибудь ортогональных матриц степени n, умноженных на $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и поставленных рядом. Таким образом, можно предполагать, что $n < \frac{1}{2} N$.

Заметим еще, что *для каждого m существует по меньшей мере 2^m взаимно ортогональных строк длины 2^m, все элементы которых равны* ± 1. Действительно, при $m=1$ эти строки будут 1,1 и 1, —1, а если для $m=s-1$ искомые строки найдены и расположены в виде матрицы P, то строки матрицы $\begin{bmatrix} P & P \\ P & -P \end{bmatrix}$ будут искомыми при $m=s$.

Построение матрицы A можно осуществить теперь следующим образом.

Представим N в форме

$$N=2^{m_1}+2^{m_2}+\ldots+2^{m_t} \quad (0\leqslant m_1<m_2<\ldots<m_t).$$

Пусть

$$2^{m_s}<n\leqslant 2^{m_{s+1}}, \quad p=2^{m_{s+1}}+\ldots+2^{m_t}.$$

Разобьем столбцы A на группы из $2^{m_1}, \ldots, 2^{m_s}, p$ столбцов, а строки соответственно на группы из $2^{m_1}, 2^{m_2}-2^{m_1}, \ldots, 2^{m_s}-2^{m_{s-1}}, n-2^{m_s}$ строк. В результате матрица A разобьется на клетки A_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots, s+1)$. Клетки $A_{11}, \ldots, A_{ss}$ и клетки $A_{1,s+1}, \ldots, A_{s+1,s+1}$ заполняем числами ± 1 так, чтобы строки, стоящие друг под другом, были ортогональны. Согласно замечанию, это сделать возможно. Остальные клетки A заполняем нулями. Теперь элементы A_{ii} умножаем на некоторые числа α_i, а элементы $A_{j,s+1}$ — на числа β_j $(i=1, \ldots, s; j=1, \ldots, s+1)$. Очевидно, при любых α_i, β_j строки матрицы A останутся ортогональными и нам надо только добиться, чтобы сумма квадратов элементов в каждом столбце была $\frac{n}{N}$, а в каждой строке 1. Условия относительно столбцов дают

$$\alpha_1^2=\frac{n}{2^{m_1}N}, \quad \alpha_2^2=\frac{n}{(2^{m_2}-2^{m_1})N}, \ldots, \alpha_s^2=\frac{n}{(2^{m_s}-2^{m_{s-1}})N}, \tag{1}$$

$$2^{m_1}\beta_1^2+(2^{m_2}-2^{m_1})\beta_2^2+\ldots+(2^{m_s}-2^{m_{s-1}})\beta_s^2+(n-2^{m_s})\beta_{s+1}^2=\frac{n}{N}. \tag{2}$$

Аналогично, условия относительно строк дают

$$p\beta_1^2=1-\frac{n}{N}, \quad p\beta_i^2=1-\frac{2^{m_i}n}{(2^{m_i}-2^{m_{i-1}})N}, \quad p\beta_{s+1}^2=1 \quad (i=2, \ldots, s). \tag{3}$$

Так как $n<\frac{1}{2}N$, то правые части в (3) положительны и, следовательно, вещественные значения для β_i найти возможно.

Равенство (2) вытекает из (1), (3) и на α_i, β_j новых ограничений не накладывает.

Поступило
5.V. 1947

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

11 (1947) 569—575

О. В. САРМАНОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА СУММУ ПОЧТИ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИНДЕБЕРГА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье приводится обобщение леммы С. Н. Бернштейна о приложимости предельной теоремы к сумме почти независимых величин, удовлетворяющих условию Ляпунова, на суммы аналогичным образом связанных величин, удовлетворяющих условию Линдеберга.

В своей работе «Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes» * С. Н. Бернштейн доказал следующую основную лемму о приложимости предельной теоремы к суммам произвольно связанных величин, которые он назвал почти независимыми:

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad \text{м. о. } S_n^2 = B_n,$$
$$\text{м. о. } u_1^2 + \text{м. о. } u_2^2 + \ldots + \text{м. о. } u_n^2 = B_n'$$

(*для простоты письма полагается, что* м. о. $u_i = 0$);

Если, каково бы ни было множество уже известных величин $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$, *отклонения, испытываемые математическими ожиданиями* u_i *и* u_i^2, *не превышают соответственно* α_i *и* β_i *и в то же время математическое ожидание* $|u_i|^3$ *остается меньше* c_i, *то вероятность неравенства*

$$z_0 \sqrt{B_n} < S_n < z_1 \sqrt{B_n}$$

имеет предел

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

* Math. Annalen, 97 (1926), 1—59.

если

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{\sqrt{B_n}}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}{B_n}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{B_n^{\frac{3}{2}}}$$

стремятся к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

В настоящей работе указанная лемма обобщается на случай Линдеберга, который не предполагает существования третьих моментов.

Рассмотрим сумму зависимых величин

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

(для простоты письма полагаем, что м. о. $x_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$) и обозначим через B_n дисперсию суммы

$$B_n = \text{м. о. } (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2,$$

через B'_n — сумму дисперсий слагаемых, равную сумме математических ожиданий квадратов

$$B'_n = \text{м. о. } x_1^2 + \text{м. о. } x_2^2 + \ldots + \text{м. о. } x_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

через $F_k(x)$ — апрьорный интегральный закон распределения x_k, а через $F'_k(x)$ — любой условный интегральный закон распределения x_k, когда имеются те или иные сведения о значениях, которые приняли предшествующие случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$.

Введем в рассмотрение «априорный остаток дисперсии»

$$r_{nk}(\tau) = \frac{1}{B'_n} \int\limits_{|x| > \tau \sqrt{B'_n}} x^2 \, dF_k(x) \tag{1}$$

k-ой случайной величины, нормированной квадратным корнем $\sqrt{B'_n}$ из суммы дисперсий всех слагаемых, а также «условный остаток дисперсии»

$$r'_{nk}(\tau) = \frac{1}{B'_n} \int\limits_{|x| > \tau \sqrt{B'_n}} x^2 \, dF'_k(x). \tag{1'}$$

Будем называть априорным условием Линдеберга соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} r_{nk}(\tau) = 0, \tag{2}$$

справедливое для любого $\tau > 0$, а условным или апостериорным условием Линдеберга — аналогичное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} r'_{nk}(\tau) = 0, \tag{2'}$$

справедливое для любого $\tau > 0$.

Бесконечное множество апостериорных условий Линдеберга (2′) можно заменить одним условием, если ввести верхний остаток

$$\bar{r}_{nk}(\tau)=\frac{1}{B_n'}\sup\left\{\int\limits_{|x|>\tau\sqrt{B_n'}} x^2\,dF_k'(x)\right\}; \qquad (1'')$$

тогда условия (2) и (2′) заменятся условием

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\bar{r}_{nk}(\tau)=0 \qquad (2'')$$

для любого $\tau>0$.

Ясно, что

$$r_{nk}'(\tau)\leqslant\bar{r}_{nk}(\tau),\quad r_{nk}(\tau)\leqslant\bar{r}_{nk}(\tau),$$

поэтому из (2″) следует (2) и (2′).

Наконец, введем в рассмотрение максимальные изменения м. о. x_k и м. о. x_k^2 в зависимости от тех значений, которые приняли $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, а именно:

$$\alpha_k=\sup\left\{\left|\int x\,dF_k'(x)\right|\right\}$$

$\left(\text{напомним что } \int x\,dF_k(x)=0\right)$ и

$$\beta_k=\sup\left\{\left|\int x^2\,dF_k'(x)-\int x^2\,dF_k(x)\right|\right\}.$$

В условиях Линдеберга (2″) можно доказать следующую предельную теорему.

ТЕОРЕМА. *Если выполнены условия*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\bar{r}_{nk}(\tau)=0 \quad \textit{для любого } \tau>0, \qquad (2'')$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{\sqrt{B_n}}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\beta_k}{B_n}=0, \qquad (3)$$

$$\frac{b_k}{B_n}\longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad n\longrightarrow\infty \qquad (4)$$

равномерно относительно k, то при $n\longrightarrow\infty$ вероятность неравенства

$$t_1\sqrt{B_n}<x_1+x_2+\ldots+x_n<t_2\sqrt{B_n} \qquad (5)$$

стремится к пределу

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_1}^{t_2}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Доказательство. 1°. Как показал С. Н. Бернштейн в вышеупомянутой работе, при соблюдении первого из условий (3) справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n'}{B_n}=1. \qquad (6)$$

Поэтому в неравенстве (5) можно B_n заменить на B'_n; таким образом, если мы покажем, что при $n \to \infty$

$$P\{t_1\sqrt{B'_n} < x_1 + x_2 + \ldots + x_n < t_2\sqrt{B'_n}\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

то теорема будет доказана; докажем это последнее утверждение.

2°. Для доказательства теоремы достаточно показать, что характеристическая функция суммы $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{B'_n}}$ при $n \to \infty$ стремится к $e^{-\frac{t^2}{2}}$, т. е. к характеристической функции закона Гаусса

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

равномерно в любом конечном интервале $|t| < T$.

Рассмотрим сначала характеристическую функцию k-го слагаемого

$$f'_k\left(\frac{t}{\sqrt{B'_n}}\right) = 1 + \int \left(e^{it\frac{x}{\sqrt{B'_n}}} - 1\right) dF'_k(x), \tag{7}$$

вычисленную в предположении, что $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ приняли произвольные значения (или вообще о всех них или о их части стали известны какие-то сведения); это обстоятельство отмечено штрихом.

Интеграл в формуле (7) разобьем на две части:

$$f'_k\left(\frac{t}{\sqrt{B'_n}}\right) = 1 + \int\limits_{|x| > \tau\sqrt{B'_n}} \left(e^{it\frac{x}{\sqrt{B'_n}}} - 1\right) dF'_k(x) + \int\limits_{|x| \leq \tau\sqrt{B'_n}} \left(e^{it\frac{x}{\sqrt{B'_n}}} - 1\right) dF'_k(x)$$

и каждое слагаемое будем оценивать отдельно:

$$\left|\int\limits_{|x| > \tau\sqrt{B'_n}} \left(e^{it\frac{x}{\sqrt{B'_n}}} - 1\right) dF'_k(x)\right| \leqslant 2\int\limits_{|x| > \tau\sqrt{B'_n}} dF'_k(x) \leqslant \frac{2}{B'_n\tau^2}\int\limits_{|x| > \tau\sqrt{B'_n}} x^2\,dF'_k(x) =$$
$$= \frac{2}{\tau^2} r'_{nk}(\tau) \leqslant \frac{2}{\tau^2}\bar{r}_{nk}(\tau),$$

$$\int\limits_{|x| \leq \tau\sqrt{B'_n}} \left(e^{it\frac{x}{\sqrt{B'_n}}} - 1\right) dF'_k(x) = \frac{it}{\sqrt{B'_n}}\int\limits_{|x| < \tau\sqrt{B'_n}} x\,dF'_k(x) -$$
$$- \frac{t^2}{2B'_n}\int\limits_{|x| < \tau\sqrt{B'_n}} x^2\,dF'_k(x) + \int\limits_{|x| \leq \tau\sqrt{B'_n}} \left(e^{it\frac{x}{\sqrt{B'_n}}} - 1 - \frac{it}{\sqrt{B'_n}} + \frac{t^2x^2}{2B'_n}\right) dF'_k(x);$$

каждый из трех последних интегралов опять требует своей оценки:

$$\left|\frac{it}{\sqrt{B'_n}}\int\limits_{|x| \leq \tau\sqrt{B'_n}} x\,dF'_k\right| = \left|\frac{t}{\sqrt{B'_n}}\int\limits_{|x| \leq \tau\sqrt{B'_n}} x\,dF'_k(x)\right| = \left|\frac{t}{\sqrt{B'_n}}\int x\,dF'_k(x) -\right.$$
$$\left.- \frac{1}{\sqrt{B'_n}}\int\limits_{|x| > \tau\sqrt{B'_n}} x\,dF'_k(x)\right| \leqslant \frac{|t|}{\sqrt{B'_n}}\left|\int x\,dF'_k(x) + \frac{|t|}{\sqrt{B'_n}}\right|\int\limits_{|x| > \tau\sqrt{B'_n}} x\,dF'_k(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |t| \frac{\alpha_k}{\sqrt{B'_n}} + \frac{|t|}{\tau B'_n} \int\limits_{x > \tau\sqrt{B'_n}} x^3 \, dF'_k(x) \leqslant |t| \frac{\alpha_k}{\sqrt{B'_n}} + \frac{|t|}{\tau} \bar{r}_{nk}(\tau).$$

Далее,

$$-\frac{t^2}{2B'_n} \int\limits_{|x| \leqslant \tau\sqrt{B'_n}} x^2 \, dF'_k(x) = -\frac{t^2}{2B'_n} \int x^2 \, dF'_k(x) + \frac{t^2}{2B'_n} \int\limits_{|x| > \tau\sqrt{B'_n}} x^2 \, dF'_k(x) =$$

$$= -\frac{t^2}{2B'_n} \int x^2 \, dF_k(x) + \left[\frac{t^2}{2B'_n} \int x^2 \, dF_k(x) - \frac{t^2}{2B'_n} \int x^2 \, dF'_k(x) \right] + \frac{t^2}{2} r'_{nk}(\tau),$$

или

$$-\frac{t^2}{2B'_n} \int\limits_{|x| \leqslant \tau\sqrt{B'_n}} x^2 \, dF'_k(x) = -\frac{t^2}{2} \frac{b_k}{B'_n} + \frac{t^2}{2B'_n} \beta'_k + \frac{t^2}{2} r'_{nk}(\tau),$$

где

$$|\beta'_k| \leqslant \beta_k, \quad r'_{nk}(\tau) \leqslant \bar{r}_{nk}(\tau).$$

Для оценки последнего интеграла заметим, что

$$\left| e^{it\frac{x}{\sqrt{B'_n}}} - 1 - \frac{itx}{\sqrt{B'_n}} + \frac{t^2x^2}{2B'_n} \right| = \left| -\frac{i}{3!} \frac{t^3x^3}{B'^{\frac{3}{2}}_n} e^{it\frac{x}{\sqrt{B'_n}}\theta} \right| \leqslant \frac{|t^3|\,|x|^3}{3!\, B'^{\frac{3}{2}}_n},$$

поэтому

$$\left| \int\limits_{|x| \leqslant \tau\sqrt{B'_n}} \left(e^{it\frac{x}{\sqrt{B'_n}}} - 1 - \frac{itx}{\sqrt{B'_n}} + \frac{t^2x^2}{2B'_n} \right) dF'_k(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|t|^3}{3!\, B'^{\frac{3}{2}}_n} \int\limits_{|x| \leqslant \tau\sqrt{B'_n}} |x|^3 \, dF'_k(x) \leqslant \frac{\tau |t|^3}{3!\, B'_n} \int\limits_{|x| \leqslant \tau\sqrt{B'_n}} x^2 \, dF'_k(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau |t|^3}{3!\, B'_n} \int x^2 \, dF'_k(x) = \frac{\tau |t|^3}{3!\, B'_n} \int x^2 \, dF_k(x) + \frac{\tau |t|^3}{3!\, B'_n} \left(\int x^2 \, dF'_k(x) - \right.$$

$$\left. - \int x^2 \, dF_k(x) \right) = \frac{\tau |t|^3}{3!\, B'_n} b_k + \frac{\tau |t|^3}{3!\, B'_n} \beta'_k,$$

где $|\beta'_k| \leqslant \beta_k$. Итак,

$$f'_k\left(\frac{t}{\sqrt{B'_n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2} \frac{b_k}{B'_n} + \gamma_k, \tag{7'}$$

где

$$|\gamma_k| < \frac{2}{\tau^2} \bar{r}_{nk}(\tau) + |t| \frac{\alpha_k}{\sqrt{B'_n}} + \frac{|t|}{\tau} \bar{r}_{nk}(\tau) + \frac{t^2}{2} \frac{\beta_k}{B'_n} + \frac{t^2}{2} \bar{r}_{nk}(\tau) +$$

$$+ \frac{\tau |t|^3}{3!} \cdot \frac{b_k}{B'_n} + \frac{\tau |t|^3}{3!} \frac{\beta_k}{B'_n} = \left(\frac{2}{\tau^2} + \frac{|t|}{\tau} + \frac{t^2}{2} \right) \bar{r}_{nk}(\tau) + |t| \frac{\alpha_k}{\sqrt{B'_n}} +$$

$$+ \left(\frac{t^2}{2} + \tau \frac{|t|^3}{3!} \right) \frac{\beta_k}{B'_n} + \tau \cdot \frac{|t|^3}{3!} \cdot \frac{b_k}{B'_n};$$

короче говоря, если τ достаточно мало, а n достаточно велико, то $\sum\limits_{k=1}^{n} |\gamma_k|$ сколь угодно мала, если $|t| < T$.

3°. Прежде чем перейти к дальнейшему, сделаем одно замечание о вычислении условного математического ожидания, играющего роль при вычислении математического ожидания произведения зависимых величин.

Пусть м. о.$_x y = R + \delta(x)$, где R от x не зависит;

$$\text{м. о. } (xy) = \text{м. о. } [x. \text{ м. о.}_x y] = \text{м. о. } [x(R + \delta(x))] =$$
$$= R \cdot \text{м. о. } x + \text{м. о. } x\delta(x).$$

Если $|\delta(x)| < \varepsilon$, а $|x| < C$, то $|\text{м. о. } [x\delta(x)]| < C\varepsilon$.

4°. Обозначим через G_m характеристическую функцию суммы $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{\sqrt{B_n'}}$, так что

$$G_m = \text{м. о. } (e^{it\sum_{j=1}^{m-1}\frac{x_j}{\sqrt{B_n'}}} \cdot e^{it\frac{x_m}{\sqrt{B_n'}}}) = G_{m-1}\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_m}{B_n'}\right) +$$
$$+ \text{м. о. } e^{it\sum_{j=1}^{m-1}\frac{x_j}{\sqrt{B_n'}}} \gamma_k = G_{m-1}\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_m}{B_n'}\right) + \delta_m,$$

где $|\delta_m| \leqslant |\gamma_m|$. Здесь использовано замечание 3°, роль x играет $e^{it\sum_{j=1}^{m-1}\frac{x_j}{\sqrt{B_n'}}}$, роль y играет $e^{it\frac{x_m}{\sqrt{B_n'}}}$. В частности,

$$G_1 = 1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_1}{B_n'} + \delta_1, \quad \delta_1 = \gamma_1,$$
$$G_2 = G_1\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_2}{B_n'}\right) + \delta_2 = \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_1}{B_n'}\right)\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_2}{B_n'}\right) +$$
$$+ \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_2}{B_n'}\right)\delta_1 + \delta_2.$$

Два последних слагаемых можно представить в следующем виде:

$$\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_2}{B_n'}\right)\delta_1 + \delta_2 = \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_1}{B_n'}\right)\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_2}{B_n'}\right)\left\{\frac{\delta_1}{1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_1}{B_n'}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta_2}{\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_1}{B_n'}\right)\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_2}{B_n'}\right)}\right\}.$$

Вообще обозначим

$$E_m = \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_k}{B_n'}\right); \tag{8}$$

тогда получим

$$G_m = E_m + E_m\sum_{k=1}^{m}\frac{\delta_k}{E_k}. \tag{9}$$

Пусть, теперь,

$$|t| < T; \tag{10}$$

тогда, если n достаточно велико, то, в силу (4), $\frac{t^2}{2}\frac{b_k}{B_n'} < 1$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому, если $k \leqslant m$, то $E_m \leqslant E_k$ и, значит,

$$G_n = E_n + \sum_{k=1}^{n}\frac{E_n}{E_k}\delta_k,$$

причем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{E_n}{E_k} \delta_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{E_n}{E_k^*}\right| |\delta_k| < \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|.$$

Следовательно,

$$|G_n - E_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|,$$

а последняя сумма, как мы уже заметили, при соблюдении условия (10), фиксированном T, достаточно малом τ и достаточно большом n будет сколь угодно мала. Таким образом,

$$\ln E_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{b_k}{B_n'}\right) = -\frac{t^2}{2} + O\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{B_n'^2}\right\};$$

но

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{B_n'^2} \leqslant \mu_n \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{B_n'} = \mu_n,$$

где $\mu_n = \max \frac{b_k}{B_n'}$; в силу же (4), $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\ln E_n = -\frac{t^2}{2} + \varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty} \ln E_n = -\frac{t^2}{2},$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но при $\tau > 0$ и $n \to \infty$ (n выбирается после выбора τ)

$$G_n \to E_n.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \ln G_n = -\frac{t^2}{2},$$

т. е.

$$G_n \to e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ при } n \to \infty.$$

Последнее обстоятельство завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. В двух последних пунктах доказательства целиком использован метод, изложенный в упомянутой работе С. Н. Бернштейна.

Поступило
27. II. 1947

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 11

Стр.

Виленкин Н. Я. Об одном классе полных ортонормальных систем . . . 363—400
Гельфанд И. М. и **Наймарк М. А.** Унитарные представления группы Лоренца . . . . 411—504
Гельфонд А. О. и **Ибрагимов И. И.** О функциях, производные которых равны нулю в двух точках . . . . 547—560
Граев М. И. Изоморфизмы прямых разложений в дедекиндовых структурах . . . . 33—46
Даревский В. М. О методах Toeplitz'a . . . . 3—32
Делоне Б. Н. Алгорифм разделенных параллелограммов . . . . 505—537
Дубровский В. М. Замечания к моей работе «О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множества и о предельном переходе под знаком интеграла» . . . . 101—104
Ибрагимов И. И. О полноте системы аналитических функций . . . . . 75—100
Колмогоров А. Н., Петров А. А., Смирнов Ю. М. Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов . . . . 561—565
Крейн М. Г. К теории целых функций экспоненциального типа . . . . 309—326
Курепа Г. Множества счетных последовательностей из целых чисел (к проблеме Суслина) . . . . 59—74
Ландкоф Н. С. О разрешимости обобщенной задачи Дирихле . . . . . . 181—196
Линник Ю. В. О точности приближения к гауссову распределению сумм независимых случайных величин . . . . 111—138
Линник Ю. В. и **Реньи А. А.** О некоторых гипотезах теории характеров Дирихле . . . . 539—546
Лузин Н. Н. О частях натурального ряда . . . . 403—410
Мальцев А. И. Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов» . . . . 567—568
Наймарк М. А. Экстремальные спектральные функции симметрического оператора . . . . 327—344
Никольский С. М. О наилучшем приближении многочленами в среднем функции $|a-x|^s$ . . . . 139—180
Розенфельд Б. А. Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей . . . . 283—308
О. В. Сарманов. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на сумму почти независимых величин, удовлетворяющих условию Линдеберга . . . . 569—575
Тиман А. Ф. Об одном методе приближения непрерывных функций тригонометрическими полиномами . . . . 263—282
Тихомиров А. И. Обобщение теоремы Мальцева о расщепляемых алгебрах 47—58
Туран П. О гипотезе Римана . . . . 197—262
Халилов З. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений . . . . . 345—362
Хинчин А. Я. Две теоремы, связанные с задачей Чебышева . . . . . . 105—110
От редакции . . . . 401—402

